Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 26. № 1. С. 8-17. ISSN 2079-6641

DOI: 10.26117/2079-6641-2019-26-1-8-17

МАТЕМАТИКА

УДК 519.4

ДВОЙНЫЕ СМЕЖНЫЕ КЛАССЫ В СВОБОДНОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ

А. П. Горюшкин

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032,
г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4
E-mail: as2021@mail.ru

В статье обсуждаются вопросы, связанные с разложением группы на двойные смежные классы. Для групп, разложимых в обобщенное свободное произведение, и групп со свободно дополняемыми подгруппами устанавливается связь двойного разложения с обычным разложением по подгруппе.

Ключевые слова: группа, алгоритмическая проблема, подгруппа, индекс подгруппы, индекс двойного разложения, двойной смежный класс, свободное произведение, свободная дополняемость подгрупп

MATHEMATICS

MSC 18A32

DOUBLE COSETS IN FREE PRODUCT

A. P. Goryushkin

Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4, Russia
E-mail: as2021@mail.ru

This paper deals with problems connecting with decomposition of groups into double cosets. It is established a relation between double decomposition and usual decomposition by subgroups for groups which can be decompose into a generalized free products and groups with free complementarity of subgroups.

Key words: group, algorithmic problem, subgroup, subgroup index, double decomposition index, double coset, free product, free complementarity of subgroups.

Введение

Алгоритмические проблемы комбинаторной теории групп находят практическое применение в криптографии с открытым ключом. Для криптографических приложений представляют интерес как классические проблемы Дэна (проблема слов, проблема сопряженности и проблема изоморфизма), так и алгоритмические проблемы в теории групп, тесно связанные с классическими. Такими являются проблема вхождения (обобщенная проблема равенства) и проблема индекса.

Проблема вхождения для конечно определенной группы G состоит в отыскании или доказательстве невозможности алгоритма, который по любому конечному множеству элементов $h_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ и элементу w узнавал бы, принадлежит или нет элемент w подгруппе $H = \text{гр}(h_1, h_2, \ldots, h_m)$, порожденной элементами h_i.

Проблема индекса для конечно определенной группы G состоит в отыскании алгоритма, который по любому конечному множеству элементов $h_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ группы G узнавал бы, конечный или бесконечный индекс в G имеет подгруппа $H = \text{гр}(h_1, h_2, \ldots, h_m)$, порожденная этим множеством.

Оказалось, что для некоторых классов групп эти две алгоритмические проблемы равносильны ([1]–[5]). В предлагаемой работе предлагается естественное усиление этой проблематики: вместо обычного разложения группы по подгруппе рассматривается *разложение по двойному модулю*.

Разложение группы по двойному модулю

Если G – произвольная группа и H, P – ее подгруппы, то отношение на G, заданное правилом:

$$x \equiv y \bmod (H, P) \Leftrightarrow x = hyp, \text{ где } h \in H, p \in P,$$

является эквивалентностью на G, которую называют сравнимостью по двойному модулю. Эта эквивалентность разбивает множество G на смежные классы, которые принято называть *двойными*, а разбиение группы на двойные смежные классы – *разложением G по двойному модулю* (H, P). Смежный класс с представителем x имеет вид HxP, а мощность множества $\{HxP\ x \in G\}$ двойных смежных классов в разложении группы G по двойному модулю (H, P) называют *двойным индексом* (H, P) в группе G и обозначают символом $[G : (H, P)]$. Двойной индекс является обобщением простого индекса: если E – единичная подгруппа, то $[G : (H, E)] = [G : H]$.

Двойной смежный класс HxP является объединением некоторого множества правых смежных классов Hy (или левых классов zP). Число левых смежных классов по H в классе HxP равно индексу $P \cap x^{-1}Hx$ в группе P. Число правых смежных классов по P в HxP равно индексу $P \cap x^{-1}Hx$ в подгруппе $x^{-1}Hx$.

