Исследование динамики кубита во внешнем поле лазера

Д.М. Васильев[1], *В.В. Семин*[1]
[1] *Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443086, Россия, Самарская область, г. Самара, Московское шоссе, д. 34*

Аннотация

В работе исследуется динамика кубита во внешнем лазерном поле в случае немарковского окружения, описываемого процессом Орнштейна–Уленбека. Для квантовой системы построено нелинейное немарковское стохастическое уравнение Шрёдингера, для которого гарантируется положительная определенность и сохранение нормировки матрицы плотности. Путём численного решения уравнения изучаются вероятности обнаружить систему в возбуждённом состоянии и влияние параметров немарковского шума на эту вероятность.

Ключевые слова: стохастическое уравнение Шрёдингера, немарковская динамика, кубит.

Цитирование: **Васильев, Д.М.** Исследование динамики кубита во внешнем поле лазера/ Д.М. Васильев, В.В. Семин // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43, № 4. – С. 562-566. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-4-562-566.

Введение

Теория открытых квантовых систем описывает поведение квантовой системы, взаимодействующей с внешней средой. Окружающая среда реагирует на изменения состояния системы не мгновенно, вследствие чего возникает эффект памяти. В большинстве случаев взаимодействие системы и окружающей среды достаточно слабое, поэтому эффектом памяти можно пренебречь, и, следовательно, динамику таких систем можно описать в марковском приближении [1].

В современных исследованиях встречается всё больше квантовых систем, которые не могут быть описаны посредством стандартных методов. В таких системах эффекты памяти могут играть значительную роль и динамика будет существенно немарковской. К подобным системам можно отнести микромеханические резонаторы [2], квантовые точки [3, 4], сверхпроводящие кубиты [5], источники одиночных фотонов, необходимые для квантовой коммуникации [6].

На сегодняшний день не существует общей теории немарковской динамики квантовых систем. Попытки обобщения марковского уравнения на немарковский случай приводят к появлению нефизических эффектов в решении, таких как отрицательные или большие единицы вероятности [1]. Таким вероятностям сложно придать разумный физический смысл. Альтернативой подхода на основе кинетического уравнения является подход, основанный на стохастическом уравнении Шрёдингера (СУШ) [7], который гарантированно ведёт к физическому результату для вероятностей.

Ранее в [8] рассматривалось влияние немарковской обратной связи на динамику двухуровневого атома во внешнем лазерном поле. В данной статье рассмотрена модель кубита в лазерном поле в немарковском окружении, которое описывается процессом Орнштейна–Уленбека и влияние его параметров на динамику модели. Целью статьи является выявления влияния немарковости окружения на динамику кубита.

Статья построена следующим образом: в первом параграфе строится нелинейное СУШ для немарковского случая, в параграфе два мы адаптируем нелинейное СУШ для случая кубита во внешнем шумящем лазерном поле, в третьем параграфе обсуждаются результаты численного моделирования, и заключение содержит выводы.

1. Стохастическое уравнение Шрёдингера

В качестве мощного инструмента для описания динамики открытых квантовых систем часто используется стохастическое уравнение Шрёдингера [7], которое для диффузионного случая имеет вид:

$$\mathrm{d}\psi(t) = K(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t + \sum_j L_j(t)\psi(t\_)\,\mathrm{d}W_j(t)\,, \qquad (1)$$

где $W_j(t)$ – стандартные винеровские процессы, независимые для разных j, $L_j(t)$ – некоторые операторы, описывающие квантовые переходы под действием шума, $K(t)$ – некоторый оператор, описывающий регулярную составляющую релаксации. Для возможности придать членам данного уравнения физический смысл необходимо, чтобы квадрат нормы волновой функции $\|\psi(t)\| = \sqrt{\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle}$ сохранял своё значение в среднем $\mathbb{E}[\|\psi(t)\|^2]=1$, т.е. необходимо, чтобы норма была мартингалом [7]. Данное требование налагает ограничение на структуру оператора $K(t)$:

$$K(t) = -iH(t) - \frac{1}{2}\sum_j L_j^{\dagger}(t)L_j(t)\,, \qquad (2)$$

где $H(t)$ – эрмитов оператор, гамильтониан системы. Известно [1], что марковское СУШ (1) всегда соответствует некоторому марковскому кинетическому уравнению. Для обобщения марковского СУШ на немарковский случай в работе [8] было предложено заменить винеровский белый шум на более общий немарковский процесс. Полученное таким образом уравнение позволяет описывать случайную динамику системы в немарковском приближении.

