

УДК 512.24

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА ТРЕХМОДОВОЙ МОДЕЛИ $\alpha\omega$ -ДИНАМО

Е. А. Казаков<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Камчатский государственный технический университет, 683003,  
г. Петропавловск-Камчатский, ул. Ключевская, 35

<sup>2</sup> Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032,  
г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

E-mail: MifistJohn@gmail.com

В рамках настоящей работы изучаются простая феноменологическая модель  $\alpha\omega$ -динамо, с динамическим подавлением  $\alpha$ -генератора квадратичной формой от компонент магнитного поля. В частности, рассматривается подавление спиральностью и энергией. Определяется форма ядра функционала подавления при которой интегральный член можно устранить и свести модель к системе дифференциальной лоренцевского типа. В общем случае в модели есть возможность широкого варьирования ядра функционала и вида квадратичной формы. В рассматриваемой модели потенциально могут реализовываться значительно более богатый набор динамических режимов, по сравнению с классическим случаем лоренцевской системы. [1]

*Ключевые слова:*  $\alpha\omega$ -динамо, спиральность поля, энергия поля, инверсии, система Лоренца

© Казаков Е. А., 2019

---

### Введение

В рассматриваемом приближении феноменологическая модель  $\alpha\omega$ -динамо задается уравнениями для амплитуд компонент магнитного поля:

$$\begin{aligned} \frac{dB^T}{dt} &= \omega B^P - \mu B^T \\ \frac{dB^P}{dt} &= [\alpha - \int_0^t J(t-\tau)Q(B^T(\tau), B^P(\tau))d\tau]B^T - B^P \end{aligned} \quad (1)$$

В этом выражении  $Q(B^T, B^P)$  является квадратичной функцией от компонент поля, а  $J(t-\tau)$  – стационарное ядро функционала обратной связи, реализующего в модели

динамическое подавление магнитным полем интенсивности  $\alpha$ -эффект. Другими словами, мы предполагаем, что в интенсивности  $\alpha$ -эффекта присутствует постоянная компонента  $\alpha$  и динамическая поправка

$$z(t) = \int_0^t J(t-\tau)Q(B^T(\tau), B^P(\tau))d\tau \quad (2)$$

Варьируя в системе (1) вид ядра и функции, будем получать различные модели динамо. Отметим, что любая из них будет обладать необходимой симметрией относительно компонент магнитного поля. Наличие интегрального члена в системе (1) сильно затрудняет ее анализ, однако, для определенных классов ядер, ее можно привести к обычной динамической системе. В настоящей работе мы не будем описывать этот класс ядер в максимальной общности и ограничимся рассмотрением экспоненциального ядра  $J(t-\tau) = e^{-b(t-\tau)}$ .

Дифференцируя равенство (2) по времени, получим

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -b \int_0^t e^{-b(t-\tau)} Q(B^T(\tau), B^P(\tau))d\tau + Q(B^T(t), B^P(t)) = \\ &= -bz + Q(B^T(t), B^P(t)) \end{aligned} \quad (3)$$

что позволяет заменить (2) равносильными соотношениями

$$\frac{dz}{dt} = Q(B^T(t), B^P(t)) - bz \quad (4)$$

Получается, что модель (1) сводится к динамической системе

$$\begin{aligned} \frac{dB^T}{dt} &= \omega B^P - \mu B^T, \\ \frac{dB^P}{dt} &= \alpha B^T - B^T z - B^P, \\ \frac{dz}{dt} &= Q(B^T, B^P) - bz \end{aligned} \quad (5)$$

При этом, возможным вариантам эволюции динамо-системы соответствуют движения точки по фазовым траекториям системы (5), начинающиеся в плоскости  $z=0$ , т.е. интерес для нас представляют только те фазовые траектории, которые пересекают плоскость.

