

Исследование немарковской динамики двух взаимодействующих кубитов на основе численного решения нелинейного стохастического уравнения Шрёдингера

А.В. Павельев¹, В.В. Семин¹

¹ Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

В работе исследуется немарковская динамика системы, состоящей из двух взаимодействующих кубитов. На основе идей стохастического исчисления выведено и обобщено на немарковский случай нелинейное стохастическое уравнение Шрёдингера. Стохастическое уравнение решается путём прямого компьютерного моделирования. На основе решения строятся различные динамические характеристики рассматриваемой системы.

Ключевые слова: открытая квантовая система, нелинейное уравнение Шрёдингера, диполь-дипольное взаимодействие, кубит.

Цитирование: Павельев, А.В. Исследование немарковской динамики двух взаимодействующих кубитов на основе численного решения нелинейного стохастического уравнения Шрёдингера / А.В. Павельев, В.В. Семин // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43, № 2. – С. 168-173. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-2-168-173.

Введение

Моделирование динамики связанных кубитов имеет большое значение для задач квантовых вычислений и квантового компьютеринга [1]. В традиционном подходе к математическому описанию систем кубитов, представленных в классических монографиях [1, 2], не учитывается деструктивное влияние окружения на динамику запутанных состояний, которые играют первостепенную роль при построении любого квантового алгоритма. Ясно, что декогеренция, вызванная взаимодействием кубитов с внешним окружением, приводит к разрушению запутанных состояний [3] и не может игнорироваться.

Для описания динамики открытых квантовых систем (ОКС) наиболее часто используется подход, основанный на решении операторно-кинетического уравнения для матрицы плотности (англ. *master equation*). Базовым допущением при выводе операторно-кинетического уравнения является марковское приближение [3], которое характеризуется пренебрежением всеми эффектами памяти, связанными с динамикой окружения.

В ряде недавних экспериментальных работ было показано проявление немарковских эффектов в динамике квантовых систем [4–9]. Также было показано, что немарковские эффекты могут оказывать значительное влияние на динамику открытой квантовой системы [10, 11]. В связи с этим в последнее время прилагаются значительные усилия для обобщения марковского кинетического уравнения на немарковский случай [12, 13].

Однако попытки обобщить операторно-кинетическое уравнение на случай немарковской динамики не приводят к особым успехам [12, 13]. Основные трудности связаны с тем, что на сегодняшний день общая форма немарковского кинетического уравнения, гарантирующая сохранение положительной определенности матрицы плотности, неизвестна. Более того, имеются примеры, когда формально построенное немарковское кинетическое уравнение приводит к совершенно нефизическим результатам [3].

В работе [14] А. Баркелли предлагает метод непротиворечивого описания динамики ОКС с учётом немарковских эффектов на основе стохастического уравнения Шрёдингера (СУШ). Данный подход, основанный на замене марковского белого шума на более общий немарковский процесс, гарантированно приводит к физически корректным свойствам оператора плотности.

В данной работе мы предлагаем описание немарковской релаксации двух диполь-дипольно взаимодействующих кубитов на основе нелинейного стохастического уравнения Шрёдингера. С помощью прямого численного моделирования анализируется динамика возбуждения различных квантовых состояний системы.

В данной работе мы предлагаем описание немарковской релаксации двух диполь-дипольно взаимодействующих кубитов на основе нелинейного стохастического уравнения Шрёдингера. С помощью прямого численного моделирования анализируется динамика возбуждения различных квантовых состояний системы.

1. Нелинейное стохастическое уравнение Шрёдингера для системы из двух кубитов

В данной работе изучается система двух диполь-дипольно взаимодействующих кубитов в двух независимых термостатах. Марковское операторно-кинетическое уравнение для матрицы плотности при нулевой температуре термостатов, полученное в работе [15], имеет следующую форму:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} = & -i\Omega[\sigma_1^+\sigma_2 + \sigma_2^+\sigma_1, \rho] - \\ & -\frac{1}{2}\gamma_0(\sigma_1^+\sigma_1\rho - 2\sigma_1^-\rho\sigma_1^+ + \rho\sigma_1^+\sigma_1^-) - \\ & -\frac{1}{2}\gamma_0(\sigma_2^+\sigma_2\rho - 2\sigma_2^-\rho\sigma_2^+ + \rho\sigma_2^+\sigma_2^-), \end{aligned} \quad (1)$$

где σ_i^\mp – понижающие и повышающие операторы для i -го кубита, Ω – константа диполь-дипольного взаимодействия, γ_0 – скорость релаксации. Квадратными скобками обозначен коммутатор двух операторов.

