УДК 515.12 https://doi.org/10.33619/2414-2948/41/02

О ФУНКТОРЕ I_f ИДЕМПОТЕНТНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

©*Ишметов А. Я.*, *Ташкентский архитектурно-строительный институт, г. Ташкент, Узбекистан, ishmetov_azadbek@mail.ru*

FUNCTOR I_f OF IDEMPOTENT PROBABILITY MEASURES

©*Ishmetov A.*, *Tashkent Institute of Architecture and Civil Engineering, Tashkent, Uzbekistan, ishmetov_azadbek@mail.ru*

Аннотация. В работе доказано, что функтор I_f идемпотентных вероятностных мер, действующий в категории компактов и их непрерывных отображений является нормальным функтором.

Abstract. In the present paper, we proof the functor I_f of idempotent probability measures acting in the category of Hausdorff compact spaces and their continuous maps is normal.

Ключевые слова: идемпотентная мера, категория, нормальный функтор.

Keywords: idempotent measure, category, normal functor.

Введение

В работе [1] Е. Щепиным введено понятие нормального функтора в категории $Comp$ компактов и их непрерывных отображений. А. Ч. Чигогидзе в работе [2] предложил конструкцию продолжения нормального функтора $F:Comp \to Comp$ до функтора $F_\beta:Tych \to Tych$, действующего в более широкой категории $Tych$ тихоновских пространств и их непрерывных отображений с сохранением нормальности. В работе [3] исследовано категорные свойства функтора $I:Comp \to Comp$ идемпотентных вероятностных мер. В настоящей работе рассмотрим функтор $I_f:Comp \to Comp$, который является подфунктором функтора I идемпотентных вероятностных.

Пусть X — компакт, $C(X)$ — алгебра всех непрерывных функций, определенных на X, с обычными поточечными алгебраическими операциями и $\sup$-нормой. Следуя [3], вводим следующие операции:

1) $\odot: R \times C(X) \to C(X)$ по правилу $\odot(\lambda,\varphi)=\lambda\odot\varphi=\varphi+\lambda_X$, где $\varphi\in C(X)$ и λ_X — постоянная на X функция, принимающая везде значение $\lambda\in R$;

2) $\oplus: C(X)\times C(X)\to C(X)$ по правилу $\oplus(\varphi,\psi)=\varphi\oplus\psi=\max\{\varphi,\psi\}$, где $\varphi,\psi\in C(X)$.

Определение 1 [3].

Функционал $\mu: C(X)\to R$ называется идемпотентной вероятностной мерой, если он обладает следующими свойствами:

(i) $\mu(\lambda_X)=\lambda$ для всех $\lambda\in R$, где λ_X — постоянная функция;

(ii) $\mu(\lambda\odot\varphi)=\lambda\odot\mu(\varphi)$ для всех $\lambda\in R$ и $\varphi\in C(X)$;

(iii) $\mu(\varphi\oplus\psi)=\mu(\varphi)\oplus\mu(\psi)$ для всех $\varphi,\psi\in C(X)$.

Число $\mu(\varphi)$ называется интегралом Маслова соответствующим к μ. Множество всех идемпотентных вероятностных мер на X обозначается [3] через $I(X)$. Всякая идемпотентная вероятностная мера является непрерывной [4]. Следовательно, $I(X)\subset C_p(C(X))\subset R^{C(X)}$. Обеспечим $I(X)$ с индуцированной из $R^{C(X)}$ топологией. Базу окрестностей идемпотентной меры $\mu\in I(X)$ относительно этой топологии образуют множества вида

$$\langle\mu;\varphi_1,...,\varphi_k;\varepsilon\rangle=\left\{\mu'\in I(X):\left|\mu'(\varphi_i)-\mu(\varphi_i)\right|<\varepsilon, i=1,...,k\right\},$$

где $\varphi_1,...,\varphi_k\in C(X)$ и $\varepsilon>0$.

Из результатов работы [3] вытекает, что для всякого компакта X пространство $I(X)$ также является компактом. Пусть $f:X\to Y$ — непрерывное отображение компактов. Тогда естественным образом определяется отображение $I(f):I(X)\to I(Y)$:

$$I(f)(\mu)(\varphi)=\mu(\varphi\circ f) \tag{1}$$

6

Для идемпотентной вероятностной меры $\mu\in I(X)$ определен ее носитель:

$$\operatorname{supp}\mu=\bigcap\left\{F:F \text{ замкнуто в } X \text{ и } \mu\in I(F)\right\}.$$

Для положительного целого числа n определим следующее множество

$$I_n(X)=\left\{\mu\in I(X):\left|\operatorname{supp}\mu\right|\le n\right\}.$$

Положим

$$I_\omega(X)=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n(X)\cdot$$

Множество $I_\omega(X)$ всюду плотно [3] в $I(X)$. Идемпотентную вероятностную меру $\mu\in I_\omega(X)$ называют идемпотентной вероятностной мерой с конечным носителем. Функционал $\delta_x:C(X)\to R$, определенный по формуле $\delta_x(\varphi)=\varphi(x)$, $\varphi\in C(X)$, называется мерой Дирака. Мера Дирака δ_x является идемпотентной вероятностной мерой с конечным носителем, причем $\operatorname{supp}\delta_x=\{x\}$.

