SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS

International Scientific Journal

Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2018 **Issue:** 05 **Volume:** 61

Published: 30.05.2018 **http://T-Science.org**

SECTION 1. Theoretical research in mathematics

Ablakul Abdirashidov
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent to department of theoretical and applied mechanics, Samarkand State University, Uzbekistan,
abdira@mail.ru

Nurshod Kadirov
Student of Mechanical and Mathematical Faculty, Samarkand State University, Uzbekistan

Bekzod Ortikov
Student of Mechanical and Mathematical Faculty, Samarkand State University, Uzbekistan

Akmaljon Abdurashidov
Assistant to department of theoretical and applied mechanics, Samarkand State University, Uzbekistan,
abdira@mail.ru

EXACT SOLUTION OF FRACTIONAL DIFFUSION EQUATIONS USING THE VARIATIONAL ITERATION METHOD AND ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD

***Abstract**: In this paper, variational iteration method, Adomian decomposition method and method of separation of variables has been applied to obtain exact solutions of fractional diffusion equations. The new exact solutions of these equations have been obtained. It has been shown that the proposed methods provide a very effective, and powerful mathematical tool for solving nonlinear partial differential equations.*

***Key words**: fractional diffusion equation, variational iteration method, Adomian decomposition method, method of separation of variables, fractional partial differential equations, exact solutions.*

***Language**: Russian*

Citation: Abdirashidov A, Kadirov N, Ortikov B, Abdurashidov A (2018) EXACT SOLUTION OF FRACTIONAL DIFFUSION EQUATIONS USING THE VARIATIONAL ITERATION METHOD AND ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD. ISJ Theoretical & Applied Science, 05 (61): 101-107.

Soi: http://s-o-i.org/1.1/TAS-05-61-18 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2018.05.61.18

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ВАРИАЦИОННЫХ ИТЕРАЦИЙ И МЕТОДОМ РАЗЛОЖЕНИЯ АДОМИАНА

***Аннотация**: Метод вариационных итераций, метод разложения Адомиана и метод разделения переменных применены для нахождения точного решения уравнений диффузии дробного порядка. Получены новые точные решения этих уравнений. Показано, что эти методы являются эффективными и более мощными математическими инструментами для решения дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка.*

***Ключевые слова**: уравнения диффузии дробного порядка, метод вариационных итераций, метод разложения Адомиана, метод разделения переменных, дифференциальные уравнения в частных производных дробного порядка, точное решение.*

Введение.

Дифференциальные уравнения в частных производных (ДУЧП) дробного порядка играют значительную роль при описании множества нелинейных проблем во многих областях науки и разработках, таких как гидроаэромеханика, робототехника, электромагнетизм, электрохимия, и т.д. [3, 9, 15, 20, 22, 23]. Кроме ограниченного количества этих уравнений, трудно найти их точные или приближенные решения. Поэтому нахождение точных или приближенных решений ДУЧП очень важно, для этого предложены некоторые методы, чтобы решить их, например, метод разложения Адомиана [12, 21], метод вариационных итераций [1, 6, 7, 12], метод преобразования Лапласа [12], метод разделения переменных [12], упрощенный метод укороченных разложений [2, 10, 11, 16-18], метод sin-cos функций [14, 21], метод tanh-coth функций [13, 21], метод exp-функции [8], метод гомотопических возмущений [4, 5, 12, 21] и их различные модифицированные варианты. Из них метод вариационных итераций (МВИ), метод разложения Адомиана (МРА) и метод разделения переменных (МРП) широко используются, чтобы получить приближенные решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений целого или дробного порядка в науке и разработке. В данной работе эти методы применены для нахождения точного решения некоторых уравнений диффузии дробного порядка.

Постановка задачи.

Нелинейную дифференциальную уравнению в частных производных дробного порядка в общем виде можно записать так $Lu(x,t)+Nu(x,t)=q(x,t),$ где L – линейный, а N – нелинейный оператор; $q(x,t)$ – аналитическая, а $u(x,t)$ – неизвестная функция.