В результате процедуры распутывания (англ. *unravelling*) [16] из данного операторно-кинетического

уравнения (1) можно вывести стохастическое уравнение Шрёдингера, которое будет эквивалентно последнему в смысле стохастического усреднения по ансамблю квантовых траекторий $\rho = E(|\psi\rangle\langle\psi|)$.

Ранее в нашей работе [17] в результате процесса распутывания уравнения (1) было получено линейное стохастическое уравнение Шрёдингера для волновой функции. Его можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} d|\psi\rangle &= A|\psi\rangle dt + B|\psi\rangle dW_1 + C|\psi\rangle dW_2, \\ A &= -i\Omega(\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_2^+ \sigma_1^-) - \frac{1}{2}\gamma_0(\sigma_1^+ \sigma_1^- + \sigma_2^+ \sigma_2^-), \\ B &= i\sqrt{\gamma_0}\sigma_1^-, C = i\sqrt{\gamma_0}\sigma_2^-. \end{aligned} \quad (2)$$

Для обобщения линейного СУШ (1) на немарковский случай в статье [14] было предложено заменить винеровские процессы dW_i на процессы более общего вида. Примером такого процесса является процесс Орнштейна–Уленбека:

$$dX_i = -k_i X_i dt + dW_i, \quad (3)$$

где k_i – неотрицательные постоянные, отвечающие за характерное время скоррелированности с i -м термостатом. В результате формальной подстановки $dW_i \rightarrow dX_i$ получаем следующее выражение для кет-вектора:

$$\begin{aligned} d|\psi\rangle &= A|\psi\rangle dt - k_1 X_1 B|\psi\rangle dt - k_2 X_2 C|\psi\rangle dt + \\ &+ B|\psi\rangle dW_1 + C|\psi\rangle dW_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Однако полученное уравнение (4) не сохраняет нормировку волнового вектора в среднем, что необходимо для физической интерпретации членов уравнения [16]. Для сохранения нормировки в среднем необходимо потребовать, чтобы величина $|\psi\rangle$ была мартингалом, то есть:

$$E\langle\psi|\psi\rangle = 1, \quad (5)$$

где E – усреднение по ансамблю стохастических реализаций. Из этого условия следует, что стохастическое уравнение для величины $\langle\psi|\psi\rangle$ должно содержать только шумовую часть.

Использование правила дифференцирования Ито:

$$d\langle\psi|\psi\rangle = d\langle\psi|\cdot|\psi\rangle + \langle\psi|\cdot|d|\psi\rangle + d\langle\psi|\cdot|d|\psi\rangle \quad (6)$$

позволяет получить СУШ следующего вида:

$$\begin{aligned} d\langle\psi|\psi\rangle &= (\langle\psi|A^\dagger + A|\psi\rangle - k_1 X_1 \langle\psi|B^\dagger + B|\psi\rangle - \\ &- k_2 X_2 \langle\psi|C^\dagger + C|\psi\rangle + \langle\psi|B^\dagger B + C^\dagger C|\psi\rangle) dt + \\ &+ \langle\psi|B^\dagger + B|\psi\rangle dW_1 + \langle\psi|C^\dagger + C|\psi\rangle dW_2. \end{aligned} \quad (7)$$

При выводе была использована таблица Ито:

$$dW_i \cdot dW_j = \delta_{ij}, \quad dt \cdot dt = 0, \quad dt \cdot dW_i = 0. \quad (8)$$

Для выполнения свойства мартингалности член в выражении (7) при dt должен быть равен нулю. Это условие будет выполнено, если провести следующую замену в уравнении (4):

$$A \rightarrow A - k_1 X_1 B^\dagger - k_2 X_2 C^\dagger. \quad (9)$$

Окончательно уравнение, сохраняющее норму, имеет вид:

$$\begin{aligned} d|\psi\rangle &= (A - k_1 X_1 (B^\dagger + B) - k_2 X_2 (C^\dagger + C))|\psi\rangle dt + \\ &+ B|\psi\rangle dW_1 + C|\psi\rangle dW_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Решение данного уравнения является мартингалом, т.е. сохраняет нормировку в среднем. Хорошо видно, что при $k_1 = k_2 = 0$ уравнение (10) переходит в марковское уравнение (2). Однако стохастические реализации решения обладают большой дисперсией, что приводит к тому, что для получения адекватного результата нужно смоделировать неоправданно много траекторий. Традиционный путь преодоления данного недостатка состоит в выводе нелинейного уравнения для нормированного волнового вектора:

$$|\tilde{\psi}\rangle = \frac{|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}} = |\psi\rangle \|\psi\|^{-1}, \quad (11)$$

которое эквивалентно исходному уравнению в слабом вероятностном смысле (другими словами, средние, вычисленные с помощью решения одного и второго уравнения, совпадают).

