УДК 515.12 https://doi.org/10.33619/2414-2948/41/03

(O-C)-КОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ФУНКТОР ГИПЕРПРОСТРАНСТВ

©Жумаев Д. И., *ORCID: 0000-0001-5387-3639,*
Ташкентский архитектурно-строительный институт,
г. Ташкент, Узбекистан, d-a-v-ron@mail.ru

(O-C)-COMPACT SPACES AND HYPERSPACES FUNCTOR

©Jumaev D., *ORCID: 0000-0001-5387-3639,*
Tashkent Institute of Architecture and Civil Engineering,
Tashkent, Uzbekistan, d-a-v-ron@mail.ru

Аннотация. В работе установлено, что пространство всех непустых компактных подмножеств тихоновского пространства *(O-C)*–компактно тогда и только тогда, когда заданное тихоновское пространство *(O-C)*–компактно. А также для отображения $f{:}X\to Y$ доказано, что отображение $exp_\beta X\to Y$ является *(O-C)*–компактным в том и только в том случае, когда f является *(O-C)*–компактным.

Abstract. In the work, it is established that the space of all nonempty compact subsets of a Tychonoff space is *(O-C)*–compact if and only if the give Tychonoff space is *(O-C)*–compact. Further, for a map $f{:}X\to Y$ the map $exp_\beta X\to Y$ is *(O-C)*–compact if and only if the map f is *(O-C)*–compact.

Ключевые слова: *(O-C)*-компактное пространство, гиперпространство, *(O-C)*-отображение.

Keywords: *(O-C)*-compact space, hyperspace, *(O-C)*-map.

Введение

В работе под пространством подразумевается топологическое T_1 — пространство, под компактом — хаусдорфово компактное пространство.

Система ω подмножеств множества X называется [1] звездно счетной (конечной), если каждый элемент системы ω пересекается не более со счетным (конечным) числом элементов этой системы. Система подмножеств множества X дизъюнктна, если каждая пара элементов этой системы дизъюнктна. Система ω подмножеств множества X вписана в системе Ω подмножеств множества X, если для каждого элемента $A\in\Omega$ существует элемент $B\in\omega$ такой, что $B\subset A$. Если для каждой точки x множества X найдется элемент системы ω, содержащий точку x, то система ω называется покрытием множества X.

Покрытие пространства X называется открытым (замкнутым, открыто–замкнутым), если все его элементы — открытые (соответственно, замкнутые, открыто–замкнутые) подмножества пространства X. Для системы $\omega=\{O_\alpha : a\in A\}$ подмножеств пространства X полагаем $[\omega]=[\omega]_X=\{[O_\alpha]_X : a\in A\}$.

Напомним, что подмножество A пространства X называется [2–3] $(O\text{-}C)$-конечным в X, если для любой дизъюнктной системы открыто-замкнутых в X и покрывающих A множеств лишь конечное число этой системы пересекает A. Пространство X назовем $(O\text{-}C)$-конечным в

X, если оно $(O\text{-}C)$-конечно в себе (то есть из любого его дизъюнктного открыто-замкнутого покрытия можно выделить конечное подпокрытие).

Примерами $(O\text{-}C)$-конечных пространств являются псевдокомпактные (в частности, счетно компактные и компактные), а также связные пространства.

Подмножество A пространства X называется [2–3] $(O\text{-}C)$-компактным в X, если из любого покрытия множества A открыто-замкнутыми в X множествами можно выделить конечное подпокрытие. Пространство X $(O\text{-}C)$-компактно, если оно $(O\text{-}C)$-компактно в себе (то есть из любого его открыто-замкнутого покрытия можно выделить конечное подпокрытие). Отметим, что класс $(O\text{-}C)$-компактных пространств исследовался А. П. Шостаком [4] под названием скученных, а фактически условие $(O\text{-}C)$-компактности впервые выделено В. И. Пономаревым [5].