Некоторые основные понятия.

Дробные производные и интегралы Римана-Лиувилля. Пусть $\Omega=[a,b]$– конечный интервал на действительной оси R^1. Дробные интегралы $I_{ax}^{\alpha} f$ (левосторонний) и $I_{xb}^{\alpha} f$ (правосторонний) Римана-Лиувилля порядка α $(\mathrm{Re}\,\alpha>0)$:

$$I_{ax}^{\alpha} f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}},\ (x>a),$$

$$I_{xb}^{\alpha} f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-x)^{1-\alpha}},\ (x<b),$$

$$I_{ax}^{\alpha} f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_a^x f(\xi)(d\xi)^{\alpha},\quad 0<\alpha\le 1.$$

Здесь $\Gamma(\alpha)$ – Гамма функция Эйлера. С учетом предыдущие дробные производные Римана-Лиувилля $D_{ax}^{\alpha} f$ и $D_{xb}^{\alpha} f$ порядка α $(\mathrm{Re}\,\alpha>0)$:

$$D_{ax}^{\alpha} f(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left[I_{ax}^{n-\alpha} f(x)\right]=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\cdot$$

$$\cdot\int_a^x \frac{f(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1+\alpha-n}},\ (n=[\mathrm{Re}\,\alpha]+1;\ x>a),$$

$$D_{xb}^{\alpha} f(x)=\left(\frac{-d}{dx}\right)^n\left[I_{xb}^{n-\alpha} f(x)\right]=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{-d}{dx}\right)^n\cdot$$

$$\cdot\int_x^b \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-x)^{1+\alpha-n}},\ (n=[\mathrm{Re}\,\alpha]+1;\ x<b),$$

где $[\mathrm{Re}\,\alpha]$ – целая часть $\mathrm{Re}\,\alpha$. Основные формулы производных и интегралов для дробного порядка:

$$D_{ax}^{\alpha}(uv)=u^{(\alpha)}v+uv^{(\alpha)},$$

$$I_{ax}^{\alpha}D_{ax}^{\alpha} f(x)=f(x)-f(0),\ \ 0<\alpha\le 1,$$

$$I_{ab}^{\alpha}u^{(\alpha)}v=(uv)\big|_a^b-I_{ab}^{\alpha}uv^{(\alpha)}.$$

Функция Миттаг-Лефлера. Функция Миттаг-Лефлера [3, 9, 20, 23] задается на множестве значений комплексного аргумента z с помощью бесконечного ряда и зависит от двух параметров α и β:

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\beta+n\alpha)},\ \alpha\in R_+,\ \beta\in R,\ z\in C.$$

Если $\alpha=\beta=1$, то приведенная формула определяет экспоненциальную функцию e^z

$$E_{1,1}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(1+n)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=e^z.$$

Функция Миттаг-Лефлера играет важную роль в решении интегро-дифференциальных уравнений нецелых порядков. Многие специальные функции могут быть выражены через функции Миттаг-Лефлера с различными параметрами. К таким функциям, в частности, относятся гиперболические синус и косинус, функции Миллера-Роса, Работнова и др.

Алгоритм решения задачи методом вариационных итераций.

Нелинейную дифференциальную уравнению в частных производных в общем виде можно записать так $Lu(x,t)+Nu(x,t)=q(x,t),$ где L – линейный оператор; N – нелинейный оператор; $q(x,t)$ – аналитическая функция; $u(x,t)$ – неизвестная функция. По идею вариационно-итерационного метода [12] итерационную решению этого уравнения можно записать следующее соотношение

$$u_{n+1}(x,t)=u_n(x,t)+\int_0^t \lambda(t,s)\left[Lu_n(x,s)+\right.$$

$$\left.+N\tilde{u}_n(x,s)-q(x,s)\right]ds,\quad n\ge 0,$$

где λ – множитель Лагранжа; $\tilde{u}_n$ – вариационный член, т.е. $\delta\,\tilde{u}_n=0$; $u_0(x,t)=u(x,0)+u_t(x,0)t+\ldots$. Окончательно имеем: $u(x,t)=\lim_{n\to\infty}u_n(x,t)$.

