Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 26. № 1. С. 46-53. ISSN 2079-6641

DOI: 10.26117/2079-6641-2019-26-1-46-53

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 512.24

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ МАЛЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ ПАМЯТИ

**Э. А. Гафурова, М. Л. Михайлов, Ю. В. Грушко, Р. И. Паровик, И. А. Кашутина**

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

E-mail: romanparovik@gmail.com

В работе предложена новая математическая модель динамики малых предприятий с участием внешних инвестиций, которая учитывает эффект памяти и влияет на темп изменения стоимости производственных фондов. Этот эффект памяти можно рассматривать как свойство экономической среды, например, влияние на производство внешних факторов, при которых стоимость производственных фондов будет зависеть от предыдущих ее значений. Этот нелокальный эффект можно записать в терминах производной дробного порядка. В работе мы будем считать, что порядок дробной производной - функция от времени. Поэтому исходное модельное уравнение мы будем решать с помощью численных методов теории конечно-разностных схем. Далее в работе проведена визуализация и интерпретация результата расчетов.

*Ключевые слова: динамика малых предприятий, память, модель, дробная производная*



## Введение

В настоящее время широкое развитие получили экономические системы, обладающие эффектом памяти [1]-[6]. Эффект памяти - это свойство экономической системы, текущее состояние которой зависит от предыдущих ее состояний, что приводит к нелокальности по времени. С точки зрения экономики эффекты памяти можно трактовать как своего рода барьеры, замедляющие темпы роста.

Обычно эффекты памяти динамических систем математически описываются с помощью интегро-дифференциальных уравнений или уравнений с производными дробных порядков [7].

В работе мы рассмотрим математическую модель динамики развития малого предприятия с учетом эффекта памяти. Известно [8], что для успешного развития малого предприятия необходимо устойчивое финансирование, которое определяется размером стартового капитала и емкостью источников поддержания, а также внешними инвестициями.

## Математическая модель

Сделаем следующие предположения:

1) малое предприятие может развиваться как за счет внутренних источников (прибыли), так и за счет внешней финансовой поддержки в виде инвестиций;

2) основные производственные фонды являются единственным лимитирующим фактором, определяющим выпуск продукции;

3) малое предприятие функционирует при неизменной технологии, что предполагает постоянство его фондоотдачи;

4) сумма налоговых отчислений складывается из налогов с оборота и прибыли.

С учетом сделанных предпосылок производственная деятельность малого предприятия описывается однофакторной производственной функцией типа Леонтьева, а темпы развития предприятия определяются динамикой основных производственных фондов [8].

Введем следующие параметры модели:

- $P(t)$ – выпуск продукции в момент времени $t \in [0,T]$ в стоимостном отношении;
- $f$ – показатель фондоотдачи;
- $A(t)$ – стоимость основных производственных фондов;
- $M_{\text{об}}$ – общая прибыль малого предприятия;
- $M_{\text{чис}}$ – чистая прибыль малого предприятия за вычетом налоговых отчислений;
- $N(t)$ – сумма налоговых отчислений;
- $I(t)$ – внешние инвестиции;
- $c$ – удельная себестоимость выпуска продукции;
- $s_1, s_2$ – ставки налогообложения на объем выпуска и прибыль соответственно;
- $k \in (0,1]$ – коэффициент, отражающий долю реинвестируемых средств прибыли, не имеющих льгот по налогообложению (не все реинвестируемые средства освобождаются от налогов), и оцениваемый статистическим путем;
- $\xi \in [0,1]$ – коэффициент, отражающий долю реинвестируемых средств прибыли, не имеющих льгот по налогообложению (не все реинвестируемые средства освобождаются от налогов), и оцениваемый статистическим путем;
- $T > 0$ – время моделирования процесса.

Свяжем эти параметры модели уравнениями.

Определим линейную производственную функцию малого предприятия:

$$P(t) = fA(t). \tag{1}$$

Общая прибыль за вычетом издержек производства имеет вид:

$$M_{\text{об}} = (1-c)P(t). \tag{2}$$

Чистая прибыль за вычетом общей суммы налоговых отчислений:

$$M_{\text{чис}} = M_{\text{об}} - N(t). \tag{3}$$

Налоговые отчисления:

$$N(t) = s_1 P(t) + s_2 k(1-\xi) P(t). \tag{4}$$

Заметим, что уравнение (4) использует упрощенный алгоритм налоговых отчислений, состоящий из двух компонент зависящих от объемов производства (с оборота, НДС) и начисляемых на прибыль. При этом льготы, предоставляемые предприятиям, реинвестирующим свою прибыль в производство, учитываются с помощью доли инвестиционных отчислений $\xi$ и коэффициента $k$ (величина его обычно зависит от границы действия льгот).