Двойные смежные классы играют особую роль для свободных групп, свободных произведений и свободных произведений с объединением. Метод Нильсена для описания подгрупп свободной группы, теорема Куроша – описание подгрупп свободного произведения – и теорема Карраса-Солитэра о подгруппах свободного произведения с объединенной подгруппой – все эти результаты существенно опираются на понятие двойного смежного класса. С другой стороны, свойства двойных смежных классов и их представителей даже для свободных групп могут оказаться совсем нетривиальными (см., например. [6], [7]).

Проблема двойного индекса для конечно определенной группы G состоит в отыскании алгоритма, который по любым конечным множествам элементов $\{h_\alpha\}$, и $\{p_\beta\}$ группы G узнавал бы, конечен или бесконечен индекс $[G\colon (\text{гр}(h_\alpha), \text{гр}(p_\beta))]$.

В некоторых случаях между двумя индексами – двойным и «одинарным» – есть тесная связь, позволяющая решить эту проблему.

В предлагаемой работе такая связь устанавливается для групп, разложимых в свободное произведение и для двух классов, содержащих свободно разложимые группы.

Двойной индекс в свободном произведении

Покажем, что если G разложима в свободное произведение, а H – конечно порожденная подгруппа группы G, то роль единичной подгруппы в разложении по подгруппе H может играть свободный множитель. Точнее, имеет место следующее предложение.

Теорема 1. *Если $G = A * B$ и H – конечно порожденная подгруппа в G и $[G : (H, A)]$ конечен, то индекс $[G : H]$ тоже конечен.*

Доказательство.

Разложим группу G по двойному модулю (H, A),

$$G = \coprod_{i=1}^{m} Hg_iA\,,$$

т.е. $[G : (H, A)] = m$. Рассмотрим и разложение группы G по двойному модулю (H, B):

$$G = \coprod_{j=1}^{k} Hg_iB\,,$$

где $k = [G : (H, B)]$.

Число k может оказаться конечным или бесконечным (по условию теоремы конечность двойного индекса предполагалась лишь для одного свободного множителя).

Покажем, что если индекс подгруппы H в группе G бесконечен, то каждое из двух предложений: «число k – конечно» и «число k – бесконечно» приводит к противоречию.

В представлении Куроша подгруппы из свободного произведения участвуют так называемые *функции Маклейна* (С. Маклейн, [8]). Выберем в качестве представителей двойных смежных классов g_i, p_j значения маклейновских функций $s_A(HgA)$ и $s_B(HgB)$, соответственно. Положим при этом $g_1 = p_1 = 1$. По свойству маклейновских представителей все элементы $g_2, g_3, \ldots, g_m$ оканчиваются только на Bслоги, а элементы $p_2, p_3, \ldots, p_k$ оканчиваются только Aслогами.

Теперь построим полные системы представителей смежных классов для правостороннего разложения группы G по подгруппе H.

Сделаем это двумя способами. Сначала будем использовать разложение G по модулю (H, A), а потом воспользуемся разложением по модулю (H, B). Разложим группу A по подгруппе $g_i^{-1}Hg_i \cap A$. Пусть множество $\{a_{i\alpha}\}$, $i = 1,2, \ldots, m$, элементов из A является полной системой представителей этого разложения. Представителем $g_i^{-1}Hg_i \cap A$ для всех g_i будем считать единицу. Тогда множество $V = \bigcup_i \{g_i a_{i\alpha}\}$ является полной системой представителей правых смежных классов $G \bmod H$.

Аналогично, множества $\{b_{j\beta}\}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, образуют полные системы разложения группы B по $p_i^{-1}Hp_i \cap B$, причем единица принадлежит каждому из этих множеств.

Множество $W = \bigcup_{j} \{g_j a_{j\beta}\}$ также является полной системой представителей правых смежных классов $G \bmod H$.

Таким образом, мощности множеств V и W совпадают и равны $[G : H]$.

В множестве V все элементы, кроме $g_2, g_3, ..., g_m$, оканчиваются на Aслоги. Если k – конечно, то для некоторого j из $\{1,2, .., k\}$ множество $\{b_{j\beta}\}$ бесконечно и $W_1 = \{p_j b_{j\beta}\}$ – бесконечное подмножество из W, и каждый элемент из W_1оканчивается на Bслог.