Алгоритм решения задачи методом разложения Адомиана.

Нелинейную дифференциальную уравнению в частных производных перепишем в виде $Lu(x,t) = q(x,t) - Nu(x,t)$, где L – дифференциальный оператор; L^{-1} – интегральный оператор. Применение обратного оператора к заданному уравнению: $u(x,t) = f(x,t) - L^{-1}[Nu(x,t)]$. Основная идея МРА это составление функциональное уравнение вида $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$. Отсюда имеем рекуррентное соотношение вида [12]:

$$u_0(x,t) = f(x,t); \quad u_{n+1} = -L^{-1}[Nu_n(x,t)],$$
$$n \geq 0.$$

Пример 1.

Требуется точно решать следующую смешанную задачу для однородного уравнения диффузии дробного порядка методом вариационных итераций (МВИ), методом разложения Адомиана (МРА) и методом разделения переменных (МРП) [12, 19]:

$$D_t^\alpha u(x,t) + D_x^2 u(x,t) = 0, \quad (1)$$
$$0 < \alpha \leq 1, \ 0 \leq x \leq \pi, \ t > 0,$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad (2)$$
$$u(x,0) = \sin x. \quad (3)$$

1) По идею МВИ имеем формулу приближенного решения задачи (1)-(3):

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \cdot$$
$$\cdot \int_0^t \lambda(t,\xi)\left[\frac{\partial^\alpha u_n(x,\xi)}{\partial \xi^\alpha} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_n(x,\xi)}{\partial x^2}\right](d\xi)^\alpha .$$

Здесь $\lambda(t,\xi)$ - множитель Лагранжа, а для стационарного случая $\left.\frac{\partial^\alpha \lambda(t,\xi)}{\partial \xi^\alpha}\right|_{\xi=t} = 0$,

$1 + \lambda(t,\xi)|_{\xi=t} = 0$ и отсюда имеем $\lambda(t,\xi) = -1$.

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \cdot$$
$$\cdot \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha u_n(x,\xi)}{\partial \xi^\alpha} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_n(x,\xi)}{\partial x^2}\right](d\xi)^\alpha .$$

Результаты применяя МВИ:

$$u_0(x,t) = u(x,0) = \sin x;$$
$$u_1(x,t) = \left[1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right]\sin x;$$
$$u_2(x,t) = \left[1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}\right]\sin x; \ldots;$$
$$u_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{k\alpha}\sin x}{\Gamma(1+k\alpha)} \text{ и т.д.}$$

Точное решение задачи:

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,t) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{k\alpha}\sin x}{\Gamma(1+k\alpha)} = \sin x \cdot E_\alpha(t^\alpha).$$

2) Для МРА имеем формулу приближенного решения задачи (1)-(3):

$$I_{0t}^\alpha D_t^\alpha u(x,t) = -I_{0t}^\alpha D_x^2 u(x,t) \ \Rightarrow$$
$$u(x,t) = u(x,0) - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t \frac{\partial^2 u(x,\xi)}{\partial x^2}(d\xi)^\alpha .$$

По идею МРА: $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \Rightarrow$

$$u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + \ldots = \sin x - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \cdot$$
$$\cdot \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2}[u_0(x,\xi) + u_1(x,\xi) + u_2(x,\xi) + \ldots](d\xi)^\alpha;$$

$$u_0(x,t) = \sin x; \qquad u_1(x,t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\sin x;$$
$$u_2(x,t) = \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}\sin x; \ldots;$$
$$u_n(x,t) = \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)}\sin x \text{ и т.д.}$$