Дифференцируя выражение для обратной нормы с использованием леммы Ито [18]:

$$\|\psi\|^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}} \quad (12)$$

и заменяя волновую функцию в обкладках матричных элементов на нормированную волновую функцию, получаем:

$$\begin{aligned} d\|\psi\|^{-1} &= \\ &= \frac{3}{8}\|\psi\|^{-1} (\langle\tilde{\psi}|B^\dagger + B|\tilde{\psi}\rangle^2 + \langle\tilde{\psi}|C^\dagger + C|\tilde{\psi}\rangle^2) dt - \\ &- \frac{1}{2}\|\psi\|^{-1} (\langle\tilde{\psi}|B^\dagger + B|\tilde{\psi}\rangle dW_1 + \langle\tilde{\psi}|C^\dagger + C|\tilde{\psi}\rangle dW_2). \end{aligned} \quad (13)$$

Используя стохастическое исчисление Ито с одновременной заменой вероятностной меры процессов по теореме Гирсанова [18], можно получить нелинейное СУШ, которое гарантированно сохраняет норму волнового вектора в любой момент времени.

Из уравнения (10) и уравнения (13) получаем замкнутое уравнение для нормированной волновой функции:

$$\begin{aligned} d|\tilde{\psi}\rangle &= (A - k_1 X_1 (B^\dagger + B) - k_2 X_2 (C^\dagger + C) + \\ &+ \frac{1}{2} B \langle\tilde{\psi}|B^\dagger + B|\tilde{\psi}\rangle + \frac{1}{2} C \langle\tilde{\psi}|C^\dagger + C|\tilde{\psi}\rangle - \\ &- \frac{1}{8} B \langle\tilde{\psi}|B^\dagger + B|\tilde{\psi}\rangle^2 - \frac{1}{8} C \langle\tilde{\psi}|C^\dagger + C|\tilde{\psi}\rangle^2) dt + \\ &+ \left(B - \frac{1}{2} \langle\tilde{\psi}|B^\dagger + B|\tilde{\psi}\rangle \right) |\tilde{\psi}\rangle d\tilde{W}_1 + \\ &+ \left(C - \frac{1}{2} \langle\tilde{\psi}|C^\dagger + C|\tilde{\psi}\rangle \right) |\tilde{\psi}\rangle d\tilde{W}_2. \end{aligned} \quad (14)$$

В вышеприведённом уравнении новые шумы \tilde{W}_i определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} dW_1 &= d\tilde{W}_1 + \langle \tilde{\psi} | B^\dagger + B | \tilde{\psi} \rangle, \\ dW_2 &= d\tilde{W}_2 + \langle \tilde{\psi} | C^\dagger + C | \tilde{\psi} \rangle, \\ dX_1 &= -k_1 X_1 dt + d\tilde{W}_1 + \langle \tilde{\psi} | B^\dagger + B | \tilde{\psi} \rangle dt, \\ dX_2 &= -k_2 X_2 dt + d\tilde{W}_2 + \langle \tilde{\psi} | C^\dagger + C | \tilde{\psi} \rangle dt. \end{aligned} \tag{15}$$

Из выражений видно, что шумы также зависят от состояния системы.

Полученное уравнение обладает рядом преимуществ: гарантирует полную положительность оператора плотности $\rho = E(|\tilde{\psi}\rangle\langle\tilde{\psi}|)$, сохраняет нормировку волновой функции в любой момент времени по построению, обладает меньшей дисперсией по сравнению с линейным уравнением (2).