Пусть $w_1, w_2, ..., w_{m-1}$ – элементы из W, сравнимые по $\bmod H$ с элементами $g_2, g_3, ..., g_m$. Тогда множество $R = W_1 \setminus \{w_1, w_2, ..., w_{m-1}\}$ состоит из представителей двухконцевых правых смежных классов по подгруппе H, так как каждый элемент v из V, сравнимый по $\bmod H$ с элементом из R, оканчивается на Aслог. Существование такого множества противоречит конечной порожденности подгруппы H (Б. Баумслаг, [9]).

Итак, число k конечным быть не может.

Пусть k – бесконечно. Подгруппа H – конечно порождена, а это значит, что лишь для конечного числа элементов p_j подгруппы $p_i^{-1} H p_i \cap B$ отличны от единичной. Следовательно, существует бесконечное множество $P \subset \{p_1, p_2, ..., p_k\}$ такое, что для каждого p_j из P пересечение $p_i^{-1} H p_i \cap B$ – единично. Но для такого p_j индекс $p_i^{-1} H p_i \cap B$ в группе B больше единицы. Поэтому для каждого p_j из P множество $\{b_{j\beta}\}$ состоит более чем из одного элемента.

Тогда множество $W_2 = \{p_j b_{j\beta} \ p_j \in P\}$ бесконечно, и все его элементы оканчиваются на Bслоги. Существование такого множества снова противоречит конечной порожденности подгруппы H. Противоречие. Теорема доказана. □

Из теоремы 1 получаем два следствия.

Следствие 1. *Если G – нетривиальное свободное произведение $A * B$, а H – конечно порожденная подгруппа в G, то двойной индекс $[G : (H, A)]$ конечен тогда и только тогда, когда конечен индекс $[G : H]$.*

Следствие 2. *Если G – нетривиальное свободное произведение $A * B$, а H – конечно порожденная подгруппа в G, то оба индекса$[G : (H, A)]$и$[G : (H, B)]$ конечны или бесконечны одновременно.*

Предложение о связи индексов $[G : H]$ и $[G : (H, A)]$ можно обобщить. Для конечно порожденной подгруппы H из $G = A * B$ в качестве второй подгруппы второй подгруппы для того, чтобы свести вычисление двойного индекса к вычислению обычного, не обязательно брать свободный множитель A. Для этой цели годится любая конечно порожденная подгруппа бесконечного индекса в G.

Теорема 2. *Пусть H и P две конечно порожденные подгруппы из нетривиального свободного произведения $G = A * B$. Если H и P обе имеют бесконечный индекс в G, то бесконечен и индекс $[G : (H, P)]$.*

Доказательство. Заметим сначала, что

$$[G : (H, P)] = [G : (H^g, P^g)]$$

для любого элемента g из G.

Далее рассмотрим два случая в зависимости от порядков множителей.

Случай 1. Один из множителей, например, A является бесконечной группой. Покажем, что тогда в группе G найдется такой элемент g, что все элементы из H^g и из P^g оканчиваются только на B слоги.

Действительно, пусть a_1, a_2 принадлежат A, и p из $P^{g\cdot}$, и h из H^g. Так как неединичные элементы из $P^{g\cdot}$ и H^gначинаются и оканчиваются на Bслоги, из равенства $a_1 p a_2^{-1} h = 1$ следует $p = h = a_1 a_2^{-1} = 1$.

Но это значит, что все элементы из A попарно несравнимы по mod $(H^g,\ P^g)$. Иначе говоря, если $a_1 \neq a_2$, то элементы a_1, a_2не сравнимы по модулю $(H^g,\ P^g)$, и поэтому из бесконечности группы A следует бесконечность индекса $[G : (H^g,\ P^g)]$.

Но это значит, что все элементы из A попарно несравнимы по mod $(H^g,\ P^g)$. Иначе говоря, если $a_1 \neq a_2$, то элементы a_1, a_2не сравнимы по модулю $(H^g,\ P^g)$, и поэтому из бесконечности группы A следует бесконечность индекса $[G : (H^g,\ P^g)]$.