Точное решение задачи:

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + \ldots = \sin x \cdot$$
$$\cdot \left[1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + \ldots\right] = \sin x \cdot E_\alpha(t^\alpha).$$

3) По идею МРП имеем:

$u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$. Подставляя это выражение к уравнению (1) имеем две уравнения вида [18]

$$T^{(\alpha)} \cdot X = -X'' \cdot T \ \Rightarrow$$
$$\frac{T^{(\alpha)}}{T} = -\frac{X''}{X} = \lambda = const.$$

Отсюда получим спектральную задачу: $X'' + \lambda X = 0$, $X(0) = X(\pi) = 0$.

При $\lambda > 0$ имеем

$X(x) = a\cos\sqrt{\lambda}x + b\sin\sqrt{\lambda}x, \quad X(0) = 0$ и $X(\pi) = 0 \ \Rightarrow \ X_n(x) = \sin nx, n \in N$, а вторая $T_n^{(\alpha)} - n^2 T_n = 0 \Rightarrow T_n = C_n \cdot E_\alpha(n^2 t^\alpha)$.

Общее решение уравнение (1) и (2):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot E_\alpha(n^2 t^\alpha) \cdot \sin nx,$$

а из условия (3) имеем

$$u(x,0)=\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cdot\sin nx,\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ C_1=1,\ \ C_k=0,\ \ \mathrm{k}=2,3,4,\ldots$$

Точное решение задачи: $u(x,t)=\sin x\cdot E_\alpha(t^\alpha)$.

Функции $E_\alpha(t^\alpha)$ экспоненциально возрастающая. С увеличением значения α значение этой функции убивает. В частности, если $\alpha=1$, то вместо уравнение (1) получим уравнение теплопроводности и ее точное решение имеет вид $u(x,t)=e^t\sin x$.

Пример 2.

Требуется точно решать следующую смешанную задачу для неоднородного уравнения диффузии дробного порядка МВИ и МРА [12]:

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-bu(x,t)+\sin\frac{\pi x}{l},$$

$$0<\alpha\le 1,\ 0\le x\le l,$$

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ u(x,0)=0 \qquad (4)$$

1) По идею МВИ имеем формулу приближенного решения задачи (4):

$$u_{n+1}(x,t)=u_n(x,t)+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^t\lambda(t,\xi)\left[\frac{\partial^\alpha u_n(x,\xi)}{\partial\xi^\alpha}-\right.$$

$$\left.-a^2\frac{\partial^2\tilde{u}_n(x,\xi)}{\partial x^2}+b\tilde{u}_n(x,\xi)-\sin\frac{\pi x}{l}\right](d\xi)^\alpha.$$

Здесь $\lambda(t,\xi)$ - множитель Лагранжа, а для стационарного случая $\left.\frac{\partial^\alpha\lambda(t,\xi)}{\partial\xi^\alpha}\right|_{\xi=t}=0$,

$1+\lambda(t,\xi)\big|_{\xi=t}=0$ и отсюда имеем $\lambda(t,\xi)=-1$.

$$u_{n+1}(x,t)=u_n(x,t)-\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^t\left[\frac{\partial^\alpha u_n(x,\xi)}{\partial\xi^\alpha}-\right.$$

$$\left.-a^2\frac{\partial^2\tilde{u}_n(x,\xi)}{\partial x^2}+b\tilde{u}_n(x,\xi)-\sin\frac{\pi x}{l}\right](d\xi)^\alpha.$$

Результаты применяя МВИ:

$$u_0(x,t)=u(x,0)=0;\ \ u_1(x,t)=\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\sin\frac{\pi x}{l};$$

$$u_2(x,t)=\left\{\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}-\left[\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2+b\right]\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}\right\}\sin\frac{\pi x}{l};$$

$$u_3(x,t)=\left\{\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}-\left[\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2+b\right]\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}+\right.$$

$$\left.+\left[\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2+b\right]^2\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)}\right\}\sin\frac{\pi x}{l};\ \ldots.;$$

$$u_n(x,t)=\left[\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2+b\right]^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left[1-\sum_{k=0}^{n}\left[-\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2-b\right]^k\frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}$$