Очевидно, любое $(O\text{-}C)$-компактное подмножество пространства X является $(O\text{-}C)$-конечным в X и любое $(O\text{-}C)$-компактное пространство $(O\text{-}C)$-конечно. Примером $(O\text{-}C)$-конечного пространства, не являющегося $(O\text{-}C)$-компактным пространством является пространство $T(\omega_1)$ всех порядковых чисел, меньших первого несчетного порядкового числа ω_1. Так как $T(\omega_1)$ счетно компактно, то произвольное его дизъюнктное открыто-замкнутое покрытие конечно. Следовательно, оно $(O\text{-}C)$-конечно. В то же время, из покрытия $\upsilon = \{[0,\ \alpha]: \alpha < \omega_1\}$ пространства $T(\omega_1)$, состоящего из открыто-замкнутых в $T(\omega_1)$ множеств, нельзя выделить конечное подпокрытие. Значит, $T(\omega_1)$ не является $(O\text{-}C)$-компактным. Однако, для П-полного (в частности, суперпаракомпактного хаусдорфово) пространства классы компактных пространств, $(O\text{-}C)$-компактных пространств и $(O\text{-}C)$-конечных пространств совпадают [3]. Определения понятий П-полного и суперпаракомпактного пространств можно найти в работах [2–3, 7–8].

Автору не удалось найти следующие утверждения, доказательства которых сразу вытекает из определений.

Предложение 1. Каждое подмножество:

1) $(O\text{-}C)$-конечного пространства $(O\text{-}C)$-конечно;

2) $(O\text{-}C)$-компактного пространства $(O\text{-}C)$-компактно.

Известно [2–3], что подмножество A тихоновского пространства X $(O\text{-}C)$-конечно в X в том и только в том случае, если A $(O\text{-}C)$-конечно в βX. Аналогично, A $(O\text{-}C)$-компактно в X тогда и только только тогда, когда A $(O\text{-}C)$-компактно в βX. Автором получено усиленные варианты этих утверждений.

Предложение 2. Подмножество A тихоновского пространства X:

1) $(O\text{-}C)$-конечно в X в том и только в том случае, если A $(O\text{-}C)$-конечно в некотором совершенном компактном расширении bX;

2) $(O\text{-}C)$-компактно в X тогда и только только тогда, когда A $(O\text{-}C)$-компактно в некотором совершенном компактном расширении bX.

Напомним понятие совершенного компактного расширения пространства. Для топологического пространства X и его подмножества A множество $Fr_X A = [A]_X \cap [X \backslash A]_X = [A]_X \backslash Int_X A$ означает границу множества A. А также используют записи FrA, $[A]$, и $IntA$. Пусть υX — некоторое компактное расширение вполне регулярного пространства X. Если $H \subset X$ — открытое в X множество, то через $O(H)$ (или через $O_{\upsilon X}(H)$) обозначается максимальное открытое в υX множество, для которого $O_{\upsilon X}(H) \cap X = H$. Легко видеть, что

 Т. 5. №4. 2019
DOI: 10.33619/2414-2948/41

$$O_{vX}(H)=\bigcup_{\substack{\Gamma\in\tau_{vX},\\ \Gamma\cap X=H}}\Gamma,$$

где τ_{vX} — топология пространства vX.

Компактное расширение vX вполне регулярного пространства X называется совершенным относительно открытого в X множества H, если имеет место равенство $[Fr_X H]_{vX}=Fr_{vX}O_{vX}(X)$. Если же vX совершенно относительно любого открытого в X множества, то оно называется совершенным компактным расширением пространства [1, с. 249]. Компактное расширение vX пространства X тогда и только тогда совершенно, когда для любых двух непересекающихся открытых в X множеств U_1 и U_2 выполнено равенство $O(U_1\cup U_2)=O(U_1)\cup O(U_2)$ [1, с. 253]. Компактификация βX Стоуна–Чеха пространства X совершенна [1, с. 253]. Для компактного расширения vX равенство $O(U_1\cup U_2)=O(U_1)\cup O(U_2)$ выполнено для любых двух открытых в X множеств U_1 и U_2 в том и только в том случае, когда пространство X нормально, а компактификация vX совпадает с компактификацией Стоуна–Чеха βX , т. е. $vX=\beta X$ [1, с. 253–254].