При замене винеровского процесса более общим процессом Орнштейна–Уленбека, задаваемым уравнением:

$$\mathrm{d}X_j(t) = -k_j X_j(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_j(t),\quad k_j \geq 0, \qquad (3)$$

уравнение (1) примет вид:

$$\mathrm{d}\psi(t) = K(t)\psi(t_-)\,\mathrm{d}t + \sum_j L_j(t)\psi(t_-)\,\mathrm{d}X_j(t)\,, \tag{4}$$

которое можно переписать:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\psi(t) &= \left(K(t) - \sum_j k_j L_j(t) X_j(t)\right)\psi(t_-)\,\mathrm{d}t + \\ &+ \sum_j L_j(t)\psi(t_-)\,\mathrm{d}W_j(t)\,.\end{aligned} \tag{5}$$

Условие сохранения свойств мартингала в таком случае эквивалентно следующему условию:

$$\begin{aligned}&K(t) + K^\dagger(t) - \sum_j k_j X_j(t)\left(L_j(t) + L_j^\dagger(t)\right) + \\ &+ \sum_j L_j^\dagger(t) L_j(t) = 0,\end{aligned} \tag{6}$$

которое должно выполняться для произвольного момента времени.

Для того чтобы условие (6) выполнялась гарантированно для любых t, необходимо, чтобы член с $X_j(t)$ был равен нулю. Для этого можно потребовать либо антиэрмитовость оператора $L_j(t)$, либо представить оператор $K(t)$ в виде:

$$K(t) = -iH(t) + \sum_j k_j X_j(t) L_j^\dagger(t) - \frac{1}{2}\sum_j L_j^\dagger(t) L_j(t). \tag{7}$$

Чтобы придать физической смысл прибавке в виде суммы $\sum_j k_j X_j(t) L_j^\dagger(t)$, можно провести замену операторов $L_j(t)$ на $iL_j(t)$, не меняющую средних значений наблюдаемых, тогда немарковское СУШ принимает вид:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\psi(t) &= \left(-i\hat{H}(t) + \frac{1}{2}\sum_j L_j^\dagger(t) L_j(t)\right)\psi(t_-)\,\mathrm{d}t + \\ &+ i\sum_j L_j(t)\psi(t_-)\,\mathrm{d}W_j(t),\end{aligned} \tag{8}$$

где $\hat{H}(t)$ – гамильтониан, модифицированный дополнительным внешним полем, скоррелированным с окружающей средой:

$$\hat{H}(t) = H(t) + \sum_j k_j\left(L_j(t) + L_j^\dagger(t)\right) X_j(t)\,. \tag{9}$$

Уравнение (8) со случайным гамильтонианом (9) представляет собой линейное СУШ для немарковского случая, гарантированно сохраняющее среднее значение нормы волновой функции.

<u>Переход к нелинейному уравнению</u>

С точки зрения численного моделирования линейное стохастическое уравнение Шрёдингера является неудобным из-за огромной дисперсии стохастических траекторий. Данная проблема решается заменой волновой функции $\psi(t)$, удовлетворяющей уравнению (8), на нормированную волновую функцию $\tilde{\psi}(t) = \psi(t)/\left\|\psi(t)\right\|$ и построением уравнения для последней. Новое уравнение называется нелинейным стохастическим уравнением Шредингера [7] и имеет вид