и т.д. Точное решение задачи:

$$u(x,t)=\lim_{n\to\infty}u_n(x,t)=\left[\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2+b\right]^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left\{1-E_\alpha\left[\left(-\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2-b\right)t^\alpha\right]\right\}\sin\frac{\pi x}{l}.$$

2) Для МРА имеем формулу приближенного решения задачи (4):

$$\mathrm{I}_{0t}^\alpha\left(\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha}\right)=\mathrm{I}_{0t}^\alpha\left(a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-bu(x,t)+\sin\frac{\pi x}{l}\right)$$

$$\Rightarrow\ u(x,t)=\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\sin\frac{\pi x}{l}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^t\left(a^2\frac{\partial^2 u(x,\xi)}{\partial x^2}-bu(x,\xi)\right)(d\xi)^\alpha.$$

По идею МРА: $u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)\Rightarrow$

$$u_0(x,t)+u_1(x,t)+\ldots=\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\sin\frac{\pi x}{l}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^t\left[a^2\frac{\partial^2\left(u_0(x,\xi)+u_1(x,\xi)+\ldots\right)}{\partial x^2}-\right.$$

$$\left.-b\left(u_0(x,\xi)+u_1(x,\xi)+\ldots\right)\right](d\xi)^\alpha;$$

$$u_0(x,t)=\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\sin\frac{\pi x}{l};$$

$$u_1(x,t)=-\left[\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2+b\right]\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}\sin\frac{\pi x}{l};$$

$$u_2(x,t)=\left[\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2+b\right]^2\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)}\sin\frac{\pi x}{l};\ \ldots;$$

$$u_n(x,t)=\left[-\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2-b\right]^n\frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)}\sin\frac{\pi x}{l}$$

и т.д. Точное решение задачи:

$$u(x,t)=u_0(x,t)+u_1(x,t)+\ldots=\left[\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2+b\right]^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left\{1-E_\alpha\left[\left(-\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2-b\right)t^\alpha\right]\right\}\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Если α=1, то вместо уравнение (4) получим уравнение теплопроводности и ее точное решение имеет вид

$$u(x,t)=\left[\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2+b\right]^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left\{1-\exp\left[\left(-\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2-b\right)t\right]\right\}\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Пример 3.

Требуется точно решать следующую смешанную задачу для однородного трехмерного уравнения диффузии дробного порядка МРП, МВИ и МРА [12,19]:

$$\frac{\partial^\alpha u(x,y,z,t)}{\partial t^\alpha}=\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial y^2}+$$

$$+\frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial z^2}-u(x,y,z,t), \qquad (5)$$

$$0<\alpha\le 1,\ \ 0\le x,y,z\le\pi,\quad t>0$$

$$u(0,y,z,t)=u(\pi,y,z,t)=0;$$

$$u(x,0,z,t)=u(x,\pi,z,t)=0;$$

$$u(x,y,0,t)=u(x,y,\pi,t)=0; \qquad (6)$$

$$u(x,y,z,0)=\sin x\sin y\sin z. \qquad (7)$$

1) По идею МРП имеем:

$$u(x,y,z,t)=X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z)\cdot T(t).$$

Подставляя это выражение к уравнению (5) имеем одно уравнение вида

$$XYZT^{(\alpha)}=X''YZT+XY''ZT+XYZ''T-XYZT$$

$$\frac{T^{(\alpha)}}{T}+1=\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}+\frac{Z''}{Z}=-\lambda-\mu-\upsilon=const$$