Уравнение (14) является стартовой точкой для проведения компьютерного моделирования. Имея N его решений (стохастических траекторий), можно получить среднее значение произвольного оператора M следующим образом:

$$\langle M \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \tilde{\psi}_i | M | \tilde{\psi}_i \rangle. \tag{16}$$

Например, вероятность обнаружить систему в состоянии, при котором оба кубита находятся на верхнем энергетическом уровне, можно найти как:

$$P_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \tilde{\psi}_i | \sigma_1^+ \sigma_1^- \sigma_2^+ \sigma_2^- | \tilde{\psi}_i \rangle. \tag{17}$$

При этом среднеквадратичное отклонение находится по формуле:

$$\sigma_M = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \langle \tilde{\psi}_i | M | \tilde{\psi}_i \rangle^2 - \left(\sum_{i=1}^N \langle \tilde{\psi}_i | M | \tilde{\psi}_i \rangle \right)^2}{N(N-1)}}. \tag{18}$$

2. Результаты моделирования

Полученное выше нелинейное стохастическое уравнение Шрёдингера (14) записано для четырёхкомпонентного вектора $|\tilde{\psi}\rangle$. Квадрат модуля каждой компоненты соответствует вероятности обнаружить систему в одном из следующих состояний: оба кубита находятся на возбужденном энергетическом уровне (P_1), один из кубитов находится в возбужденном состоянии ($P_{2,3}$) или оба кубита – в основном состоянии (P_4). Численное решение уравнения (14) проводилось с помощью явного метода Эйлера [19] со следующими значениями параметров:

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}(0)\rangle &= (1; 0; 0; 0), \\ \gamma_0 &= 1, \\ \Omega &= 2, 3, \\ k_1 &= 0, 8, k_2 = 1, 6. \end{aligned} \tag{19}$$

Результаты усреднения по 100000 траекторий для марковской ($k_{1,2}=0$) и немарковской динамики пред-

ставлены на рис. 1 и 2 соответственно. Среднеквадратичные отклонения, найденные по формуле (18), не превышают толщины линии.

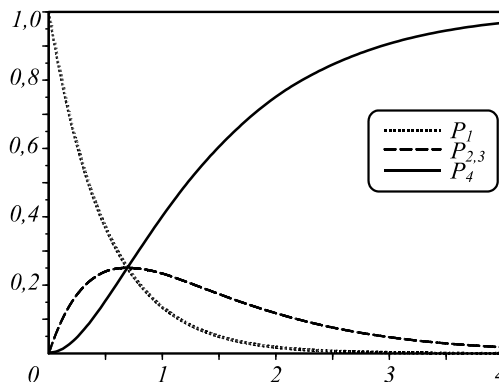


Рис. 1. Вероятность обнаружить систему в конкретном состоянии P_i от безразмерного времени $\gamma_0 t$. Марковское приближение

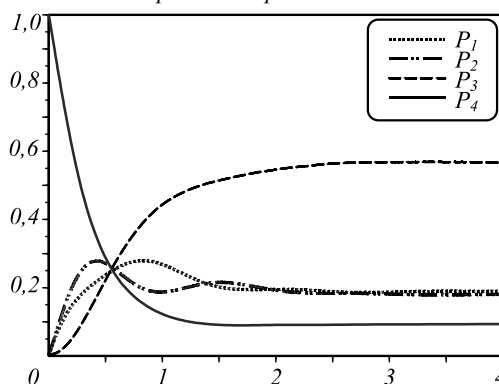


Рис. 2. Вероятность обнаружить систему в конкретном состоянии P_i от безразмерного времени $\gamma_0 t$. Немарковское приближение

Из приведённых рисунков видно, что учёт немарковости снимает вырождение состояния, когда один из кубитов находится на верхнем энергетическом уровне. Кроме того, смещаются вероятности найти систему в одном из состояний в стационарном режиме. Учёт немарковского окружения также приводит к появлению осцилляций вероятностей, связанных с перекачкой энергии из одного кубита в другой.

Вероятность обнаружить систему в симметричном перепутанном состоянии определяется следующим образом [20]:

$$\begin{aligned} P_s &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle \tilde{\psi}_i | s \rangle \langle s | \tilde{\psi}_i \rangle, \\ \text{где } |s\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (0; 1; 1; 0)^T. \end{aligned} \tag{20}$$

Зависимость вероятности обнаружить симметричное перепутанное состояние от безразмерного времени $\gamma_0 t$ изображена на рис. 3 для марковского и немарковского случая соответственно.

Из рис. 3 видно, что учёт немарковской релаксации приводит также к изменению вероятности найти систему в перепутанном состоянии в стационарном режиме. В марковском случае эта вероятность экспоненциально падает к нулю с течением времени.