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tilde{\psi}(t) &= \tilde{K}(t)\tilde{\psi}(t_-)\,\mathrm{d}t + \\ &+ \sum_j\left(iL_j(t) - \frac{1}{2}m_j(t)\right)\tilde{\psi}(t_-)\,\mathrm{d}\tilde{W}_j(t),\end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{K}(t) &= -i\hat{H}(t) - \\ &- \frac{1}{2}\sum_j\left(L_j^\dagger(t) - \frac{i}{2}m_j(t)\right)L_j(t) - \frac{1}{8}\sum_j m_j^2(t),\end{aligned} \tag{11}$$

$$m_j(t) = i\left\langle\psi(t)\left|L_j(t) - L_j^\dagger(t)\right|\psi(t)\right\rangle. \tag{12}$$

Случайный процесс $\tilde{X}_j(t)$ в новом пространстве будет иметь вид:

$$\mathrm{d}\tilde{X}_j(t) = -k_j X_j(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}\tilde{W}_j(t) + m_j(t)\,\mathrm{d}t, \tag{13}$$

где винеровский процесс $\tilde{W}_j(t)$ имеет вид:

$$\mathrm{d}\tilde{W}_j(t) = \mathrm{d}W_j(t) - m_j(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{14}$$

Преобразование (14) носит название преобразования Гирсанова вероятностных мер [9]. Может быть показано, что новый процесс $\tilde{W}_j(t)$ является броуновским движением относительно новой вероятностной меры.

Уравнение (10) является эквивалентным линейному уравнению (8) в том смысле, что средние значения, построенные с помощью решений обоих уравнений, совпадают [7].

2. Кубит во внешнем поле

Рассмотрим кубит, помещённый в шумящее лазерное поле. Кубит представляет собой двухуровневую систему, гамильтониан которой во внешнем лазерном поле имеет вид:

$$H(t) = H_0 + H_f(t)\,, \tag{15}$$

здесь

$$\begin{aligned}H_0 &= \frac{\nu_0}{2}\sigma_z\,, \\ H_f(t) &= \bar{f}(t)\sigma_- + f(t)\sigma_+\,,\end{aligned} \tag{16}$$

где ν_0 – частота перехода атома, σ_+, σ_-, σ_z – матрицы Паули, $f(t)$ – внешнее поле, которое можно описать формулой:

$$f(t) = \frac{\Omega_R}{2}e^{-i\left(\nu t + k_0 B_0(t)\right)}\,, \tag{17}$$

где Ω_R – частота Раби, ν – частота лазера, $B_0(t)$ – стохастический процесс Винера, представляющий собственный шум лазера и k_0 положительный параметр.

Единственный оператор при инкременте случайного процесса в уравнении (8) для данной модели будет иметь вид:

$$L(t) = \sqrt{\gamma}\sigma_-\,, \tag{18}$$

где $\gamma \geq 0$ – скорость релаксации кубита.

3. Результаты моделирования

Численное моделирование осуществлялось с помощью библиотеки NumPy языка Python 3.6.5. Использовалась схема Рунге–Кутта четвёртого порядка, адаптированная для СУШ [1], которая для уравнения

$$\mathrm{d}\psi(t) = A(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t + B(t)\psi(t)\,\mathrm{d}W(t)$$

будет иметь вид:

$$\psi_{k+1} = \psi_k + \frac{1}{6}\left(\psi_k^1 + 2\psi_k^2 + 2\psi_k^3 + \psi_k^4\right)\Delta t + \\ + B(t_k)\psi_k \Delta W_k, \tag{19}$$

$$\psi_k^1 = A(t_k)\psi_k, \tag{20}$$

$$\psi_k^2 = A(t_k + \frac{1}{2}\Delta t)\left(\psi_k + \frac{1}{2}\Delta t \psi_k^1\right), \tag{21}$$

$$\psi_k^3 = A(t_k + \frac{1}{2}\Delta t)\left(\psi_k + \frac{1}{2}\Delta t \psi_k^2\right), \tag{22}$$

$$\psi_k^4 = A(t_k + \Delta t)\left(\psi_k + \Delta t \psi_k^3\right). \tag{23}$$

Решением уравнения является волновая функция кубита. Среднее значение произвольного оператора находится с помощью стохастического усреднения по формуле

$$\left\langle A(t)\right\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i}^{N} \psi_i^*(t) A \psi_i(t), \tag{24}$$

$\psi_i(t)$ – реализация случайной траектории.