и три спектральные задачи

$$X''+\lambda X=0,\ \ X(0)=X(\pi)=0;$$

$$Y''+\mu Y=0,\ \ Y(0)=Y(\pi)=0;$$

$$Z''+\upsilon Z=0,\ \ Z(0)=Z(\pi)=0.$$

При $\lambda,\mu,\upsilon>0$, Получим следующие результаты: $X(x)=a_1\cos\sqrt{\lambda}x+b_1\sin\sqrt{\lambda}x$,

$X(0)=0$ и $X(\pi)=0\ \Rightarrow\ X_n(x)=\sin nx,\ n\in N;$

$$Y(y)=a_2\cos\sqrt{\mu}y+b_2\sin\sqrt{\mu}y,$$

$Y(0)=0$ и $Y(\pi)=0\ \Rightarrow\ Y_m(y)=\sin my,\ m\in N;$

$$Z(z)=a_3\cos\sqrt{\nu}y+b_3\sin\sqrt{\nu}y,$$

$$Z(0)=Z(\pi)=0\Rightarrow Z_p(z)=\sin pz;\quad p\in N;$$

$$T_{nmp}^{(\alpha)}+(1+n^2+m^2+p^2)T_{nmp}=0\Rightarrow$$

$$T_{nmp}(t)=C_{nmp}E_\alpha\left[(-1-n^2-m^2-p^2)t^\alpha\right]$$

Общее решение задачи (5) и (6):

$$u(x,y,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}C_{nmp}E_\alpha\left[(-1-n^2-m^2-p^2)t^\alpha\right].$$

$$\cdot\sin nx\cdot\sin my\cdot\sin pz.$$

Из условия (7) имеем

$$u(x,y,z,0)=\sin x\cdot\sin y\cdot\sin z=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}C_{nmp}\cdot\sin nx\cdot\sin my\cdot\sin pz\Rightarrow$$

$$C_{111}=1,\ C_{nmp}=0\ \ m\ne 1,\ n\ne 1,\ p\ne 1.$$

Точное решение задачи:

$$u(x,y,z,t)=E_\alpha\left(-4t^\alpha\right)\cdot\sin x\cdot\sin y\cdot\sin z.$$

2) По идею МВИ имеем формулу приближенного решения задачи (5)-(7):

$$u_{n+1}(x,y,z,t)=u_n(x,y,z,t)+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^t\lambda(\xi)\left[\frac{\partial^\alpha u_n(x,y,z,\xi)}{\partial\xi^\alpha}-\right.$$

$$-\frac{\partial^2\tilde{u}_n(x,y,z,\xi)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\tilde{u}_n(x,y,z,\xi)}{\partial y^2}-$$

$$\left.-\frac{\partial^2\tilde{u}_n(x,y,z,\xi)}{\partial z^2}+\tilde{u}_n(x,y,z,\xi)\right](d\xi)^\alpha.$$

Здесь $\lambda(\xi)$ - множитель Лагранжа, а для стационарного случая $\left.\frac{\partial^\alpha\lambda(\xi)}{\partial\xi^\alpha}\right|_{\xi=t}=0$, $1+\lambda(\xi)\big|_{\xi=t}=0$ и отсюда имеем $\lambda(\xi)=-1$.

$$u_{n+1}(x,y,z,t)=u_n(x,y,z,t)-\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\cdot$$

$$\cdot\int_0^t\left[\frac{\partial^\alpha u_n(x,y,z,\xi)}{\partial\xi^\alpha}-\frac{\partial^2\tilde{u}_n(x,y,z,\xi)}{\partial x^2}-\right.$$

$$-\frac{\partial^2\tilde{u}_n(x,y,z,\xi)}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\tilde{u}_n(x,y,z,\xi)}{\partial z^2}+$$

$$\left.+\tilde{u}_n(x,y,z,\xi)\right](d\xi)^\alpha.$$

Результаты применяя МВИ:

$$u_0(x,t)=u(x,0)=\sin x\sin y\sin z;$$

$$u_1(x,t)=\left(1-\frac{4t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\sin x\sin y\sin z;$$

$$u_2(x,t)=\left(1-\frac{4t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}+\frac{16t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}\right)\cdot$$

$$\cdot\sin x\sin y\sin z;\ \ldots;$$

$$u_n(x,t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(-4t^\alpha\right)^k}{\Gamma(1+k\alpha)}\sin x\sin y\sin z \text{ и т.д.}$$