Подгруппы R, Q являются конечно порожденными подгруппами бесконечного индекса в K. Поскольку K – свободная группа ранга, большего единицы, мы оказываемся в условиях случая 1, и, следовательно, индекс $(R,\ Q)$ в K бесконечен. С другой стороны, индекс R в H и индекс Q в P конечны. Рассмотрим правостороннее разложение H mod R и левостороннее разложение P mod Q: $H = \coprod_{i=1}^{m} R r_i$;

$$P = \coprod_{j=1}^{n} q Q_j .$$

Двойной смежный класс HgP является объединением конечного числа двойных смежных классов по mod $(R,\ Q)$ вида $Rr_i g q_j Q$, $i = 1,\ 2,\ \dots\ m$; $j = 1,\ 2,\ \dots,\ n$. Поэтому из конечности $[G : (H,\ P)]$ следует конечность $[G\colon (R,\ Q)]$. Но из того, что

$$[G\colon (R,\ Q)] \geq\ [K\colon (R,\ Q)],$$

а число $[K\colon (R,\ Q)]$ бесконечно, получаем бесконечность индекса $(H,\ P)$ в G. Теорема 2 доказана. □

Теорема 2 означает, что для свободных произведений проблема двойного индекса равносильна проблеме обычного индекса, которая, в свою очередь, равносильна проблеме вхождения ([1], [5]).

Таким образом, получаем следствие теоремы 2.

Теорема 3. *Для нетривиального свободного произведения проблема двойного индекса равносильна проблеме вхождения.*

Двойные смежные классы в свободном произведении с объединенной подгруппой

Свободное произведение групп является частным случаем свободного произведения с объединенной подгруппой: $A * B = A \underset{E}{*} B$.

В свободном произведении с объединенной подгруппой $G = A \underset{U}{*} B$ объединяемая подгруппа U при некоторых условиях исполняет роль единичной подгруппы, как показывает следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $G = A \underset{U}{*} B$, свободное произведение с объединенной подгруппой U, причем группа A является нетривиальным свободным произведением, отличным от группы диэдра, а U удовлетворяет условию максимальности для подгрупп. Если H – конечно порожденная подгруппа группы G, то из конечности индекса $[G : (H,\ U)]$ следует конечность индекса $[G : H]$.*

Доказательство. Докажем это утверждение методом « от противного», т. е. допустим, что $[G : (H,\ U)]$ конечен, но H имеет бесконечный индекс в G. Рассмотрим разложение группы по двойному модулю (H, A):

$$G = \coprod_{i=1}^{k} Hg_iA.$$

Число не k больше индекса $[G : (H, U)]$, и поэтому k - конечно. Число двойных смежных классов по модулю (H, U), которые содержатся в двойном смежном классе Hg_iA, равно индексу

$$\left[A : \left(g_i^{-1}Hg_i \cap A, U\right)\right].$$

Поэтому для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ числа $\left[A : \left(g_i^{-1}Hg_i \cap A, U\right)\right]$ конечны.

С другой стороны, если для всех $i = 1, 2, \ldots, k$ конечны $\left[A : g_i^{-1}Hg_i \cap A\right]$, то H имеет конечный индекс в группе G. Поэтому для некоторого i (пусть для определенности $i = 1$), подгруппа $D = g_i^{-1}Hg_i \cap A$ имеет бесконечный индекс в A. Из того, что H конечно порождена, а U удовлетворяет условию максимальности, теперь следует конечная порожденность подгруппы D.

Кроме того, U имеет бесконечный индекс в A. Действительно, в противном случае группа A как конечное расширение группы с условием максимальности, сама бы удовлетворяла условию максимальности, что неверно для свободных групп, отличных от групп диэдра.

Таким образом, D и U – две конечно порожденные подгруппы A бесконечных индексов в A. Следовательно, по теореме 2 индекс $[A : (D, U)]$ бесконечен, что противоречит конечности индекса $[G : (H, U)]$. Утверждение доказано. □

Аналогичная связь между простым и двойным индексами существует и в классе групп, более широком чем разложимые в свободное произведение.