Изменение производственных фондов за счет собственных средств и внешних инвестиций с учетом эффекта памяти:

$$\frac{d^{\alpha(t)}A(t)}{dt^{\alpha(t)}} = \xi M_{\text{чис}}(t) + I(t), \tag{5}$$

где $\dfrac{d^{\alpha(t)}A(t)}{dt^{\alpha(t)}} = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))}\int\limits_0^t \dfrac{\dot{A}(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha(t)}}$ – производная в смысле Герасимова-Капуто дробного переменного порядка $0 < \alpha(t) < 1$.

Учитывая формулы (1)-(4) уравнение (5) можно переписать следующим образом:

$$\frac{d^{\alpha(t)}A(t)}{dt^{\alpha(t)}} = aA(t) + I(t), \tag{6}$$

где $a = \dfrac{(1-c-s_1)\,\xi}{1-s_2 k(1-\xi)}$.

Для уравнения (6) справедливо начальное условие:

$$A(0) = A_0. \tag{7}$$

Уравнение (6) и условие (7) образуют задачу Коши, которую будем исследовать.

Заметим, что в предельном случае, когда $\alpha(t) = 1$, мы получаем классическую задачу Коши для динамики малого предприятия, рассмотренную в работе [8].

Задачу Коши (6) и (7) будем решать с помощью теории конечно-разностных схем. Для этого введем равномерную сетку с шагом $h = N/T$, $N$ – количество точек расчетной сетки, $T$ – время моделирования. Производная дробного порядка в уравнении (6) аппроксимируется:

$$\frac{d^{\alpha(t)}A(t)}{dt^{\alpha(t)}} \approx w_k \sum_{j=0}^{k=1} \left(\omega_j^k \left(A_{k-j+1} - A_{k-j}\right)\right), \tag{8}$$

где $w_k = \dfrac{h^{-\alpha_k}}{\Gamma(2-\alpha_k)}$, $\omega_j^k = (j+1)^{1-\alpha_k} - j^{1-\alpha_k}$.

Учитывая соотношение (8) явную конечно-разностную схему можно записать следующим образом:

$$A_{k+1} = \frac{1}{w_k}\left[(a+w_k)A_k - w_k\sum_{j=1}^{k=1}\left(\omega_j^k\left(A_{k-j+1} - A_{k-j}\right)\right) + I_k\right], A_0 = C. \quad (9)$$

где $C$ – заданная константа.

Отметим, что схема (9) условно устойчива и имеет ограничение на шаг сетки $h$. Вопросы сходимости и устойчивости схемы (9) мы рассматривать не будем. Отметим, что при необходимости мы всегда можем уменьшить шаг сетки $h$ для сохранения нужных свойств сетки.

## Результаты моделирования

Рассмотрим некоторые примеры результатов моделирования динамики малых предприятий с учетом памяти. Будем считать, что внешние инвестиции представляют собой гармоническую функцию: $I(t) = \delta\cos(\phi t)$, которая указывает на периодичность внешних инвестиций. Возможны и другие виды функции инвестиций [8]. Для схемы (9) выберем параметры: $N = 2000, T = 100, h = T/N, A_0 = 0.1, \phi = 3$.

Пример 1. Выберем коэффициент $a = -0.2$, $\delta = 0$ при различных видах функции $\alpha(t)$.