Среди всех формально возможных видов функции  $Q$  физически хорошо осмысливаются два, а именно,  $Q = B^T B^P$  и  $Q = |B^T|^2 + |B^P|^2$ . В первом случае  $Q$  будет описывать спиральность поля, а во втором его энергию. Далее будем рассматривать именно эти варианты функции  $Q$ . Следует отметить, что в случае  $Q = B^T B^P$  и  $\omega = \mu$  система (5) становится классической системой Лоренца, в которой при определенных значениях параметров возникают хаотические перебросы и странный аттрактор. В нашем случае, однако, ограничение  $\omega = \mu$  слишком обременительно, да и нефизично, а сохраняются ли хаотические режимы при физически правдоподобных для динамо-систем значениях параметров сразу не видно. Поэтому необходимо выяснить, что из свойств системы Лоренца сохранится, а что – нет. Динамика же системы (5) при  $Q = |B^T|^2 + |B^P|^2$  вообще требует отдельного изучения.

В связи с изучением инверсий поля, представляет интерес случай неустойчивых положений равновесия с ненулевыми значениями поля. Поэтому, прежде всего, определим точки покоя (состояния равновесия) системы (5) и исследуем их на устойчивость, по возможности – аналитически.

## Расчет областей в параметрическом пространстве

Прежде всего, очевидно, что система (5) имеет нулевую точку покоя. Линеаризуя систему в окрестности этой точки, легко получить, что нулевая точка будет устойчивой при  $\alpha\omega < \mu$ , и теряет устойчивость при  $\alpha\omega > \mu$ . Поэтому, можно сказать, что механизм динамо «работает» при  $\alpha\omega < \mu$ , т.е. выражение  $D = \frac{\alpha\omega}{\mu}$  имеет смысл динамо-числа.

Теперь, для того, чтобы определять остальные точки покоя, необходим конкретный вид функции  $Q$ .

Рассмотрим сначала «лоренцевский» случай

$$Q(B^T, B^P) = B^T B^P, \quad (6)$$

когда подавление  $\alpha$ -эффекта обеспечивается спиральностью поля. Система (5-6) сводится к стандартной системе Лоренца.

Известно, что при определенных значениях параметров в этой системе возникают инверсии, в том числе и регулярные и хаотические, т.е. она может моделировать разные режимы инверсий в динамо-системе.

Хорошо видно, что у системы (5-6) пространство параметров в действительности не 4-мерное, а 3-мерное:  $(\alpha\omega, \mu, b)$ . Поэтому все выражения, определяющие структуру фазового пространства, должны определяться в терминах именно этих трех параметров. Стандартным образом, полагая в системе (5-6) производные равными нулю и решая алгебраическую систему уравнений, получим, что кроме всегда существующей нулевой точки покоя, при  $\alpha\omega > \mu$  существуют еще две симметричные точки покоя:

$$x = \pm \frac{\sqrt{\omega b(\alpha\omega - \mu)}}{\mu}, y = \pm \frac{\sqrt{\omega b(\alpha\omega - \mu)}}{\mu}, z = \frac{\alpha\omega - \mu}{\omega} \quad (7)$$

Ввиду симметрий системы (5-6) относительно смены знаков компонент поля, ясно, что ее поведение в окрестностях этих точек одинаковое. Характеристический многочлен линеаризованной в окрестности точек (5-6) системы (5-6) имеет вид:

$$\lambda^3 + (1 + \mu + b)\lambda^2 + \frac{b(\mu^2 + \alpha\omega)}{\mu}\lambda + 2b(\alpha\omega - \mu)$$

В соответствии с критерием Рауса-Гурвица, точки (7) будут устойчивыми тогда и только тогда, когда

$$(1 + \mu + b)(\mu^2 + \alpha\omega)b - 2\mu b(\alpha\omega - \mu) = (\mu^2 + \alpha\omega)b^2 + [\mu^3 + 3\mu^2 + \alpha\omega(1 - \mu)]b > 0 \quad (8)$$

Из последнего неравенства, прежде всего, видно, что, при  $0 < \mu \leq 1$ , точки (7) будут устойчивыми, поэтому необходимым условием для инверсий будет условие  $\mu > 1$ . Рассмотрим теперь выражение

$$b^* = -\frac{\mu^3 + 3\mu^2 + \alpha\omega(1 - \mu)}{\mu^2 + \alpha\omega} \quad (9)$$

Ясно, что при  $b^* < 0$ , точки (7) будут устойчивыми для любого положительного  $b$ , а при  $b^* > 0$  возникает интервал  $0 < b < b^*$ , когда эти точки неустойчивы.