2. (O-C)-компактные пространства и функтор гиперпространства

Множество всех непустых замкнутых подмножеств топологического пространства X обозначим $\exp X$. Для подмножеств $U_1,\dots,U_n\subset X$ положим

$$O\langle U_1,\dots,U_n\rangle=\{F: F\in\exp X, F\subset\bigcup_{i=1}^n U_n, F\cap U_1\neq\varnothing,\dots,F\cap U_n\neq\emptyset\}=$$
$$=\{F: F\in\exp X, F\subset\bigcup_{i=1}^n U_n\}\cap\bigcap_{i=1}^n\{F: F\in\exp X, F\cap U_i\neq\emptyset\}.$$

Если множества $U_1,\dots,U_n$ открыты, то по определению топологии Вьеториса множества

$$\{F: F\in\exp X, F\subset\bigcup_{i=1}^n U_n\}=\exp(\bigcup_{i=1}^n U_i, X),$$
$$\{F: F\in\exp X, F\cap U_i\neq\emptyset\}=\exp X\setminus\exp(X\setminus U_i, X),$$

открыты в пространстве замкнутых подмножеств. Поэтому открытым является множество $O\langle U_1,\dots,U_n\rangle$. С другой стороны, такой вид имеют и элементы предбазы топологии Вьеториса: $\exp(U,X)=O\langle U\rangle$, $\exp X\setminus\exp(X\setminus U,X)=O\langle U,X\rangle$. Таким образом, семейство всех множеств вида $O\langle U_1,\dots,U_n\rangle$, где множества $U_1,\dots,U_n$ открыты в пространстве X, является базой топологии Вьеториса. Полученное топологическое пространство $\exp X$ называется гиперпространством пространства X. Для компакта X гиперпространство $\exp X$ является компактом. Пусть $f: X\to Y$ — непрерывное отображение компактов, $F\in\exp X$.

Положим

$$(\exp f)(F)=f(F).\tag{1}$$

Этим равенством определено отображение $\exp f:\exp X\to\exp Y$. Это отображение непрерывно. В самом деле, это вытекает из непосредственно проверяемой формулы

$$(\exp f)^{-1}O\langle U_1,\dots,U_m\rangle=O\langle f^{-1}(U_1),\dots,f^{-1}(U_m)\rangle.\tag{2}$$

Отметим, что если $f: X\to Y$ — эпиморфизм, то $\exp f$ также является эпиморфизмом.

Для тихоновского пространства X введем обозначение $\exp_\beta X=\{F\in\exp\beta X: F\subset X\}$.

Т. 5. №4. 2019
DOI: 10.33619/2414-2948/41

Ясно, что $\exp_{\beta}X \subset \exp X$. Рассмотрим $\exp_{\beta}X$ как подпространство пространства $\exp X$, т. е. множества вида $O\langle U_1, \dots, U_n\rangle = \{F: F \in \exp X, F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_n, F \cap U_1 \neq \varnothing, \dots, F \cap U_n \neq \emptyset\}$ образуют базу топологии в $\exp_{\beta}X$. Для тихоновского пространства X пространство $\exp_{\beta}X$ является тихоновским пространством относительно топологии Виеториса.

Для непрерывного отображения $f: X \to Y$ тихоновских пространств положим $\exp_{\beta}f = \exp\beta f|_{\exp_{\beta}X}$, где $\beta f: \beta X \to \beta Y$ — продолжение Стоуна–Чеха отображения f (оно единственно).

Известно, что для тихоновского пространства X множество $\exp_{\beta}X$ всюду плотно в $\exp\beta X$, т. е. $\exp\beta X$ является компактификацией пространства $\exp_{\beta}X$. Мы заявляем, что компактификация $\exp\beta X$ совершенна. Данный результат изложен в работах [7–8]. Для полноты работы изложим его доказательство. Сначала докажем следующее техническое утверждение.