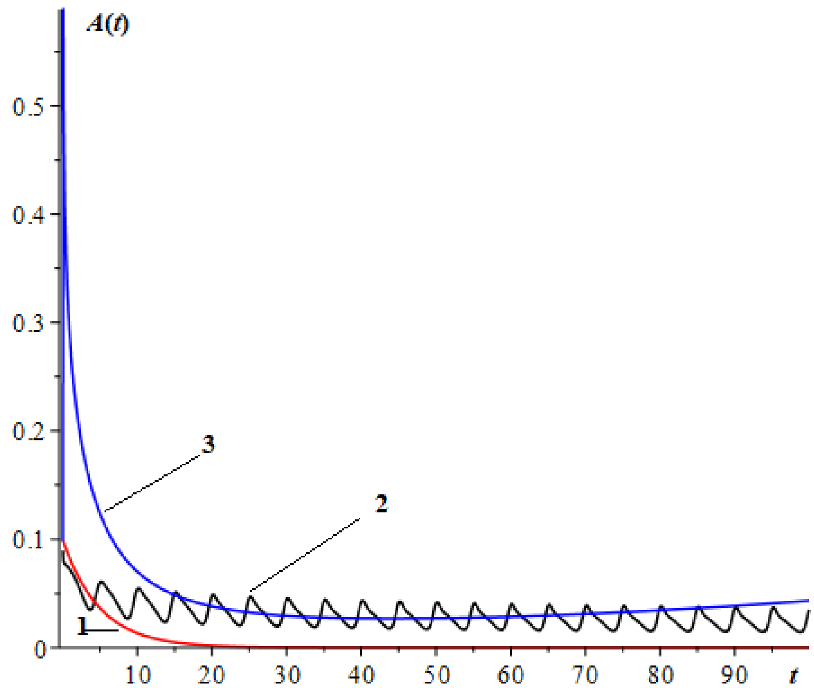


Рис. 1. Расчетные кривые динамики производственных $A(t)$, полученные по формуле (9) в зависимости от $\alpha(t)$: кривая 1 - $\alpha = 1$ (классическая модель); кривая 2 - $\alpha(t) = 0.8 - 60/T\cos(0.4\pi t)$; кривая 3 - $\alpha(t) = 0.8 - 0.5t/T$

Из рис.1 видно, что в условиях отсутствия внешних инвестиций и отрицательности коэффициента $a$ производственные фонды падают: в классическом случае ($\alpha = 2$) по экспоненте практически до нуля (кривая 1). В случаях наличия памяти, например, кривая 2 и кривая 3, также происходит падение производственных фондов. В первом случае падение происходит медленнее, чем в классическом случае, до некоторого уровня, а потом наблюдается небольшой рост производственных фондов за счет внутренних источников финансирования. Во втором случае падение производственных фондов сопровождается колебательным процессом, который генерируется памятью $\alpha(t) = 0.8 - 60/T \cos(0.4\pi t)$. Здесь мы можем также видеть, что колебания происходят относительно некоторого постоянного уровня $A(t)$, что является важным для дальнейшего развития малого предприятия. Рассмотрим пример, когда малое предприятие получает внешние инвестиции.

Пример 2. Выберем коэффициент $a = -0.2$, $\delta = 2$ при различных видах функции $\alpha(t)$.

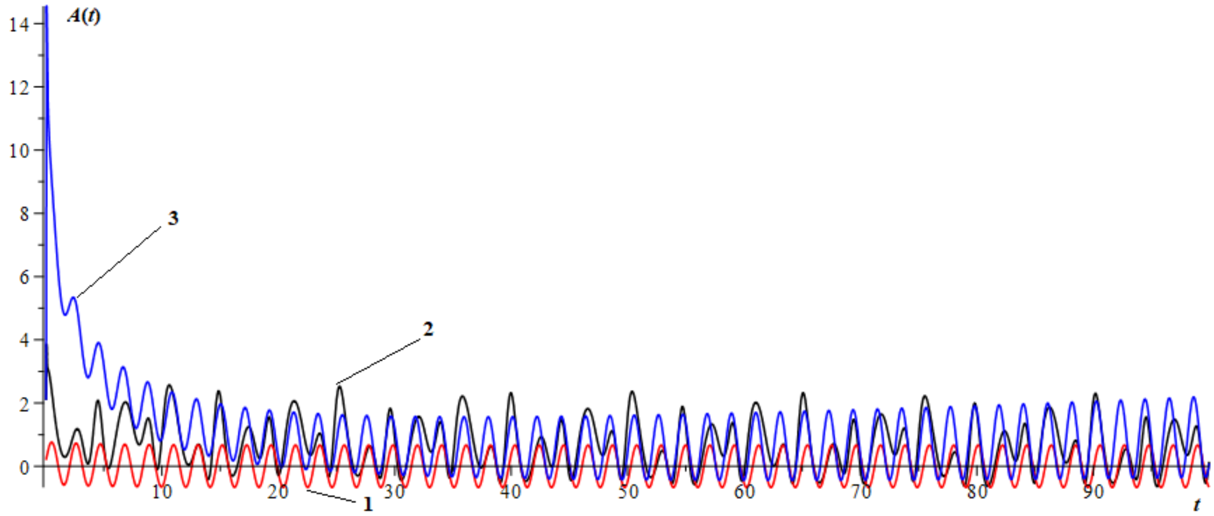


**Рис. 2.** Расчетные кривые динамики производственных $A(t)$, полученные по формуле (9) в зависимости от $\alpha(t)$: кривая 1 - $\alpha = 1$ (классическая модель); кривая 2 - $\alpha(t) = 0.8 - 60/T \cos(0.4\pi t)$; кривая 3 - $\alpha(t) = 0.8 - 0.5t/T$

На рис. 2 видно, что падение производственных фондов происходит до определенного уровня, а потом включается колебательный процесс. Для кривой 1 и кривой 3 колебания осуществляются за счет внешних инвестиций, а для кривой 2 происходит наложение двух колебательных процессов - внешних инвестиций и памяти $\alpha(t) = 0.8 - 60/T \cos(0.4\pi t)$, которое приводит к росту амплитуды колебаний.