Стандартная ошибка моделирования определяется по формуле:

$$\sigma(t) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}\left(\psi_i^*(t)A^2\psi_i(t) - \left\langle A\right\rangle^2\right)}. \tag{25}$$

Вероятность нахождения его в возбуждённом состоянии определяется средним значением следующего оператора:

$$\rho_{11}(\mathrm{t}) = \left\langle \sigma_+ \sigma_- \right\rangle. \tag{26}$$

На рис. 1 изображены вероятности обнаружить кубит в возбужденном состоянии для марковского случая (сплошная линия) и для немарковского случая с параметрами шума $k=1$ (штриховая линия) и $k=2$ (пунктирная линия). Результат для марковского случая получен из решения кинетического уравнения, которое можно найти в [1], для немарковского случая проводилось усреднение по 10000 траекторий. Ошибка не отмечена на графиках, поскольку не превышает толщины линии графика. Значения параметров ν_0, ν, Ω_R указаны в единицах параметра γ.

Как можно видеть, стационарные состояния для $k=1$ и $k=2$ отличаются от марковского случая на величину 0,05 и 0,1 соответственно, что показывает, насколько сильное влияние немарковость оказывает на динамику системы при заданных параметрах. Кроме того, можно заметить небольшое увеличение частоты основных осцилляций и появление новых гармоник в динамике. Таким образом, можно заключить, что немарковость окружения может оказывать заметное влияние на динамику кубита.

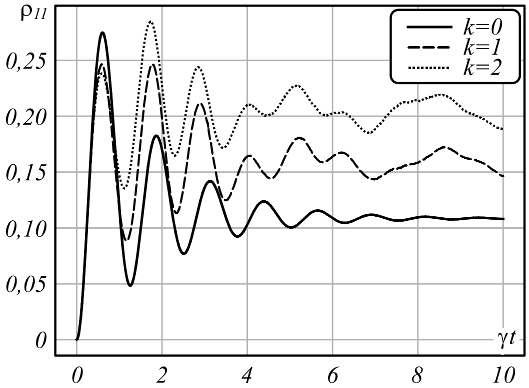

Рис. 1. Вероятности обнаружить кубит в возбуждённом состоянии в отсутствие шума лазера. Параметры $\gamma = 1$, $\nu_0 = 3$, $\nu = 7$, $\Omega_R = 3$, $k_0 = 0$

Не менее интересным является изучение влияния собственного шума лазера на динамику системы в её немарковском окружении. На рис. 2 изображены вероятности обнаружить кубит в возбужденном состоянии для немарковского случая при наличии шума лазера с различными параметрами: $k_0=0$ (сплошная линия), $k_0=0{,}3$ (штриховая линия), $k_0=0{,}5$ (пунктирная линия), $k_0=1$ (штрихпунктирная линия). Каждый график построен усреднением по 10000 траекторий.

Как можно видеть, уже небольшое присутствие собственного шума лазера ($k_0=0{,}3$) качественно влияет на динамику: увеличивается скорость релаксации, смещается стационарное состояние, а при $k_0=1$ динамика системы значительно отличается от случая без собственного шума. Можно заключить, что в данном случае собственный шум лазера уменьшает отстройку регулярной компоненты частоты лазерного поля от собственной частоты перехода кубита.

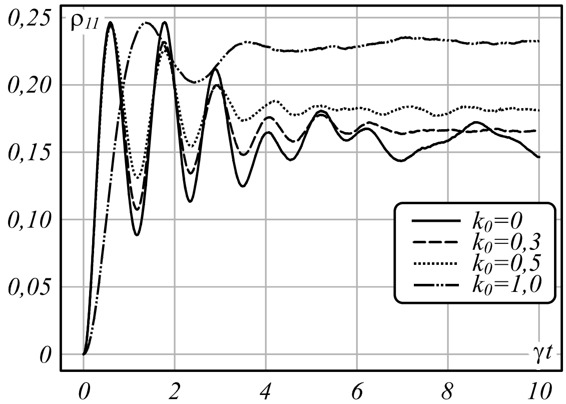

Рис. 2. Вероятности обнаружить кубит в возбужденном состоянии при различных параметрах шума лазера. Параметры $\gamma = 1$, $\nu_0 = 3$, $\nu = 7$, $\Omega_R = 3$, $k = 1$