Лемма 1. Для произвольного компактного расширения γX пространства X, произвольной дизъюнктной пары открытых в γX множеств V, W справедливо равенство $[X \backslash V^X]_{\gamma X} \cap [X \backslash W^X]_{\gamma X} = [X \backslash (V^X \cup W^X)]_{\gamma X}$, где $V^X = X \cap V$ и $W^X = X \cap W$.

Доказательство. Ясно, что $[X \backslash V^X]_{\gamma X} \cap [X \backslash W^X]_{\gamma X} \supset [X \backslash (V^X \cup W^X)]_{\gamma X}$. Пусть $x \in [X \backslash V^X]_{\gamma X} \cap [X \backslash W^X]_{\gamma X}$. Тогда произвольная открытая в γX окрестность Ox точки x пересекается с множествами $X \backslash V^X$ и $X \backslash W^X$. Отсюда, поскольку справедливо равенство $V^X \cap W^X = \emptyset$, следует, что $Ox \cap (X \backslash V^X) \cap (X \backslash W^X) \neq \emptyset$, т. е. $Ox \cap (X \backslash (V^X \cup W^X)) \neq \emptyset$. Значит, в силу произвольности окрестности Ox, заключаем, что $x \in [X \backslash (V^X \cup W^X)]_{\gamma X}$. Лемма 1 доказана.

Теорема 1. Для тихоновского пространства X компакт $\exp\beta X$ является совершенной компактификацией пространства $\exp_{\beta}X$.

Доказательство. Достаточно рассматривать предбазисные открытые множества. Пусть U_1 и U_2 — непересекающиеся открытые в X множества. Тогда в силу совершенности компактификации βX имеем $O_{\beta X}(U_1 \cup U_2) = O_{\beta X}(U_1) \cup O_{\beta X}(U_2)$. Рассмотрим множества $O\langle U_i\rangle = \{F: F \in \exp_b X, F \subset U_i\}, i = 1,2$, открытые в $\exp_{\beta}X$. Ясно, что $O\langle U_1\rangle \cap O\langle U_2\rangle = \emptyset$. Покажем, что $O_{\exp\beta X}(O\langle U_1\rangle \cap O\langle U_2\rangle) = O_{\exp\beta X}(O\langle U_1\rangle) \cup O_{\exp\beta X}(O\langle U_2\rangle)$. Включение $\supset$ вытекает из построения [1, с. 234]. Поэтому достаточно показать обратное включение. Пусть $\Phi \subset \beta X$ — замкнутое множество такое, что $\Phi \notin O_{\exp\beta X}(O\langle U_1\rangle) \cup O_{\exp\beta X}(O\langle U_2\rangle)$. Тогда $\Phi \in \exp\beta X \backslash O_{\exp\beta X}(O\langle U_i\rangle)$, $i = 1,\ 2$. Отметим, что имеют место следующие равенства [1, с. 253–254] $\exp\beta X \backslash O_{\exp\beta X}(O\langle U_i\rangle) = [\exp_{\beta}X \backslash O\langle U_i\rangle]_{\exp\beta X}, i = 1,2$. Откуда $\Phi \in [\exp_{\beta}X \backslash O\langle U_i\rangle]_{\exp\beta X}$, $i = 1,\ 2$. Далее, так как $O\langle U_1\rangle \cap O\langle U_2\rangle = \emptyset$, то в силу леммы 1 имеем

$$[\exp_{\beta}X \backslash O\langle U_1\rangle]_{\exp\beta X} \cap [\exp_{\beta}X \backslash O\langle U_2\rangle]_{\exp\beta X} = [\exp_{\beta}X \backslash O(\langle U_1\rangle \cup O\langle U_2\rangle)]_{\exp\beta X}.$$