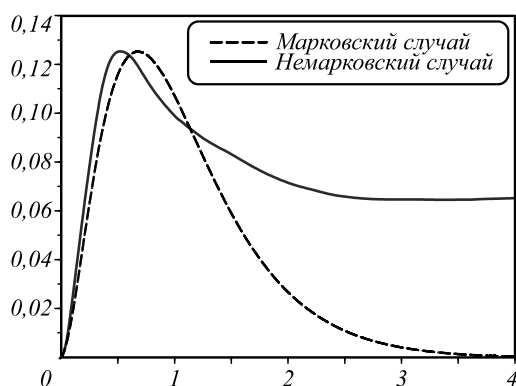


Рис. 3. Зависимость вероятности обнаружить систему в симметричном перепутанном состоянии P_s от безразмерного времени $\gamma_0 t$ в различных приближениях

Заключение

Использование нелинейного стохастического уравнения Шрёдингера позволяет моделировать динамику системы кубитов как в марковском, так и в немарковском приближениях, и при этом обладает рядом преимуществ по сравнению с другими методами: гарантированность полной положительности матрицы плотности (характерно в принципе для подходов, основанных на СУШ) и сохранение нормы волнового вектора, что является ключевой особенностью нелинейного стохастического уравнения Шрёдингера.

В данной работе получено нелинейное стохастическое уравнение Шрёдингера для немарковской релаксации системы из двух диполь-дипольно взаимодействующих кубитов. Показано, что немарковость оказывает существенное влияние на динамику системы, в том числе на вероятность возбуждения перепутанных состояний, что может быть использовано как ресурс в квантовой информатике и квантовых системах связи.

Благодарности

Данная работа была выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-32-00249).

Литература

1. Nielsen, M.A. Quantum computation and quantum information / M.A. Nielsen, I.L. Chuang. – Cambridge: Cambridge University Press, 2000. – 702 p. – ISBN: 978-0-521-63503-5.
2. Баллаж, Ф. Квантовые вычисления и связь. Инженерный подход : пер. с англ. / Ш. Имре, Ф. Баллаж. – М.: Физматлит. – 2008. – 319 с.
3. Петруччионе, Ф. Теория открытых квантовых систем : пер. с англ. / Х.-П. Бройер, Ф. Петруччионе; под ред. Ю.И. Богданова. – Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2010. – 824 с.
4. Liu, B.-H. Experimental control of the transition from Markovian to non-Markovian dynamics of open quantum systems / B.-H. Liu, L. Li, Y. Huang, C.F. Li // Nature Physics. – 2011. – Vol. 7. – P. 931-934.
5. Parkdag, S.H. Intraband relaxation time effects on non-Markovian gain with many-body effects and comparison with experiment / S.H. Parkdag, S.L. Chuang, J. Minch, D. Ahn // Semiconductor Science and Technology. – 2000. – Vol. 15, Issue 2. – P. 203-208.
6. Xu, J.-S. Experimental investigation of the non-Markovian dynamics of classical and quantum correlations / J.-S. Xu, C.F. Li, C.J. Zhang, X.Y. Xu, Y.S. Zhang, G.C. Guo // Physical Review A. – 2010. – Vol. 82. – 042328.
7. Orioux, A. Experimental on-demand recovery of entanglement by local operations within non-Markovian dynamics / A. Orioux, A. D'Arrigo, G. Ferranti, R.L. Franco, G. Benenti, E. Paladino, G. Falci, F. Sciarrino, P. Mataloni // Scientific Reports. – 2015. – Vol. 5. – 8575.
8. Bernardes, N.K. Experimental observation of weak non-Markovianity / N.K. Bernardes, A. Cuevas, A. Orioux, C.H. Monken, P. Mataloni, F. Sciarrino, M.F. Santos // Scientific Reports. – 2015. – Vol. 5. – 17520.
9. Xu, J.-S. Experimental recovery of quantum correlations in absence of system-environment back-action / J.-S. Xu, K. Sun, C.-F. Li, X.-Y. Xu, G.-C. Guo, E. Andersson, R.L. Franco, G. Compagno // Nature Communications. – 2013. – Vol. 4. – 2851.
10. Rotter, I. A review of progress in the physics of open quantum systems: theory and experiment / I. Rotter, J.P. Bird // Reports on Progress in Physics. – 2015. – Vol. 7, Issue 11. – 114001.
11. de Vega, I. Dynamics of non-Markovian open quantum systems / I. de Vega, D. Alonso // Reviews of Modern Physics. – 2017. – Vol. 89. – 015001.
12. Barnett, S.M. Hazards of reservoir memory / S.M. Barnett, S. Stenholm // Physical Review A. – 2001. – Vol. 64. – 033808.
13. Campbell, S. Critical assessment of two-qubit post-Markovian master equations / S. Campbell, A. Smirne, L. Mazzola, N.L. Gullo, B. Vacchini, T. Busch, M. Paternostro // Physical Review A. – 2012. – Vol. 85. – 032120.
14. Barchielli, A. Stochastic Schrödinger equations with coloured noise / A. Barchielli, C. Pellegrini, F. Petruccione // Europhysics Letters. – 2010. – Vol. 91, Issue 2. – 24001.
15. Mikhailov, A.V. The Fokker-Planck equation for relaxation of a system of two dipole-dipole interacting atoms / V.A. Mikhailov, N.V. Troshkin, A.M. Trunin // Proceedings of the SPIE. – 2015. – Vol. 9917. – 991732.
16. Barchielli, A. Quantum trajectories and measurements in continuous time: The diffusive case / A. Barchielli, M. Gregoratti. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. – 325 p. – ISBN: 978-3-642-01297-6.
17. Semin, V. Simulation of non-Markovian dynamics of dipole-dipole interacting atoms / V. Semin, A. Pavelev // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1096. – 012169. – DOI: 10.1088/1742-6596/1096/1/012169.
18. Оксендаль, Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения / Б. Оксендаль. – М.: Мир, 2003. – 408 с.
19. Platen, E. Numerical solution of stochastic differential equations with jumps in finance / E. Platen, N. Bruti-Liberati. – Berlin: Springer, 2010. – 869 p.
20. Баргатин, И.В. Запутанные квантовые состояния атомных систем / И.В. Баргатин, Б.А. Гришанин, В.А. Задков // Успехи физических наук. – 2001. – Вып. 171. – С. 625-647.