Построим в плоскости параметров  $(\mu, \alpha\omega)$  линии  $\alpha\omega = \mu$ ,  $\mu = 1$ ,  $\mu^3 + 3\mu^2 + \alpha\omega(1 - \mu) = 0$ . Тогда из вышеописанных рассуждений вытекает, что для  $(\mu, \alpha\omega)$  лежащих в заштрихованной области на рис. ?? и  $0 < b < b^*$ , точки (7) неустойчивы, т.е. это область возможных инверсий.

Физически интересно то, что область значений  $b$  при которых возникают инверсии ограничена сверху. В исходной интегро-дифференциальной модели (1) подавление  $\alpha$ -эффекта обеспечивается функционалом от компонент поля, значение которого определяется всей предшествующей динамикой этих компонент, т.е. можно говорить о памяти в данной системе. При использовании экспоненциального ядра  $J(t - \tau) = e^{-b(t-\tau)}$  можно говорить о памяти с ограниченной длительностью, и параметр  $b$  обратно пропорционален этой длительности. Поэтому, полученные на  $b$  ограничения означают, что для возникновения инверсий в рассматриваемой модели необходимо наличие достаточно долгой памяти.

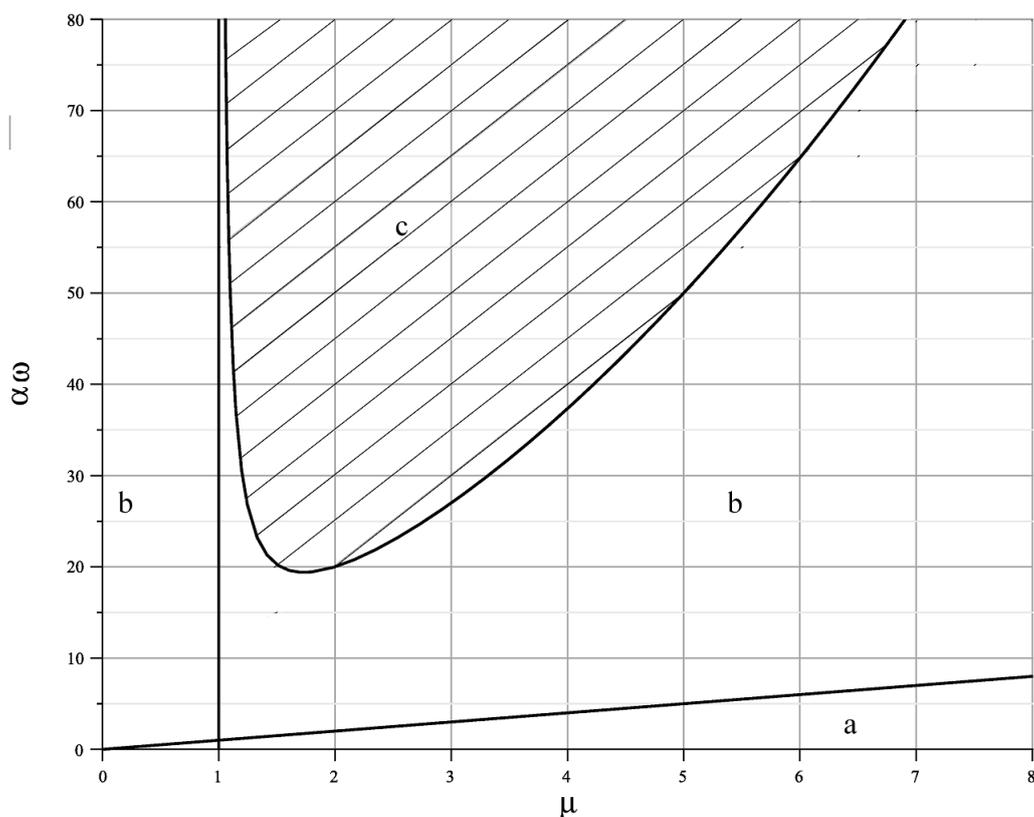


Рисунок. Области различных режимов динамо в плоскости параметров  $(\mu, \alpha\omega)$  а) – динамо «не работает», б) – режим динамо без инверсий, с) – режим динамо с возможными инверсиями.

## Пример

Теперь рассмотрим подробнее алгоритм исследования параметрического пространства на примере, когда в системе (5) функция

$$Q(B^T, B^P) = |B^T|^2 + |B^P|^2$$

т.е. случай подавление  $\alpha$ -эффекта реализуется функционалом от энергии поля.

Перемасштабируем фазовые переменные по схеме:

$$B^T \rightarrow x, \quad B^P \rightarrow \frac{\omega}{\mu}y \quad z \rightarrow \frac{\omega}{\mu}z$$

и введем замены параметров:

$$D = \frac{\alpha\omega}{\mu} \quad s = \frac{\omega}{\mu}$$

в результате получим систему:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mu y - \mu x, \\ \frac{dy}{dt} &= -zx + Dx - y, \\ \frac{dz}{dt} &= sx^2 + \frac{1}{s}y^2 - bz, \end{aligned} \quad (10)$$