Введем подмножество $I_f(X)$ компакта $I(X)$ идемпотентных вероятностных мер. Для компакта X множество $I_f(X)$ состоит из мер, носители которых конечны, причем если носитель меры μ состоит из n точек $x_1,x_2,...,x_n$, то $\max$-plus-барицентрическая масса лишь одной из этих точек равна нулю, все остальные массы не больше $-\ln(n+1)$ [4]. По определению

$$I_f(X)=\Big\{\mu=\bigoplus_{i=1}^{n}\lambda_i\square\,\delta_{x_i}\in I_\omega(X):\text{ равенство } \lambda_{i_0}=0 \text{ выполняется только}$$
$$\text{для единственого индекса } i_0 \text{ и } \lambda_i\le-\ln(n+1) \text{ для всех } i\in\{1,...,n\}\setminus\{i_0\}\Big\}.$$

Т. 5. №4. 2019
DOI: 10.33619/2414-2948/41

Пусть $C=\{O,M\}$ и $C'=\{O',M'\}$ — две категории. Отображение $F:C\to C'$, переводящие объекты в объекты, а морфизмы в морфизмы, называется ковариантным функтором из категории C в категории C', если:

F1) для всякого морфизма $f:X\to Y$ из категории C морфизм $F(f)$ действует из $F(X)$ в $F(Y)$;

F2) $F(id_X)=id_{F(X)}$ для всякого $X\in O$;

F3) $F(f\circ g)=F(f)\circ F(g)$ для любых морфизмов f и g из M.

Определение 2 [1].

Ковариантный функтор $F:Comp\to Comp$ называется нормальным, если он удовлетворяет следующим условиям: функтор F непрерывен, сохраняет вес, пересечения, прообразы, мономорфен и эпиморфен, переводит пустое множество в пустое, а одноточечное — в одноточечное.

Установим, что конструкция I_f взятия множества $I_f(X)$ образует нормальный функтор в категории компактов. Этот функтор интересен тем, что он является функтором с конечным носителем, и не имеет конечной степени.

Нормальность функтора I_f идемпотентных вероятностных мер

Предложение 1. Для компакта X пространство $I_f(X)$ также является компактом.

Доказательство. Как уже мы отметили, для компакта X пространство $I(X)$ также является компактом. По построению $I_f(f)$ замкнуто в $I(X)$. Так как каждое замкнутое подмножество компакта есть компакт, то $I_f(X)$ — компакт. Предложение 1 доказано.

Для непрерывного отображения $f:X\to Y$ компактов отображение $I_f(f):I_f(X)\to I_f(Y)$ определим как сужение: $I_f(f)=I(f)|_{I_f(X)}$. Имеем $I_f(f)(I_f(X))\subset I_f(Y)$. Действительно, $\mu\in I_f(X)$ и $\varphi\in C(Y)$. Тогда

$$I(f)(\mu)(\varphi)=\mu(\varphi\circ f)=(\text{так как supp}\mu\subset X)=\mu\left((\varphi\circ f)|_X\right)=I(f)(\mu)\left(\varphi|_{f(X)}\right),$$

где $\varphi\in C(Y)$. Следовательно, $I_f(f)(\mu)$ сосредоточена на $f(X)\subset Y$. Откуда вытекает требуемое включение.

Предложение 2. Отображения $I_f(f)$ непрерывно.

Доказательство. В работе [4] показано, что отображение $I(f):I(X)\to I(Y)$ непрерывно. Так как сужение непрерывного отображение непрерывно, то $I_f(f)$ также непрерывно по определению. Предложение 2 доказано.

Предложение 3. Конструкция I_f является ковариантным функтором в категории компактов и их непрерывных отображений.

Доказательство. Из определения вытекает, что I_f удовлетворяет условию F1). Покажем, что I_f сохраняет композицию отображений. Пусть X, Y, Z — компакты и $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ — непрерывные отображения. Пусть $\mu \in I_f(X)$ и $\varphi \in C(Z)$.