Мы выбирали коэффициент $a$ отрицательным, теперь рассмотрим случай, когда он положительный.

Пример 3. Выберем коэффициент $a = 0.2$, $\delta = 0.2$ при различных видах функции $\alpha(t)$.

Вы видим на рис.3, что положительность параметра $a$ приводит к росту производственных фондов. В классическом случае мы видим быстрый экспоненциальный рост, в других случаях рост более медленный, причем для кривой 2 этот рост сопровождается колебаниями, а для кривой 3 рост происходит до определенного уровня, а потом мы наблюдаем спад.

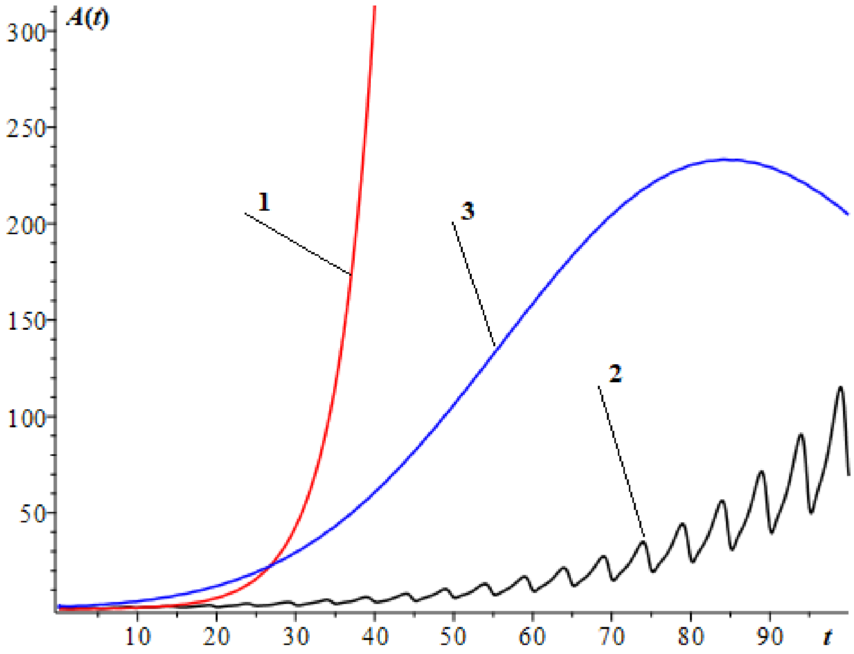


Рис. 3. Расчетные кривые динамики производственных $A(t)$, полученные по формуле (9) в зависимости от $\alpha(t)$: кривая 1 - $\alpha = 1$ (классическая модель); кривая 2 - $\alpha(t) = 0.8 - 60/T\cos(0.4\pi t)$; кривая 3 - $\alpha(t) = 0.8 - 0.5t/T$

Поэтому учет свойства экономической системы «помнить» свои состояния в предыдущие моменты времени может описывать различные механизмы развития динамики малых предприятий.

## Заключение

В работе предложена математическая модель развития динамики малых предприятий с внешними инвестициями, а также с учетом памяти. Было показано, что за рост и спад производственных фондов отвечает знак коэффициента $a$: $a > 0$ – рост, $a < 0$ – спад. Однако наличие памяти в системе приводит к медленному спаду или росту до определенного уровня. Мы рассмотрели два вида функции памяти: линейную и гармоническую. Было показано, что возможны колебательные процессы (рис. 2). Можно сделать вывод, о том, что наличие памяти дает возможность остаться малому предприятию "на плаву". Эта память может быть обусловлена разовыми финансовыми поддержками, например, грантами или государственной поддержкой для развития малого предприятия. Другая интепретация дробной производной в экономике дается в работе [4].

## Список литературы/References


[1] Gafurova E. A., Parovik R. I., "Mathematical modeling of fractal financial system in computer environment Scilab", *Russian Journal of Mathematical Research. Series A*, 2018, № 4, 23-30.