Условия ограничения на систему такие:

$$\mu > 0 \quad s > 0, \quad D > 0, \quad b > 0$$

Полагая в системе (10) производные равными нулю и решая алгебраическую систему уравнений, получим, что кроме всегда существующей нулевой точки покоя, при  $D > 1$  существуют еще две симметричные точки покоя:

$$x = \pm \sqrt{\frac{bs(D-1)}{s^2+1}}, y = \pm \sqrt{\frac{bs(D-1)}{s^2+1}}, z = D-1 \quad (11)$$

Построим якобиан системы (10)

$$\begin{vmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ D-z & -1 & -x \\ 2sx & \frac{2y}{s} & -b \end{vmatrix} \quad (12)$$

Подставим (11) в (12) получим:

$$\begin{vmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{\frac{bs(D-1)}{s^2+1}} \\ 2s\sqrt{\frac{bs(D-1)}{s^2+1}} & \frac{2\sqrt{\frac{bs(D-1)}{s^2+1}}}{s} & -b \end{vmatrix} \quad (13)$$

Характеристический многочлен линеаризованной в окрестности точек (11) имеет вид:

$$\begin{aligned} \lambda^3 + \frac{(1 + \mu s^2 + \mu + s^2 + bs^2 + b)}{s^2 + 1} \lambda^2 + \\ + \frac{(2bD + bs^2 - b + \mu b + \mu bs^2)}{s^2 + 1} \lambda + \frac{(-2\mu bs^2 - 2\mu b + 2\mu bD + 2\mu b + s^2D)}{s^2 + 1} \end{aligned} \quad (14)$$

Для удобства введем замены для выражений стоящих перед степенями  $\lambda$  в (14) и упростив запись получим

$$\begin{aligned} a_3 &= 2(D-1)\mu b \\ a_2 &= \frac{b(2D + s^2 - 1 + \mu + \mu s^2)}{s^2 + 1} \end{aligned}$$

$$a_1 = 1 + b + \mu$$

Рассмотрим для данной системы критерии устойчивости Раунса-Гурвица. В соответствии с этими критериями, получаем, для того, чтобы система была устойчива необходимо и достаточно, что бы выполнялись следующие условия:

$$a_1 > 0 \quad a_1 a_2 > 0 \quad a_3 > 0 \quad a_1 a_2 - a_3 > 0$$

Так как, условия  $a_1 > 0$ ,  $a_1 a_2 > 0$ ,  $a_3 > 0$  выполняются автоматически за счет ограничений заданных на коэффициенты системы 10, рассмотрим только условие  $a_1 a_2 - a_3 > 0$