Точное решение задачи:

$$u(x,y,z,t)=\lim_{n\to\infty}u_n(x,y,z,t)=$$

$$=E_\alpha\left(-4t^\alpha\right)\cdot\sin x\cdot\sin y\cdot\sin z.$$

3) Для МРА имеем формулу приближенного решения задачи (5)-(7):

$$\mathrm{I}_{0t}^{\alpha}\left(\frac{\partial^{\alpha}u(x,y,z,t)}{\partial t^{\alpha}}\right)=\mathrm{I}_{0t}^{\alpha}\left(\frac{\partial^{2}u(x,y,z,t)}{\partial x^{2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^{2}u(x,y,z,t)}{\partial y^{2}}+\frac{\partial^{2}u(x,y,z,t)}{\partial z^{2}}-u(x,y,z,t)\right)$$

$$\Rightarrow\ u(x,y,z,t)=\sin x\sin y\sin z+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\cdot$$

$$\cdot\int_0^t\left(\frac{\partial^{2}u(x,y,z,\xi)}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}u(x,y,z,\xi)}{\partial y^{2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^{2}u(x,y,z,\xi)}{\partial z^{2}}-u(x,y,z,\xi)\right)(d\xi)^{\alpha}.$$

По идею МРА: $u(x,y,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,y,z,t)\Rightarrow$

$$u_0(x,y,z,t)=\sin x\sin y\sin z\,;$$

$$u_1(x,y,z,t)=-\frac{4t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\sin x\sin y\sin z\,;$$

$$u_2(x,y,z,t)=\frac{16t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}\sin x\sin y\sin z;\ \ldots;$$

$$u_n(x,y,z,t)=\frac{\left(-4t^{\alpha}\right)^{n}}{\Gamma(1+n\alpha)}\sin x\sin y\sin z\quad \text{и т.д.}$$

Точное решение задачи:

$$u(x,y,z,t)=u_0(x,y,z,t)+u_1(x,y,z,t)+\ldots=$$

$$=E_{\alpha}\left(-4t^{\alpha}\right)\sin x\cdot\sin y\cdot\sin z.$$

Если α=1, то вместо уравнение (5) получим уравнение теплопроводности и ее точное решение имеет вид $u(x,t)=e^{-4t}\sin x\sin y\sin z$.

Выводы.

В данной работе получены точное решение уравнения диффузии дробного порядка по времени МВИ, МРА и МРП. Эту задачу точно также можно решать для случаев дробного порядка по пространству и их смещенного варианта. Законность и эффективность этих методов показывают, что методика решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка дает очень быструю достижимость к точным решениям. Результаты данной работы показывают, что эти методы очень сильные и эффективные, которые может построить точное решение нелинейных дифференциальных уравнений. Поэтому эти эффективные методы могут быть использованы в дальнейших работах, чтобы получить точное решение многих других нелинейных уравнений дробного порядка математической физики.