Сведения об авторах

Павельев Андрей Владимирович, 1995 года рождения, в 2017 году окончил бакалавриат Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, специальность «Прикладные математика и физика», в настоящее время студент-магистрант второго года обучения. Область научных интересов: квантовая оптика, открытые квантовые системы. E-mail: 44dragon44@rambler.ru.

Семин Виталий Владимирович, 1985 года рождения, в 2008 году окончил Самарский государственный университет по специальности «Физика», в 2011 году получил учёную степень «Кандидат физико-математических наук», работает доцентом на кафедре наноинженерии в Самарском национальном исследовательском университете имени академика С.П. Королева. Область научных интересов: открытые квантовые системы, немарковская релаксация, квантовая оптика и квантовая теория информации. E-mail: semin@sau.ru.

ГРНТИ: 29.29.39

Поступила в редакцию 14 февраля 2019 г. Окончательный вариант – 25 марта 2019 г.

Investigation of non-markovian dynamics of two dipole-dipole interacting qubits based on numerical solution of the non-linear stochastic Schrödinger equation

A.V. Pavelev¹, V.V. Semin¹¹ Samara National Research University, Moskovskoye shosse, 34, 443086, Samara, Russia*Abstract*

In this paper, we investigate non-markovian dynamics of a system of two interacting qubits. With the help of stochastic calculus we derive the non-Markovian non-linear stochastic Schrödinger equation. This equation is solved by the direct computer simulation. The simulation is used to obtain some dynamic properties of the system.

Keywords: open quantum system, non-linear stochastic Schrödinger equation, dipole-dipole interaction, qubit.

Citation: Pavelev AV, Semin VV. Investigation of non-markovian dynamics of two dipole-dipole interacting qubits based on numerical solution of the non-linear stochastic Schrödinger equation. Computer Optics 2019; 43(2): 168-173. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-2-168-173.

Acknowledgements: This work was supported by Russian Foundation for Basic Research (Project No. 18-32-00249).