Тогда

$$I_f(g \circ f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ (g \circ f)) = \mu((\varphi \circ g) \circ f) = I_f(f)(\mu)(\varphi \circ g) = (I_f(g) \circ I_f(f)(\mu))(\varphi).$$

т. е. $I_f(g \circ f) = I_f(g) \circ I_f(f)$. Пусть $id_X: X \to X$ — тождественное отображение, т.е. $id_X(x) = x$ для всех $x \in X$. Тогда

$$I_f(id_X)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ id_X) = \mu(\varphi),$$

т. е. $I_f(id_X) = id_{I_f(X)}$. Предложение 3 доказано.

Предложение 4. Функтор I_f сохраняет вес бесконечных компактов, т. е. для любого бесконечного компакта X имеет место равенство $w(I_f(X)) = w(X)$.

Доказательство. Ясно, что отображение $\delta: X \to I_f(X)$, определенное по формуле $\delta(x) = \delta_x$, $x \in X$, есть вложение компакта $X \cong \delta(X) = \{\delta_x : x \in X\} = \{0 \odot \delta_x : x \in X\}$ в $I_f(X)$. На самом деле, $\delta_x \in I_f(X)$, так как $\delta_x = 0 \odot \delta_x \oplus \bigoplus_{y \in X \setminus \{x\}} (-\infty) \odot \delta_y$. Поэтому $w(X) \le w(I_f(X))$.

Из предложения 12 [3] имеем $w(I(X)) = w(X)$. Но, $I_f(X) \subset I(X)$, поэтому $w(I_f(X)) \le w(I(X))$, т. е. $w(I_f(X)) \le w(X)$. Предложение 4 доказано.

Предложение 5. I_f — мономорфный функтор, т. е. сохраняет инъективность отображений компактов.

Доказательство. Пусть $\mu_1 \ne \mu_2$, $\mu_1, \mu_2 \in I_f(X)$. В силу инъективности отображения f существует функция $\varphi \in C(Y)$, такая, что $\mu_1(\varphi \circ f) \ne \mu_2(\varphi \circ f)$. Поэтому $I_f(\mu_1)(\varphi) = (\varphi \circ f) \ne \mu_2(\varphi \circ f) = I_f(\mu_2)(\varphi)$, т. е. $I_f(f)(\mu_1) \ne I_f(f)(\mu_2)$. Предложение 5 доказано.

Предложение 6. Пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение «на». Тогда $I_f(f): I_f(X) \to I_f(Y)$ — также непрерывное отображение «на».

Доказательство. Непрерывность показано в предложении 2. Сюръективность отображения вытекает из следующего соотношения.

$$I_f(f)(\delta_x) = \delta_y \text{ тогда и только тогда, когда } f(x) = y.$$

Поэтому равенство $f(X) = Y$ влечет $I_f(f)(\delta(X)) = \delta(Y)$. Предложение 6 доказано.

Предложение 7. Функтор $I_f: Comp \to Comp$ сохраняет

a) точку,
b) пустое множество.

Доказательство. Пусть $x \in X$. В предложении 4 отмечено, что $\delta_x \in I_f(X)$. Для любой точки $y \in X$, $y \neq x$, имеем $\operatorname{supp}\delta_y = \{y\}$. Поэтому $\delta_y \notin I_f(\{x\})$. Следовательно, $I_f(\{x\}) = \{\delta_x\}$.

b) Пусть $X = \varnothing$. Тогда $C(X) = \varnothing$. следовательно,

$$C_p(C(X)) = C_p(\varnothing) = \varnothing$$

Из того, что $I_f(X) \subset C_p(C(X))$ получим, что $I_f(\varnothing) \subset C_p(\varnothing) = \varnothing$, т. е. $I_f(\varnothing) = \varnothing$. Предложение 7 доказано.

Предложение 8. Если A — замкнутое подмножество компакта X, то $I_f(A) \subset I_f(X)$. Более того, $I_f(A) = \{\mu \in I_f(X) : \operatorname{supp}\mu \subset A\}$.

Доказательство вытекает из определения носителя.

Предложение 9. Если $f : X \to Y$ — непрерывное отображение между компактами и $B \subset Y$, то $I_f(f^{-1}(B)) = I_f(f^{-1})(I_f(B))$.

Доказательство. Пусть $\mu \in I_f(f^{-1}(B))$. Согласно предложению 8 это означает, что $\mu \in I(X)$ и $\operatorname{supp}\mu \subset f^{-1}(B)$. Следовательно, $f(\operatorname{supp}\mu) \subset B$ или, что то же самое, $f(\operatorname{supp}\mu) \subset B$. Поэтому из предложения 8 имеем $\operatorname{supp} I_f(f)(\mu) \subset B$. Следовательно, $I_f(f)(\mu) \in I_f(B)$. Наоборот, пусть $\mu \in I_f(f)^{-1}(I_f(B))$. Тогда $I_f(f)(\mu) \in I_f(B)$, т. е. $\operatorname{supp} I_f(X)(\mu) \subset B$. Следовательно, согласно предложению 8 имеем $f(\operatorname{supp}\mu) \subset B$. Это означает, что $\operatorname{supp}\mu \subset f^{-1}(B)$, откуда $\mu \in I_f(f^{-1}(B))$. Предложение 9 доказано.