Если G – нетривиальное свободное произведение, отличное от группы диэдра, и H – произвольная конечно порожденная подгруппа бесконечного индекса в G, то в G существует нециклическая подгруппа H_1 такая, что подгруппа, порожденная подгруппами H и H_1, является их свободным произведением (см., например, [10]). Такое свойство подгрупп принято называть *свободной дополняемостью*.

Двойные смежные классы в группах со свободно дополняемыми подгруппами

Говорит, что подгруппы бесконечной и нециклической группы G *свободно дополняемы*, если для каждой конечно порожденной подгруппы H бесконечного индекса в G существует такая подгруппа H_1 из G, что порядок H_1 больше двух, а подгруппа, порожденная подгруппами H и H_1, является их свободным произведением, $gp(H, H_1) = H * H_1$.

Теорема 5. *Пусть в группе G подгруппы свободно дополняемы, и H и P – две конечно порожденные подгруппы из G, и P удовлетворяет условию максимальности для подгрупп. Тогда если H и P имеют бесконечные индексы в группе G, то бесконечен индекс* $[G : (H, P)]$.

Доказательство. Пусть подгруппа H_1 из G, такая, что порядок H_1 больше двух, а подгруппа $\bar{H}$, порожденная подгруппами H и H_1, является их свободным произведением, $\bar{H} = gp(H, H_1) = H * H_1$.

Рассмотрим пересечение $\bar{H} \cap P = D$. Так как P удовлетворяет условию максимальности, подгруппа D – конечно порождена.

Если подгруппа D имеет бесконечный индекс в свободном произведении $\bar{H}$, то бесконечен индекс $[\bar{H}: (H, D)]$. Заметим, что для любых элементов x, y из $\bar{H}$

$$x \equiv y \bmod (H, P) \Rightarrow x \equiv y \bmod (H, D).$$

Действительно, пусть $x = hyp$ для некоторых h из H и p из P. Так как x, y, h принадлежат $\bar{H}$, получаем, что и p принадлежит $\bar{H}$, т. е. $p \in \bar{H} \cap P = D$. Следовательно, полную систему представителей разложения $\bar{H} \bmod (H, D)$ можно рассматривать как подмножество из полной системы представителей разложения $G \bmod (H, P)$, и, следовательно, индекс $[G : (H, P)]$ бесконечен.

Предположим теперь, что D имеет конечный индекс в $\bar{H}$. Найдется неединичная подгруппа P_1 из G такая, что

$$\bar{P} = gp(P, P_1) = P * P_1,$$

и, следовательно, индекс $[\bar{P}: (P, P)]$ бесконечен; тем более будет бесконечен индекс $[G : (P, P)]$, а, следовательно, бесконечен $[G : (D, P)]$.

Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_n$ – полная система представителей правых смежных классов для $\bar{H} \bmod D$. Тогда двойной смежный класс $\bar{H}gD$ содержится в объединении $\bigcup_{i=1}^{n} Dq_igP$, состоящем лишь из конечного числа двойных смежных классов по $\bmod (D, P)$.

С другой стороны, каждый смежный класс DxP лежит в смежном классе $\bar{H}xP$. Поэтому из бесконечности индекса $[G : (D, P)]$ следует бесконечность $[G : (\bar{H}, P)]$ и, тем более, бесконечность индекса (H, P) в G.

Теорема 4 означает, что в группах со свободно дополняемыми подгруппами вычисление $[G : (H, P)]$, где P удовлетворяет условию максимальности, сводится к вычислению индексов$[G : H]$ и $[G : P]$. $\Box$

Заключение

До сих пор неизвестно, является ли разрешимость проблемы индекса в свободных множителях необходимым и достаточным условием для разрешимости этой проблемы в свободном произведении. В представлении Куроша-Маклейна для подгруппы из свободного произведения участвуют представители двойных смежных классов, и поэтому более естественным представляется такую задачу сформулировать для двойного индекса.

Вопрос 1. Верно ли, что в группе $A*B$ разрешима проблема двойного индекса тогда и только тогда, когда эта проблема разрешима в группах A и B?