Для того, что бы в системе (10) наблюдались инверсии, необходимо, что бы неравенство не выполнялось. Т.е.  $a_1 a_2 - a_3 < 0$

$$\frac{(1 + b + \mu)b(2D + s^2 - 1 + \mu + \mu s^2)}{s^2 + 1} - 2(D - 1)\mu < 0 \quad (15)$$

Из (15), выразив параметр  $b$ , получим:

$$\begin{aligned} & \frac{(2D + s^2 - 1 + \mu + \mu s^2)}{s^2 + 1} b^2 + \\ & + \frac{(2D + s^2 - 1 + 4\mu s^2 + \mu^2 + \mu^2 s^2 + 2\mu - 2\mu s^2 D)}{s^2 + 1} b \end{aligned} \quad (16)$$

Решив это уравнение относительно  $b$ , получим:

$$b_1 = 0 \quad b_2 = f(\mu, s, D)$$

$$f(\mu, s, D) = \frac{-2D - s^2 + 1 - 4\mu s^2 - \mu^2 - \mu^2 s^2 - 2\mu + 2\mu s^2 D}{2D + s^2 - 1 + \mu + \mu s^2}$$

Система (10) будет иметь инверсии в том случае, если коэффициент  $b$  примет значение из интервала  $(0, f(\mu, s, D))$ . Функцию  $f(\mu, s, D)$  будем также называть  $b^*$ .

Теперь рассмотрим саму функцию  $f(\mu, s, D)$ . Перепишем функцию  $f$  относительно переменной  $D$ :

$$\frac{(-2 + 2\mu s^2)D - s^2 + 1 - 4\mu s^2 - \mu^2 - \mu^2 s^2 - 2\mu}{2d + s^2 - 1 + \mu + \mu s^2} \quad (17)$$

Решив уравнение, получим

$$\frac{1}{2} \frac{s^2 - 1 + 4\mu s^2 + \mu^2 + \mu^2 s^2 + 2\mu}{-1 + \mu s^2} \quad (18)$$

Из знаменателя (18) можно увидеть еще одно соотношение, а именно:

$$\mu s^2 - 1 > 0$$

Отсюда следует:

$$s > \frac{1}{\sqrt{\mu}} \quad (19)$$

Из формы уравнений исходной системы (1), видно, что за единицу времени в модели принято характерное время свободной диссипации полоидальной компоненты

магнитного поля. Хорошо известно, что, при одинаковых пространственных масштабах, тороидальные собственные моды свободной диссипации затухают быстрее, чем полоидальные. А коэффициент  $\mu$  имеет в нашей модели смысл отношений характерных времен диссипации полоидальной части поля к тороидальной. Поэтому, из физических соображений, можно полагать, что  $\mu > 1$ . В частности, для калссического динамо Паркера,  $\mu = 3.37$  [4].

## Заключение

В результате аналитического исследования модели  $\alpha\omega$ -динамо, мы рассмотрели случай, при котором система (1) сводится к дифференциальной динамической системе, «лоренцевского» типа (5). Для этой системы мы установили, что хаотическое поведение, может возникать при следующих ограничениях на параметры системы:

$$0 < b < f(s, D, \mu),$$

$$D > g(s, \mu),$$

$$s > \frac{1}{\sqrt{\mu}},$$

$$\mu = 3.37.$$

## Список литературы/References

- [1] Zeldovich Y. B., Rusmaikin A. A., Sokoloff D. D., *Magnetic fields in astrophysics. The Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics.*, Gordon and Breach, New York, 1983, 382 pp.
- [2] Кузнецов С. П., *Динамический хаос*, Физматлит, Москва, 2006, 356 с. [Kuznecov S. P., *Dinamicheskij haos [Dynamic chaos]*, Fizmatlit, Moskva, 2006 (in Russian), 356 pp.]
- [3] Табор М., *Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике*, Едиториал УРСС, Москва, 2001, 585 с. [Tabor M., *Haos i integriruemost' v nelinejnoj dinamike [Chaos and nonlinear dynamics integrability]*, Editorial URSS, Moskva, 2001 (in Russian), 585 pp.]
- [4] Parker E. N., "Hydromagnetic dynamo models", *Astrophysical Jour*, 1955, № 122, 293–314.
- [5] Соколов Д. Д., Нефедов С. Н., "Маломодовое приближение в задаче звездного динамо", *Вычислительные методы и программирование*, 2007, № 2, 195–204. [Sokolov D. D., Nefedov S. N., "Malomodovoe priblizhenie v zadache zvezdnogo dinamo [Low-mode approximation in the stellar dynamo problem]", *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye*, 2007, № 2, 195–204 (in Russian)].
- [6] Корн Г., Корн Т., *Справочник по математике для научных работников и инженеров*, Наука, Москва, 1968, 720 с. [ *Spravochnik po matematike dlya nauchnyh rabotnikov i inzhenerov [Math Handbook for Scientists and Engineers]*, Nauka, Moskva, 1968 (in Russian), 720 pp.]

## Список литературы (ГОСТ)

- [1] Zeldovich Y. B., Rusmaikin A. A., Sokoloff D. D. Magnetic fields in astrophysics. The Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics. New York: Gordon and Breach, 1983. 382 p.
- [2] Кузнецов С. П. Динамический хаос. М.: Физматлит. 2006. 356 с.
- [3] Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. М.: Едиториал УРСС, 2001. 585 с.

- [4] Parker E. N. Hydromagnetic dynamo models // *Astrophysical Jour.* 1955. no. 122. P. 293–314.
- [5] Соколов Д. Д., Нефедов С. Н. Маломодовое приближение в задаче звездного динамо // *Вычислительные методы и программирование.* 2007. no. 2. P. 195–204.
- [6] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. 720 с.

**Для цитирования:** Казаков Е. А. Исследование параметрического пространства трехмодовой модели  $\alpha\omega$ -динамо // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2019. Т. 26. № 1. С. 54-62. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-26-1-54-62

**For citation:** Kazakov E. A. Research of the parametric space of the three-mode  $\alpha\omega$ -dynamo model, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2019, **26**: 1, 54-62. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-26-1-54-62

Поступила в редакцию / Original article submitted: 06.02.2019

DOI: 10.26117/2079-6641-2019-26-1-54-62

MSC 37N10

## **RESEARCH OF THE PARAMETRIC SPACE OF THE THREE-MODE $\alpha\omega$ -DYNAMO MODEL**

**E. A. Kazakov<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup> Kamchatka State Technical University, 683003, Petropavlovsk-Kamchatsky,  
Klyuchevskaya st., 35, Russia

<sup>2</sup> Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky,  
Pogranichnaya st., 4, Russia

E-mail: MifistJohn@gmail.com

In the framework of this work, we study a simple phenomenological model of a  $\alpha\omega$  - dynamo, with dynamic suppression of a  $\alpha$  -generator by a quadratic form from a magnetic field component. In particular, suppression of spiralness and energy is available. The shape of the nucleus is determined, and the system of differentiation of the Lorentz type. In general, the models have the possibility of a wide range of functional and quadratic forms. Compared with the classical case of the Lorentz system [1].

*Key words:*  $\alpha\omega$  -dynamo, field helicity, field energy, inversions, Lorentz system

© Kazakov E. A., 2019