Следовательно, $\Phi \in [\exp_{\beta}X \backslash O_{\exp\beta X}(O\langle U_1\rangle \cup O\langle U_2\rangle)]_{\exp\beta X}$, что равносильно $\Phi \in \exp\beta X \backslash O_{\exp\beta X}(\langle U_1\rangle \cup \langle U_2\rangle)$ [1, с. 253-254], т. е. $\Phi \notin O_{\exp\beta X}(\langle U_1\rangle \cup \langle U_2\rangle)$.Таким образом, нами установлено, что включение $O_{\exp\beta X}(\langle U_1\rangle \cup \langle U_2\rangle) \subset O_{\exp\beta X}(O\langle U_1\rangle) \cup O_{\exp\beta X}(O\langle U_2\rangle)$ также справедливо. Теорема 1 доказана.

Пусть $U_1,\ \dots,\ U_n;\ V_1,\ \dots,\ V_m$ — открытые подмножества пространства X.

Лемма 2. Соотношение $O\langle U_1,\ \dots,\ U_n\rangle \cap O\langle V_1,\ \dots,\ V_m\rangle \neq \emptyset$ справедливо тогда и только тогда, когда для каждого $i \in \{1,\ \dots, n\}$ и для каждого $j \in \{1,\ \dots, m\}$ существуют, соответственно, $j(i) \in \{1,\ \dots, m\}$ и $i(j) \in \{1,\ \dots, n\}$, такие, что выполнено соответственно, $U_i \cap V_{j(i)} \neq \emptyset$ и $V_j \cap U_{i(j)} \neq \emptyset$.

Т. 5. №4. 2019
DOI: 10.33619/2414-2948/41

Доказательство. Предположим, для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ существует $j(i) \in \{1, \ldots, m\}$, такой, что $U_i \cap V_{j(i)} \neq \emptyset$ и для каждого $j \in \{1, \ldots, m\}$ существует $i(j) \in \{1, \ldots, n\}$ такой, что $U_{i(j)} \cap V_j \neq \emptyset$. Для каждой пары $(i, j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$, для которой $U_i \cap V_j \neq \emptyset$, выберем по точке $x_{ij} \in U_i \cap V_j$ и составим замкнутое множество F, состоящее из этих точек. Тогда $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ и $F \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_j$. Кроме того, $F \cap U_i \neq \emptyset$, $i = 1, \ldots, n$, и $F \cap V_j \neq \emptyset$, $j = 1, \ldots, m$. Поэтому $F \in O\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap O\langle V_1, \ldots, V_m\rangle$.

Предположим, $U_{i_0} \cap V_j = \emptyset$ для некоторого $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ и для всех $j \in \{1, \ldots, m\}$. Тогда $U_{i_0} \cap \bigcup_{j=1}^{m} V_j = \emptyset$ и для каждого $F \in O\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ имеем $F \not\subset \bigcup_{j=1}^{m} V_j$, следовательно, $F \notin O\langle V_1, \ldots, V_m\rangle$. Аналогично, каждое $\Gamma \in O\langle V_1, \ldots, V_m\rangle$ содержится в $\bigcup_{j=1}^{m} V_j$ и не пересекается с U_{i_0}, следовательно, $\Gamma \notin O\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$. Откуда $O\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap O\langle V_1, \ldots, V_m\rangle = \emptyset$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Если υ — дизъюнктное открытое покрытие пространства X, то семейство $\exp_\beta \upsilon = \{O\langle U_1, \ldots, U_n\rangle : U_i \in \upsilon,\ i = 1, \ldots, n;\ n \in \mathbb{N}\}$ — дизъюнктное открытое покрытие пространства $\exp_\beta X$.