Приведенное в работе доказательство теоремы 5 существенно использует условие максимальности для подгруппы P. Вполне возможно, что это ограничение для второй подгруппы модуля (H, P) можно и обойти, т. е. возникает еще одна, пока решенная лишь частично решенная задача.

Вопрос 2. Верно ли, что если в группе G подгруппы свободно дополняемы, H и P – конечно порожденные подгруппы из G, то индекс $[G : (H, P)]$ бесконечен тогда и только тогда, когда $[G : H]$ и $[G : P]$. бесконечны?

Список литературы/References

[1] Горюшкин А. П., “Нахождение индекса подгруппы и проблема вхождения”, *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2016, № 1(12), 15–25. [Goryushkin A. P., “Finding of a subgroup index and the occurrence problem”, *Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences*, **12**:1 (2016), 12–20 (in Eng. transl.)].

[2] Горюшкин А. П., “Об алгоритме для вычисления индекса подгруппы в группе, разложимой в прямое произведение”, *Вестник Приамурского гос. ун-та им. Шолом-Алейхема*, 2016, № 1, 93–99. [Goryushkin A. P., “Ob algoritme dlya vychisleniya indeksa podgruppy v gruppe, razlozhimoj v pryamoe proizvedenie [On the algorithm for calculating the index of a subgroup in a group decomposable into a direct product]”, *Vestnik Priamurskogo gos. un-ta im. Sholom-Alejhema*, 2016, № 1, 93–99 (in Russia)].

[3] Горюшкин А. П., “О нахождении индекса подгруппы в прямом произведении”, *Наука, образование, инновации: пути развития*, Материалы Седьмой всероссийской научно-практической конференции, 24–26 мая 2016, КамчатГТУ, г. Петропавловск-Камчатский, 2016, 25–30. [Goryushkin A. P., “O nahozhdenii indeksa podgruppy v pryamom proizvedenii [On finding the index of a subgroup in a direct work]”, *Nauka, obrazovanie, innovacii: puti razvitiya*, Materialy Sed’moj vserossijskoj nauchno-prakticheskoj konferencii, 24–26 maya 2016, KamchatGTU, g. Petropavlovsk-Kamchatskij, 2016, 25–30 (in Russia)].

[4] Горюшкин А. П., “О нахождении индекса подгруппы в свободном произведении”, *Наука, образование, инновации: пути развития*, Материалы Седьмой всероссийской научно-практической конференции, 24–26 мая 2016, КамчатГТУ, г. Петропавловск-Камчатский, 2016, 31–35. [Goryushkin A. P., “O nahozhdenii indeksa podgruppy v svobodnom proizvedenii [On finding the index of a subgroup in a free product]”, *Nauka, obrazovanie, innovacii: puti razvitiya*, Materialy Sed’moj vserossijskoj nauchno-prakticheskoj konferencii, 24–26 maya 2016, KamchatGTU, g. Petropavlovsk-Kamchatskij, 2016, 31–35 (in Russia)].

[5] Goryushkin A., “Two Algorithmic Problems in Group Theory”, *Res. Rep Math.*, **2**:4 (2018).

[6] Frenkel E., Remeslennikov V. N., “Double cosets in free groups”, *International Journal of Algebra and Computation*, **23**:5 (2013), 1225–1241.

[7] Gitik R., Rips E., *On double cosets in free groups*, arXiv.org, 2013.

[8] MacLane S., “A proof of the subgroup theorem for free products”, *Mathematika*, **5** (1958), 13-19.

[9] Baumslag B., “Free groups and free products – some aping theorems”, *Comm. pure a. Appl. Math. 1967*, **20**:4, 635–645.

[10] Горюшкин А. П., *Амальгамированные свободные произведения групп*, Издательский дом Дальневост. федерал. ун-та, Владивосток, 2012, 158 с. [Goryushkin A. P., *Amal’gamirovannye svobodnye proizvedeniya grupp [Amalgamated free works of groups]*, Izdatel’skij dom Dal’nevost. federal. un-ta, Vladivostok, 2012, 158 pp.]

Список литературы (ГОСТ)

[1] Горюшкин А.П. Нахождение индекса подгруппы и проблема вхождения // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2016. №1(12) С. 15–25.