References

- | | |
|--|---|
| <p>[1] Nielsen MA, Chuang IL. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge: Cambridge University Press; 2000. ISBN: 978-0-521-63503-5.</p> <p>[2] Imre S, Balazs F. Quantum computing for communications: an engineering approach. Budapest: John Wiley & Sons; 2005.</p> <p>[3] Breuer HP, Francesco P. The theory of open quantum systems. Oxford: Oxford University Press; 2002.</p> <p>[4] Liu BH, Li L, Huang Y, Li CF. Experimental control of the transition from Markovian to non-Markovian dynamics of open quantum systems. Nature Physics 2011; 7: 931-934.</p> <p>[5] Parkdag SH, Chuang SL, Minch J, Ahn D. Intraband relaxation time effects on non-Markovian gain with many-body effects and comparison with experiment. Semiconductor Science and Technology 2000; 15(2): 203-208.</p> <p>[6] Xu JS, Li CF, Zhang CJ, Xu XY, Zhang YS, Guo GC. Experimental investigation of the non-Markovian dynamics of classical and quantum correlations. Phys Rev A 2010; 82: 042328.</p> <p>[7] Orioux A, D'Arrigo A, Ferranti G, Franco RL, Benenti G, Paladino E, Falci G, Sciarrino F, Mataloni P. Experimental on-demand recovery of entanglement by local operations within non-Markovian dynamics. Scientific Reports 2015; 5: 8575.</p> <p>[8] Bernardes NK, Cuevas A, Orioux A, Monken CH, Mataloni P, Sciarrino F, Santos MF. Experimental observation</p> | <p>of weak non-Markovianity. Scientific Reports 2015; 5: 17520.</p> <p>[9] Xu J-S, Sun K, Li C-F, Xu X-Y, Guo G-C, Andersson E, Franco RL, Compagno G. Experimental recovery of quantum correlations in absence of system-environment back-action. Nature Communications 2013; 4: 2851.</p> <p>[10] Rotter I, Bird JP. A review of progress in the physics of open quantum systems: theory and experiment. Reports on Progress in Physics 2015; 7(11): 114001.</p> <p>[11] De Vega I, Alonso D. Dynamics of non-Markovian open quantum systems. Reviews of Modern Physics 2017; 89: 015001.</p> <p>[12] Barnett SM, Stenholm S. Hazards of reservoir memory. Phys Rev A 2001; 64: 033808.</p> <p>[13] Campell S, Smirne A, Mazzola L, Gullo NL, Vacchini B, Busch T, Paternostro M. Critical assessment of two-qubit post-Markovian master equations. Phys. Rev. A 2012; 85: 032120.</p> <p>[14] Barchielli A, Pellegrini C, Petruccione F. Stochastic Schrödinger equations with coloured noise. Europhysics Letters 2010; 91(2): 24001.</p> <p>[15] Mikhailov AV, Troshkin NV, Trunin AM. The Fokker-Planck equation for relaxation of a system of two dipole-dipole interacting atoms. Proc SPIE 2015; 9917: 991732.</p> <p>[16] Barchielli A, Gregoratti M. Quantum trajectories and measurements in continuous time: The diffusive case. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 2009. ISBN: 978-3-642-01297-6.</p> |
|--|---|

- [17] Semin V, Pavelev A. Simulation of non-Markovian dynamics of dipole-dipole interacting atoms. J Phys: Conf Ser 2019; 1096: 012169. DOI: 10.1088/1742-6596/1096/1/012169.
- [18] Øksendal B. Stochastic differential equations: An Introduction with applications. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 2000.
- [19] Platen E, Bruti-Liberati N. Numerical solution of stochastic differential equations with jumps in finance. Berlin: Springer; 2010.
- [20] Bargatin IV, Grishanin BA, Zadkov VN. Entagled quantum states of atomic systems. Physics-Uspekhi 2001; 44(6): 597-616. DOI: 10.1070/PU2001v044n06ABEH000940.

Author's information

Andrei Vladimirovich Pavelev (b. 1995) graduated from Samara National Research University in 2017, majoring in Applied Physics and Mathematics. Currently he is studying at “Physics and Technologies of Nanoelectronic Devices” master program at Samara National Research University. His research interests are quantum optics, open quantum systems. E-mail: 44dragon44@rambler.ru.

Vitalii Vladimirovich Semin (b. 1985) graduated from Samara State University in 2008, received his Candidate's Degree in Physics and Mathematics in 2011. Currently he is associate professor at Nanoengineering department of Samara National Research University. His research interests include open quantum systems, non-markovian relaxation, quantum optics, quantum information theory. E-mail: semin@ssau.ru.

Received February 14, 2019. The final version – March 25, 2019.