Доказательство. В силу дизъюнктности из леммы 2 вытекает, что $O\langle G_1, \ldots, G_k\rangle \cap O\langle U_1, \ldots, U_l\rangle \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $k = l$ и для каждого $i \in \{1, \ldots, k\}$ равенство $G_i = U_j$ справедливо только для единственного $j \in \{1, \ldots, l\}$. Иными словами, $O\langle G_1, \ldots, G_k\rangle \cap O\langle U_1, \ldots, U_l\rangle \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\{U_1, \ldots, U_l\} = \{U_1, \ldots, U_l\}$. Откуда $\exp_\beta \upsilon = \{O\langle U_1, \ldots, U_n\rangle : U_i \in \upsilon,\ i = 1, \ldots, n;\ n \in \mathbb{N}\}$ дизъюнктно. Из построения топологии топологии Виеториса вытекает открыто-замкнутость покрытия $\exp_\beta \upsilon$. Лемма 3 доказана.

В силу теоремы 3.3 [6, с. 90] имеем

$$[O\langle G_1, \ldots, G_k\rangle]_{\exp X} = O\langle [G_1]_X, \ldots, [G_k]_X\rangle,$$
$$Int_{\exp X} O\langle G_1, \ldots, G_k\rangle = O\langle Int_X G_1, \ldots, Int_X G_k\rangle.$$

Эти равенства в частности означают, если $G_1, \ldots, G_k$ — открыто-замкнутые множества в X, то $O\langle G_1, \ldots, G_k\rangle$ открыто-замкнуто в $\exp_\beta X$. Отсюда из леммы 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Для тихоновского пространства X его гиперпространство $\exp_\beta X$ является $(O\text{-}C)$-конечным тогда и только тогда, когда X $(O\text{-}C)$-конечно.

Установим аналогичный результат для $(O\text{-}C)$-компактного случая.

Теорема 2. Для тихоновского пространства X его гиперпространство $\exp_\beta X$ является $(O\text{-}C)$-компактным тогда и только тогда, когда X $(O\text{-}C)$-компактно.

Доказательство. Согласно предложению 1 $(O\text{-}C)$-компактность пространства $\exp_\beta X$ влечет $(O\text{-}C)$-компактность замкнутого подпространства $X \subset \exp_\beta X$.

Пусть X $(O\text{-}C)$-компактно. Если Ω — произвольное открыто-замкнутое покрытие пространства $\exp_\beta X$, то для каждого элемента $G \in \Omega$ существует такое $O_G\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$, что $O_G\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \subset G$, где $U_1, \ldots, U_n$ — открыто-замкнутые в X множества. Составим семейство $\gamma = \{O_G\langle U_1, \ldots, U_n\rangle :\ G \in \Omega\}$ так, чтобы оно покрывало $\exp_\beta X$. Семейство $\{O_G\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap \exp_1 X :\ G \in \Omega\}$ является открыто-замкнутым покрытием пространства $X \cong \exp_1 X = \{\{x\} :\ x \in X\}$. Из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие υ пространства X. Тогда из леммы 3 следует, что семейство $\exp_\beta \upsilon = \{O\langle V_1, \ldots, V_k\rangle :\ V_i \in \upsilon,\ i = 1, \ldots, n;\ n \in$

Т. 5. №4. 2019
DOI: 10.33619/2414-2948/41

$\mathbb{N}\}$ является конечным открыто-замкнутым покрытием пространства $\exp_\beta X$, выделенным из покрытия γ. Для каждого $O\langle V_1,\ldots, V_k\rangle \in \omega$ выберем по одному $G_{O\langle V_1,\ldots,V_k\rangle} \in \Omega$ так, чтобы $O\langle V_1,\ldots, V_k\rangle \subset G_{O\langle V_1,\ldots,V_k\rangle}$ и составим семейство $\omega = \{G_{O\langle V_1,\ldots,V_k\rangle}: O\langle V_1,\ldots, V_k\rangle \in \exp_\beta \upsilon\}$. Тогда ω является конечным покрытием, выделенным из Ω. Теорема 2 доказана.

3. $(O\text{-}C)$-отображения и функтор гиперпространств

Для непрерывного отображения $f:(X,\ \tau_X) \to (Y,\ \tau_Y)$ и $O \in \tau$ прообраз $f^{-1}O$ называется трубкой (над O).