Заключение

В данной работе была исследована динамика кубита во внешнем лазерном поле с шумом. Для данной модели построено нелинейное стохастическое уравнение Шредингера, гарантирующее сохранение нормировки волнового вектора, а также отсутствие нефизических вероятностей. Влияние немарковости окружения учитывалось путем введения в уравнение процесса Орнштейна–Уленбека. При этом построенное

СУШ (8) при $k=0$ переходит в известное марковское уравнение Шредингера (1).

Проведено моделирование динамики кубита путём численного решения полученного нелинейного стохастического уравнение Шредингера методом Рунге–Кутты. Получены результаты в виде временных зависимостей вероятности обнаружения кубита в возбуждённом состоянии для различной степени влияния немарковского окружения на кубит, а также исследовано влияние случайного сдвига частоты лазера на динамику системы. Из анализа вероятностей показано, что стохастические компоненты лазерного поля, а также немарковость окружения могут оказывать значительное влияние на динамику.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №18-32-00249\18).

Литература

1. **Бройер, Х.-П.** Теория открытых квантовых систем / Х.-П. Бройер, Ф. Петручионне; пер. с англ. – М.: Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2010. – 824 с.
2. **Gröblcher, S.** Observation of non-Markovian micromechanical Brownian motion / S. Gröblcher, A. Trubarov, N. Prigge, G.D. Cole, M. Aspelmeyer, J. Eisert // Nature Communications. – 2015. – Vol. 6. – 7606. – DOI: 10.1038/ncomms8606.
3. **Madsen, K.H.** Observation of non-Markovian dynamics of a single quantum dot in a micropillar cavity / K.H. Madsen, S. Ates, T. Lund-Hansen, A. Löffler, S. Reitzenstein, A. Forchel, P. Lodahl // Physical Review Letters. – 2011. – Vol. 106. – 233601. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.233601.
4. **Mi, X.** Strong coupling of a single electron in silicon to a microwave photon / X. Mi, J.V. Cady, D.M. Zajac, P.W. Deelman, J.R. Petta // Science. – 2017. – Vol. 355. – P. 156-158. – DOI: 10.1126/science.aal2469.
5. **Potočnik, A.** Studying light-harvesting models with superconducting circuits / A. Potočnik, A. Bargerbos, F.A.Y.N. Schröder, S.A. Khan, M.C. Collodo, S. Gasparinetti, Y. Salathé, C. Creatore, C. Eichler, H.E. Türeci, A.W. Chin, A. Wallraff // Nature Communications. – 2018. – Vol. 9. – 904. – DOI: 10.1038/s41467-018-03312-x.
6. **Aharonovich, I.** Solid-state single-photon emitters / I. Aharonovich, D. Englund, M. Toth // Nature Photonics. – 2016. – Vol. 10. – P. 631-641. – DOI: 10.1038/nphoton.2016.186.
7. **Barchielli, A.** Quantum trajectories and measurements in continuous time: The diffusive case / A. Barchielli, M. Gregoratti. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. – ISBN: 978-3-642-01297-6.
8. **Barchielli, A.** Stochastic Schrödinger equations with coloured noise / A. Barchielli, C. Pellegrini, F. Petruccione // Europhysics Letters. – 2010. – Vol. 91, No. 2. – 24001. – DOI: 10.1209/0295-5075/91/24001.
9. **Оксендаль, Б.** Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения / Б. Оксендаль. – пер. с англ. – М.: Мир, 2003 . – 408 с.

Сведения об авторах

Васильев Даниил Михайлович, 1997 года рождения, студент Самарского национального исследовательского университета. E-mail: _denvasilev-otl@yandex.ru_ .