Пусть $\{X_\alpha, p_\alpha^\beta, A\}$ — обратный спектр, индексированный элементами множества A и состоящий из компактов. Через $\lim X_\alpha$ обозначим предел этого спектра, а через $p_\alpha : \lim X_\alpha \to X_\alpha$, $\alpha \in A$ — предельные проекции. Обратный спектр $\{X_\alpha, p_\alpha^{\alpha'}, A\}$ порождает обратный спектр $\{I_f(X_\alpha), I_f(p_\alpha^{\alpha'}), A\}$, предел которого обозначим через $\lim I_f(X_\alpha)$ а предельные проекции через $pr_\alpha : \lim I_f(X_\alpha) \to I_f(X_\alpha)$. Отображения $I_f(p_\alpha) : I_f(\lim X_\alpha) \to I_f(X_\alpha)$, $\alpha \in A$, порождают отображение $R_f : I_f(\lim X_\alpha) \to \lim I_f(X_\alpha)$.

Предложение 10. Отображение $R_f : I_f(\lim X_\alpha) \to \lim I_f(X_\alpha)$ является гомеоморфизмом.

Доказательство. Так как сужения гомеоморфизма есть гомеоморфизм, то отображение R_f — гомеоморфизм, поскольку отображение $R : I(\lim X_\alpha) \to \lim I(X_\alpha)$ является гомеоморфизмом и имеет место $R_f = R|_{I_f(\lim X_\alpha)}$. Предложение 10 доказано.

Предложение 11. Функтор I_f сохраняет пересечение, т. е. для любой пары *A*, *B* замкнутых подмножеств компакта *X* имеет место

$$I_f(A \cap B) = I_f(A) \cap I_f(B).$$

Доказательство. Ясно, что включение $I_f(A \cap B) \subset I_f(A) \cap I_f(B)$ справедливо. Если $\mu \in I_f(A) \cap I_f(B)$, то $\operatorname{supp}\mu \subset A$ и $\operatorname{supp}\mu \subset B$, следовательно, $\operatorname{supp}\mu \subset A \cap B$. Откуда

$\mu \in I_f(A \cap B)$, т. е. $I_f(A \cap B) \supset I_f(A) \cap I_f(B)$. Предложение 11 доказано.

Таким образом, доказано следующий основной результат работы.

Теорема 1. Функтор I_f*:Comp→Comp* является нормальным функтором.

Список литературы:

1. Щепин Е. В. Функторы и несчетные степени компактов // Успехи математических наук. 1981. Т. 36. №3 (219). С. 1-71. https://doi.org/10.1070/RM1981v036n03ABEH004247.

2. Чигогидзе А. Ч. О продолжении нормальных функторов // Вестник МГУ. Сер. мат.-мех. 1984. №6. С. 23-26.

3. Zarichnyi M. Idempotent probability measures, I. // arXiv preprint math/0608754. 2006. 22 p.

4. Заитов А. А., Ишметов А. Я. Гомотопические свойства пространства $I_f(X)$ идемпотентных вероятностных мер // Математические заметки (Принято к печати).

References:

1. Shchepin, E. V. (1981). Functors and uncountable powers of compacta. *Russian Mathematical Surveys, 36*(3) 1-71. https://doi.org/10.1070/RM1981v036n03ABEH004247.

2. Chigogidze, A. Ch. (1984). On extensions of normal functors. *Vestnik MGU. Ser. Mat.-Mex.,* (6), 23-26 (in Russian).

3. Zarichnyi, M. (2006). Idempotent probability measures, I. *arXiv preprint math/0608754,* 22.

4. Zaitov, A. A., & Ishmetov, A. Ya. Homotopic properties of the space $I_f(X)$ of idempotent probability measures. *Mathematical notes* (accepted).

Работа поступила в редакцию 26.02.2019 г.

Принята к публикации 03.03.2019 г.

Ссылка для цитирования:

Ишметов А. Я. О функторе I_f идемпотентных вероятностных мер // Бюллетень науки и практики. 2019. Т. 5. №4. С. 24-29. https://doi.org/10.33619/2414-2948/41/02.

Cite as (APA):

Ishmetov, A. (2019). Functor I_f of Idempotent Probability Measures. *Bulletin of Science and Practice, 5*(4), 24-29. https://doi.org/10.33619/2414-2948/41/02. (in Russian).