[2] Горюшкин А.П. Об алгоритме для вычисления индекса подгруппы в группе, разложимой в прямое произведение // Вестник Приамурского гос. ун-та им. Шолом-Алейхема. 2016. №1. С. 93–99.

[3] Горюшкин А.П. О нахождении индекса подгруппы в прямом произведении // Наука, образование, инновации: пути развития, Материалы Седьмой всероссийской научно-практической конференции, 24–26 мая 2016 г. Петропавловск-Камчатский, КамчатГТУ. 2016. С. 25–30.

[4] Горюшкин А.П. О нахождении индекса подгруппы в свободном произведении // Наука, образование, инновации: пути развития, Материалы Седьмой всероссийской научно-практической конференции, 24–26 мая 2016 г. Петропавловск-Камчатский, КамчатГТУ. 2016. С. 31–35.

[5] Goryushkin A. Two Algorithmic Problems in Group Theory // Res. Rep Math. 2018. 2:4

[6] Frenkel E., Remeslennikov V. N. Double cosets in free groups // International Journal of Algebra and Computation. 2013. vol. 23. no. 5. P.1225–1241.

[7] Gitik R., Rips E. On double cosets in free groups // arXiv.org, 2013.

[8] MacLane S. A proof of the subgroup theorem for free products // Mathematika. 1958. vol. 5. P. 13-19.

[9] Baumslag B. Free groups and free products – some aping theorems // Comm. pure a. Appl. Math. 1967. vol. 20. № 4. P. 635–645.

[10] Горюшкин А.П. Амальгамированные свободные произведения групп. Владивосток: Издательский дом Дальневост. федерал. ун-та, 2012. 158 с.

Для цитирования: Горюшкин А. П. Двойные смежные классы в свободном произведении // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2019. Т. 26. № 1. С. 8-17. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-26-1-8-17

For citation: Goryushkin A. P. Double cosets in free product, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2019, **26**: 1, 8-17. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-26-1-8-17

Поступила в редакцию / Original article submitted: 15.02.2019

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 26. № 1. С. 18-28. ISSN 2079-6641

DOI: 10.26117/2079-6641-2019-26-1-18-28

MSC 43A22, 16W20

HYPER-TAUBERIAN ALGEBRAS DEFINED BY A BANACH ALGEBRA HOMOMORPHISM

A. Ebadian[1], A. Jabbari[2]

[1] Department of Mathematics, Urmia University, Iran
[2] Young Researchers and Elite Club, Ardabil Branch, Islamic Azad University, Ardabil, Iran

E-mail: jabbarial@yahoo.com, ali.jabbari@iauardabil.ac.ir

Let A and B be Banach algebras and $T : B \longrightarrow A$ be a continuous homomorphism. We consider left multipliers from $A \times_T B$ into its the first dual i.e., $A^* \times B^*$ and we show that $A \times_T B$ is a hyper-Tauberian algebra if and only if A and B are hyper-Tauberian algebras.

Keywords: Local operator, hyper-Tauberian algebra, Tauberian algebra

УДК 519.53

ГИПЕРТАУБЕРОВЫ АЛГЕБРЫ, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ГОМОМОРФИЗМОМ БАНАХОВОЙ АЛГЕБРЫ

А. Ебадиан[1], А. Жаббари[2]

[1] Математический факультет, Университет Урмия, Иран и Клуб молодых исследователей и элит, Ардебильский филиал
[2] Исламский университет Азад, Ардебиль, Иран

E-mail: jabbarial@yahoo.com, ali.jabbari@iauardabil.ac.ir

Пусть A и B – банаховы алгебры, а $T : B \longrightarrow A$ – непрерывный гомоморфизм. Мы рассматриваем левые мультипликаторы из $A \times_T B$ в его первое двойственное, т.е. $A^* \times B^*$, и показываем, что $A \times_T B$ является гипертауберовой алгеброй тогда и только тогда, когда A и B являются гипертауберовыми алгебрами.

Ключевые слова: локальный оператор, гипертауберова алгебра, тауберова алгебра.