Отображение $f: X \to Y$ пространств называется [2-4]:

1) $(O\text{-}C)$-отображением, если образ любого открыто-замкнутого в X множества открыто-замкнут в Y;

2) $(O\text{-}C)$-совершенным, если оно есть $(O\text{-}C)$-отображение, и для каждой точки $y \in Y$ прообраз $f^{-1}(y)$ является $(O\text{-}C)$-компактным в X.

3) $(O\text{-}C)$-конечным в точках пространства Y, если для любой точки $y\epsilon Y$ существует окрестность V точки y такая, что $f^{-1}V$ является $(O\text{-}C)$-конечным в X;

4) $(O\text{-}C)$-компактным в точках пространства Y, если для любой точки $y\epsilon Y$ существует окрестность V точки y такая, что $f^{-1}V$ является $(O\text{-}C)$-компактным в X;

5) трубчато $(O\text{-}C)$-конечным в точках пространства Y, если для любого дизъюнктного открытого покрытия ω пространства X и для любой точки $y\epsilon Y$ существует окрестность V точки y такая, что из ω можно выбрать конечное подпокрытие трубки $f^{-1}V$;

6) трубчато $(O\text{-}C)$-компактным в точках пространства Y, если для любого открыто-замкнутого покрытия ω пространства X и для любой точки $y\epsilon Y$ существует окрестность V точки y такая, что из ω можно выбрать конечное подпокрытие трубки $f^{-1}V$.

Каждое $(O\text{-}C)$-конечное ($(O\text{-}C)$-компактное) в точках пространства Y отображение является трубчато $(O\text{-}C)$-конечным (соответственно, $(O\text{-}C)$-компактным) в точках пространства Y отображением (иными словами, имеет место 3) ⇒ 5), (соответственно, 4) ⇒ 6)). Обратно, $(O\text{-}C)$-конечное ($(O\text{-}C)$-компактное) в точках пространства Y $(O\text{-}C)$-отображение является трубчато $(O\text{-}C)$-конечным (соответственно, трубчато $(O\text{-}C)$-компактным) в точках пространства Y отображением (иными словами, имеет место 1) + 5) ⇒ 3), (соответственно, 1) + 6) ⇒ 4)).

Очевидно, каждое $(O\text{-}C)$-совершенное отображение является $(O\text{-}C)$-отображением. Отображение произвольного бесконечного дискретного пространства в одноточечное пространство является $(O\text{-}C)$-, но не $(O\text{-}C)$-совершенным отображением.

Отображение $\varphi: [0, 2\pi) \longrightarrow S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}$, определенное равенством $\varphi(t) = (\cos t\ ,\ \sin t)$ дает пример $(O\text{-}C)$-, но не трубчато $(O\text{-}C)$-отображения [3, пример 3.3.1].

Следующие утверждения являются основными результатами раздела.

Теорема 3. Отображение $\exp_\beta f: \exp_\beta X \to \exp_\beta Y$ является $(O\text{-}C)$-компактным тогда и только тогда, когда отображение $f: X \to Y$ $(O\text{-}C)$-компактно.

Теорема 4. Отображение $\exp_\beta f: \exp_\beta X \to \exp_\beta Y$ трубчато $(O\text{-}C)$-компактно в точках пространства $\exp_\beta X$ тогда и только тогда, когда отображение $f\colon X \to Y$ трубчато $(O\text{-}C)$-компактно в точках пространства X.

Ограничимся доказательством первого утверждения.