Семин Виталий Владимирович, 1985 года рождения, в 2008 году окончил Самарский государственный университет по специальности «Физика», в 2011 году получил учёную степень Кандидат физико-математических наук, работает доцентом кафедры наноинженерии в Самарском национальном исследовательском университете имени академика С.П. Королева. Область научных интересов: открытые квантовые системы, немарковская релаксация, квантовая оптика и квантовая теория информации. E-mail: _semin@ssau.ru_ .

ГРНТИ: 29.29.39
Поступила в редакцию 21 февраля 2019 г. Окончательный вариант – 25 марта 2019 г.

Qubit dynamics in an external laser field

D.M. Vasilev[1], V.V. Semin[1]
[1] Samara National Research University, Moskovskoye Shosse 34, 443086, Samara, Russia

Abstract

In this paper, dynamics of a qubit in an external laser field is investigated for the non-Markov environment described by an Ornstein-Uhlenbeck process. A non-linear non-Markovian stochastic Schrödinger equation is derived for the quantum system. The stochastic equation is preserved for a positive semi-definite of the density matrix and its trace. By the numerical solution of the equation, the probability of finding the system in the excited state and the influence of non-Markov noise parameters on this probability are studie.

Keywords: stochastic Schrödinger equation, non-Markovian dynamics, qubit.

Citation: Vasilev DM, Semin VV. Qubit dynamics in extern laser field. Computer Optics 2019; 43(4): 562-566. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-4-562-566.

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research under RFBR grant No. 18-32-00249\18.

References

[1] Breuer H-P, Petruccione F. The theory of open quantum systems. – New York: Oxford University Press Inc; 2002.

[2] Gröblcher S, Trubarov A, Prigge N, Cole GD, Aspelmeyer M, Eisert J. Observation of non-Markovian micromechanical Brownian motion. Nat Commun 2015; 6: 7606. DOI: 10.1038/ncomms8606.

[3] Madsen KH, Ates S, Lund-Hansen T, Löffler A, Reitzenstein S, Forchel A, Lodahl P. Observation of non-Markovian dynamics of a single quantum dot in a micropillar cavity. Phys Rev Lett 2011; 106: 233601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.233601.

[4] Mi X, Cady JV, Zajac DM, Deelman PW, Petta JR. Strong coupling of a single electron in silicon to a microwave photon. Science 2017; 355: 156-158. DOI: 10.1126/science.aal2469.

[5] Potočnik A, Bargerbos A, Schröder FAYN, Khan SA, Collodo MC, Gasparinetti S, Salathé Y, Creatore C, Eichler C, Türeci HE, Chin AW, Wallraff A. Studying light-harvesting models with superconducting circuits. Nat Commun 2018; 9: 904. DOI: 10.1038/s41467-018-03312-x.

[6] Aharonovich I, Englund D, Toth M. Solid-state single-photon emitters. Nat Photon 2016; 10: 631-641. DOI: 10.1038/nphoton.2016.186.

[7] Barchielli A, Gregoratti M. Quantum trajectories and measurements in continuous time: The diffusive case. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 2009. ISBN: 978-3-642-01297-6.

[8] Barchielli A, Pellegrini C, Petruccione F. Stochastic Schrödinger equations with coloured noise. Europhysics Letters 2010; 91(2): 24001. DOI: 10.1209/0295-5075/91/24001.

[9] Øksendal B. Stochastic differential equations: An introduction with applications. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag; 1998.

Author's information

Daniil Mikhailovich Vasilev, (b. 1997) student of Samara National Research University named after the academician S.P. Korolyov. E-mail: *denvasilev-otl@yandex.ru* .

Vitalii Vladimirovich Semin, (b. 1985) graduated from Samara State University in 2008, received his Candidate's Degree in Physics and Mathematics in 2011. Currently he is associate professor at Nanoengineering department of Samara National Research University. His research interests include open quantum systems, non-Markovian relaxation, quantum optics, quantum information theory. E-mail: *semin@ssau.ru* .

Received February 21, 2019. The final version – March 25, 2019.