[2] Makarov D. V., Parovik R. I., "Modeling of the economic cycles using the theory of fractional calculus", *Journal of Internet Banking and Commerce*, **21**:S6 (2016).

[3] Chen W. Ch., "Nonlinear dynamic and chaos in a fractional-order financial system", *Chaos, Solitons and Fractals*, **36** (2008), 1305–1314.

[4] Tarasova V. V., Tarasov V. E., "Progress in Fractional Differentiation and Applications", *Progr. Fract. Differ. Appl.*, **3**:1 (2017), 1-6.

[5] Machado J. A. T., Lopes A. M., "Relative fractional dynamics of stock markets", *Nonlin. Dyn*, 2016, № 86(3), 1613–1619.

[6] Laskin N., "Fractional market dynamics", *Physica A*, 2000, № 287(3), 482–492.

[7] Kilbas A.A., Srivastava H. M., Trujillo J. J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[8] Егорова Н. Е., Хачатрян С. Р., Маренный М. А., "Дифференциальный анализ развития малых предприятий, использующих кредитно-инвестиционный ресурс", *Аудит и финансовый анализ*, 2000, № 4, 11. [Egorova N. E., Hachatryan S. R., Marennyj M. A., "Differencial'nyj analiz razvitiya malyh predpriyatij, ispol'zuyushchih kreditno-investicionnyj resurs [Differential analysis of the development of small enterprises using credit and investment resources]", *Audit i finansovyj analiz*, 2000, № 4, 11 (in Russian)].

## Список литературы (ГОСТ)

[1] Gafurova E.A., Parovik R.I. Mathematical modeling of fractal financial system in computer environment Scilab // Russian Journal of Mathematical Research. Series A. 2018. № 4. pp. 23-30.

[2] Makarov D.V., Parovik R.I. Modeling of the economic cycles using the theory of fractional calculus // Journal of Internet Banking and Commerce. 2016. vol. 21. no. S6.

[3] Chen W.Ch. Nonlinear dynamic and chaos in a fractional-order financial system // Chaos, Solitons and Fractals. 2008. vol. 36. pp. 1305–1314.

[4] Tarasova V. V., Tarasov V. E. Progress in Fractional Differentiation and Applications // Progr. Fract. Differ. Appl. 2017. vol. 3. no. 1. pp. 1-6.

[5] Machado J. A. T., Lopes A. M. Relative fractional dynamics of stock markets // Nonlin. Dyn. 2016. no. 86(3). pp. 1613–1619.

[6] Laskin N. Fractional market dynamics // Physica A. 2000. no. 287(3). pp. 482–492.

[7] Kilbas A.A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.

[8] Егорова Н. Е., Хачатрян С. Р., Маренный М. А. Дифференциальный анализ развития малых предприятий, использующих кредитно-инвестиционный ресурс // Аудит и финансовый анализ. 2000. №. 4. С. 11.

**Для цитирования:** Гафурова Э. А., Михайлов М. Л., Грушко Ю. В., Паровик Р. И., Кашутина И. А. Математическая модель динамики малых предприятий с учетом эффектов памяти // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2019. Т. 26. № 1. С. 46-53. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-26-1-46-53

**For citation:** Gafurova E. A., Mikhaylov M. L., Grushko Yu. V., Parovik R. I., Kashutina I. A. Mathematical model of dynamics of small enterprises with account of memory effects, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2019, **26**: 1, 46-53. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-26-1-46-53

Поступила в редакцию / Original article submitted: 06.03.2019

DOI: 10.26117/2079-6641-2019-26-1-46-53

MATHEMATICAL MODELING

MSC 37N10

# MATHEMATICAL MODEL OF DYNAMICS OF SMALL ENTERPRISES WITH ACCOUNT OF MEMORY EFFECTS

**E. A. Gafurova, M. L. Mikhaylov, Yu. V. Grushko, R. I. Parovik, I. A. Kashutina**

Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4, Russia

E-mail: romanparovik@gmail.com

The paper proposes a new mathematical model of the dynamics of small enterprises with the participation of foreign investment, which takes into account the memory effect and affects the rate of change in the value of production assets. This memory effect can be considered as a property of the economic environment, for example, the influence on the production of external factors, in which the cost of production assets will depend on its previous values. This non-local effect can be written in terms of a fractional order derivative. In this paper, we will assume that the order of the fractional derivative is a function of time. Therefore, we will solve the initial model equation using numerical methods of the theory of finite difference schemes. Further, in the work, visualization and interpretation of the calculation result was carried out.

*Key words: small enterprise dynamics, memory, model, fractional derivative*