References:

1. Abdou M.A., Soliman A.A. (2005) New applications of variational iteration method. Phys. D, 211 (1-2) (2005), 1-8.
2. Bekir A., Akbulut A., Kaplan M. (2015) Exact Solutions of Nonlinear Evolution Equations by Using Modified Simple Equation Method // International Journal of Nonlinear Science. Vol.19 (2015) No.3, pp.159-164
3. He J.H. (2014) A Tutorial Re view on Fractal Spacetime and Fractional Calculus, International Journal of Theoretical Physics, 53 (2014), 11, pp. 3698-3718.
4. He J.H. (2009) An elementary introduction to the homotopy perturbation method. Computers and Mathematics with Applications. 57 (2009), pp. 410-412.
5. He J.H. (1999) Homotopy perturbation technique. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 178 (1999), pp. 257-262.
6. He J.H. (2007) Variational iteration method – some recent results and new interpretations, Journal of Computational and Applied Mathematics 207(1) (2007) 3–17.
7. He J.H., Wu X.H. (2007) Variational iteration method: New development and applications, Computers and Mathematics with Applications. 2007, 54 (7-8): 881-894.
8. He J.H., Wu X.H. (2006) Exp-function method for nonlinear wave equations. Chaos, Solitons and Fractals, 30 (2006), 700-708.
9. Hu, Y., He J.H. (2016) On Fractal Space-Time and Fractional Calculus. Thermal Science: Year 2016, Vol. 20, No. 3, pp. 773-777
10. Jawad A.J.M., Petkovic M.D., Biswas A. (2010) Modified simple equation method for nonlinear evolution equations // Appl. Math. Comput. 217 (2010), pp. 869-877.
11. Mirzazadeh M. (2014) Modified Simple Equation Method and its Applications to Nonlinear Partial Differential Equations // Inform. Sci. Lett. No. 1 (2014), pp. 1-9.

12. Wazwaz A.M. (2009) Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory. Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009. – 761 p.
13. Wazwaz A.M. (2004) The tanh method for traveling wave solutions of nonlinear equations, Appl. Math. Comput., 154 (2004) 714-723.
14. Wazwaz, A.M. (2004) A sine-cosine method for handling nonlinear wave equations. Mathematical and Computer Modelling, 40, (2004). 499–508.
15. Wu Guo-cheng, Lee E.W.M. (2010) Fractional variational iteration method and its application. Physics Letters A 374 (2010). 2506-2509.
16. Zayed E.M.E., Ibrahim S.A.H. (2012) Exact Solutions of Nonlinear Evolution Equations in Mathematical Physics Using the Modified Simple Equation Method // Chin. Phys. Lett. Vol. 29, No. 6 (2012), 060201.
17. Abdurashidov A.A. (2018) Tochnoye resheniye nekotorix nelineynix uravneniy Gardnera uproshyennim metodom ukorochennix razlojeniy // Mejdunarodniy setevoy nauchno-prakticheskiy jurnal «Nauka sredi nas». – Vipusk: 6, fevral 2018.
18. Abdurashidov A.A., Ortiqov B.B., Qadirov N.X., Abdirashidov A. (2018) Exact solution of nonlinear equations Burgers-Huxley, Korteweg-de Vries-Burgers and Klein-Gordon using the modified simple equation method // International Scientific Journal «Theoretical & Applied Science», №3, 2018. P.101-107.
19. Bisadze A.V., Kalinichenko D.F. (1985) Sbornik zadach po uravneniyam matematicheskoy fiziki. Ucheb. posobiye dlya mexaniko-matemat. i fiz. spes. vuzov. - 2-ye izd., dop. - M.: Nauka, 1985. - 310 p.
20. Kilbas A.A. (2009) Teoriya i prilojeniya differensialnix uravneniy drobnogo poryadka. – Samara: Izd-vo Samarskogo GU, 2009. – 121 p.
21. Kudryashov N.A. (2010) Metodi nelineynoy matematicheskoy fiziki: Uchebnoye posobiye. 2-ye izd. - Dolgoprudniy: Intellekt, 2010. - 368 p.
22. Salohiddinov M. (2002) Matematik fizika tenglamalari. – Toshkent: O'zbekiston, 2002. – 448 p.
23. Samko S.G., Kilbas A.A. Marichev O.I. (19887) Integrali i proizvodniye drobnogo poryadka i nekotorie ix prilojeniya. - Minsk: Nauka i texnika, 1987. – 688 p.