Т. 5. №4. 2019
DOI: 10.33619/2414-2948/41

Доказательство теоремы 3. Пусть $f: X \to Y$ — $(O\text{-}C)$-компактное отображение. Рассмотрим произвольную точку $F \in \exp_\beta Y$. Пусть V_y — открытая окрестность точки $y \in F$ такая, что $f^{-1}(V_y)$ $(O\text{-}C)$-компактно. Из покрытия $\{V_y: y \in F\}$ можно выделить конечное подпокрытие $\{V_{y_i}: y_i \in F,\ i = 1, \dots, k\}$, $k \in N$. Имеем $F \in O\langle V_{y_1}, \dots, V_{y_k}\rangle$. Из равенства

$$\left(\exp_\beta f\right)^{-1}\left(O\langle V_{y_1}, \dots, V_{y_k}\rangle\right) = O\langle f^{-1}(V_{y_1}), \dots, f^{-1}(V_{y_k})\rangle$$

вытекает $(O\text{-}C)$-компактность прообраза окрестности $O\langle V_{y_1}, \dots, V_{y_k}\rangle$ точки $F \in \exp_\beta Y$. Обратное утверждение вытекает из предложения 1. Теорема 3 доказана.

Автор выражает глубокую благодарность своему наставнику, доктору физико-математических наук Адилбеку Атахановичу Заитову за обсуждение данной работы и неоценимую поддержку.

Список литературы:

1. Архангельский А. В., Пономарев В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974. 424 с.
2. Мусаев Д. К., Пасынков Б. А. О свойствах компактности и полноты топологических пространств и непрерывных отображений. Ташкент: Фан, 1994. 124 с.
3. Мусаев Д. К. О свойствах типа компактности и полноты пространств и отображений. Ташкент: NisoPoligraf, 2011. 216 с.
4. Šostak A. On a class of topological spaces containing all bicompact and all connected spaces // General topology and its relations to modern analysis and algebra. 1977. IV. P. 445-451.
5. Пономарев В. И. О звездно-конечных покрытиях и открыто-замкнутых множествах // ДАН СССР. 1969. Т. 186. №5. С. 1016-1019.
6. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988. 252 с.
7. Zaitov A. A., Jumaev D. I. Hyperspace of the П-complete spaces and maps // Eurasian Mathematical Journal (Submitted) 2019.
8. Zaitov A. A., Jumaev D. I. Hyperspaces of superparacompact spaces and continuous maps. // Universal Journal of Mathematics and Applications. 2019. (Submitted).

References:

1. Arkhangelskii, A. V., & Ponomarev, V. I. (1974). Osnovy obshchei topologii v zadachakh i uprazhneniyakh. Moscow, Nauka, 424. (in Russian).
2. Musayev, D. K., & Pasynkov, B. A. (1994). On compactness and completeness properties of topological spaces and continuous maps Tashkent, Fan, 124. (in Russian).
3. Musayev, D. K. (2011). On compactness and completeness properties of topological spaces and continuous maps. Tashkent, NisoPoligraf, 216. (in Russian).
4. Šostak, A. (1977). On a class of topological spaces containing all bicompact and all connected spaces. *General topology and its relations to modern analysis and algebra, IV*, 445-451.
5. Ponomarev, V. I. (1969). Star-finite coverings and open-closed sets. *Dokl. Akad. Nauk SSSR, 186*(5), 1016-1019. (in Russian).
6. Fedorchuk, V. V., & Filippov, V. V. (2006). General Topology. Basic Constructions Moscow. Fizmatlit. (in Russian).
7. Zaitov, A. A., & Jumaev, D. I. (2019). Hyperspace of the П-complete spaces and maps. Eurasian Mathematical Journal, (Submitted).

8. Zaitov, A. A., & Jumaev, D. I. (2019). Hyperspaces of superparacompact spaces and continuous maps. *Universal Journal of Mathematics and Applications,* (Submitted).

Работа поступила в редакцию 23.03.2019 г.

Принята к публикации 27.03.2019 г.

Ссылка для цитирования:

Жумаев Д. И. (*O-C*)-компактные пространства и функтор гиперпространств // Бюллетень науки и практики. 2019. Т. 5. №4. С. 30-37. https://doi.org/10.33619/2414-2948/41/03.

Cite as (APA):

Jumaev, D. (2019). (*O-C*)-compact Spaces and Hyperspaces Functor. *Bulletin of Science and Practice, 5*(4), 30-37. https://doi.org/10.33619/2414-2948/41/03. (in Russian).