

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	PIHC (Russia) = 0.179	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 1.042	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

International Scientific Journal Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2016 Issue: 3 Volume: 35

Published: 30.03.2016 <http://T-Science.org>

Yunona Rinatovna Krakhmaleva

candidate of technical Sciences,
associate Professor of Mathematics,
Taraz state University named after M.Kh. Dulati,
Kazakhstan
yuna_kr@mail.ru

Andrey Titovets

master 2-year degree in Mathematics
Taraz state University named after M.Kh. Dulati,
Kazakhstan

SECTION 2. Applied mathematics. Mathematical modeling.

ANALYTICAL SOLUTION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS IN THE MAPLE

Abstract: We consider the problem of finding analytical solutions of linear partial differential equations with constant coefficients.

Key words: Maple, analytical solution, linear equation.

Language: Russian

Citation: Krakhmaleva YR, Titovets A (2016) ANALYTICAL SOLUTION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS IN THE MAPLE. ISJ Theoretical & Applied Science, 03 (35): 182-185.

Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-03-35-31> **Doi:**  <http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2016.03.35.31>

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В СРЕДЕ MAPLE

Аннотация: Рассматривается задача нахождения аналитического решения линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами.

Ключевые слова: Maple, аналитическое решение, линейное уравнение.

Нахождение аналитических решений уравнений в частных производных в среде Maple 17 осуществляется с помощью пакета PDEtools. Несмотря на достаточно большой набор инструментов пакета для работы с дифференциальными уравнениями в частных производных поиск их решения представляет собой достаточно сложную задачу, которая требует знания математических методов в данной области. Учитывая, тот факт, что СКМ имеют развитый язык программирования,

который содержит средства процедурного программирования, имеется возможность разрабатывать универсальные алгоритмы с помощью которых можно программировать формальное построение решения уравнения в частных производных, которые будут использованы для конкретных физических задач.

Рассмотрим задачу нахождения аналитического решения линейного уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами:

$$a_{11} \frac{\partial u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y^2} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y} + a_0 u + d = 0, \quad (1)$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0, d = const$,
 $u = u(x, y)$ - неизвестна функция.

Для нахождения общего решения воспользуемся стандартными средствами Maple.

`restart; with(PDEtools);`

Вводим значения постоянных $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0, d$ исходного уравнения, а затем уравнение (1):

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.179	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 1.042	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

$$a11 := ; b := ; a22 := ; a1 := ; a2 := ; a0 := ; d := ; a12 := \frac{b}{2};$$

$$\text{PDE1} := a11 \cdot \text{diff}(u(x, y), x, x) + 2 \cdot a12 \cdot \text{diff}(u(x, y), x, y) + a22 \cdot \text{diff}(u(x, y), y, y) + a1 \cdot \text{diff}(u(x, y), x) + a2 \cdot \text{diff}(u(x, y), y) + a0 \cdot u(x, y) + d = 0;$$

Находим значение определителя

$$D = a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22}, \quad (2)$$

для последующего установления факта принадлежности к типу исходного уравнения

используем составной оператор условного перехода :

```
dt := a122 - a11·a22;  
if (dt > 0) then uravnenie giperbolicheskogo tipa; fi;  
if (dt < 0) then uravnenie elipticheskogo tipa; fi;  
if (dt = 0) then uravnenie parabolicheskogo tipa; fi;
```

Принадлежность к типу уравнения дает возможность использовать программу `Maple-mapde ()`, которая преобразует исходное уравнение к каноническому уравнению в частных производных другого вида, которое, будет решаться командой `pdsolve()`. При этом надо иметь в виду, программа `mapde ()` преобразовывает исходное уравнение к каноническому виду, исходя из его принадлежности к типу. Это означает, если программу записать в виде `mapde (PDE, canom)`, то каноническая форма будет содержать только одну смешанную

производную, что соответствует гиперболическому типу. Если же программу записать в виде

`mapde (PDE, canop)`, то каноническая форма будет содержать частные производные 2 -го порядка по переменным и не будет содержать смешанную производную, что соответствует эллиптическому и параболическому типу. Для того, чтобы программа работала в общем случае и сама выбирала выполнение `canop` или `canom` снова используем составной оператор условного перехода:

```
if (dt = 0) then mapde(PDE1, canop); fi;  
if (dt > 0) or (dt < 0) then mapde(PDE1, canom); fi;
```

Общее решение находим, как указано выше, используя программу `pdsolve()`, которая найдет решение по новым переменным, согласно команды `mapde ()`. Для того, чтобы записать решение в исходных переменных подключаем программу `sol()`. Удостовериться в правильности нахождения найденного решения возможно с помощью команды `simplify ()`.

Описанную программу применим для нахождения общего решения уравнения в частных производных:

$$49 \frac{\partial u}{\partial x^2} - 14 \frac{\partial u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y^2} + 14 \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

```
restart; with(PDEtools);
```

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	PIHII (Russia) = 0.179	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 1.042	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

>

$a11 := 49; b := -14; a22 := 1; a1 := 14; a2 := -2; a0 := 0; d := -2; a12 := \frac{b}{2};$

$PDE1 := a11 \cdot \text{diff}(u(x, y), x, x) + 2 \cdot a12 \cdot \text{diff}(u(x, y), x, y) + a22$
 $\cdot \text{diff}(u(x, y), y, y) + a1 \cdot \text{diff}(u(x, y), x) + a2 \cdot \text{diff}(u(x, y), y) + a0$
 $\cdot u(x, y) + d = 0;$

$dt := a12^2 - a11 \cdot a22;$

if (dt > 0) **then** uravnenie giperbolicheskogo tipa; **fi**;

if (dt < 0) **then** uravnenie elipticheskogo tipa; **fi**;

if (dt = 0) **then** uravnenie parabolicheskogo tipa; **fi**;

if (dt = 0) **then** mapde(PDE1, canop); **fi**;

if (dt > 0) or (dt < 0) **then** mapde(PDE1, canom); **fi**;

$a11 := 49$

$a22 := 1$

$a1 := 14$

$a2 := -2$

$a0 := 0$

$d := -2$

$a12 := -7$

$$PDE1 := 49 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) \right) - 14 \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u(x, y) \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) + 14 \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) \right) - 2 \left(\frac{\partial}{\partial y} u(x, y) \right) - 2 = 0$$

$dt := 0$

uravnenie parabolicheskogo tipa

$$\left(-2 + 14 \left(\frac{\partial}{\partial \xi_2} u(-\xi_1, -\xi_2) \right) + 49 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} u(-\xi_1, -\xi_2) \right) \right) \&\text{where} \left\{ \begin{array}{l} -\xi_1 = y + \frac{1}{7} x, \\ -\xi_2 = x \\ = x \end{array} \right.$$

>

> op(%);

$$-2 + 14 \left(\frac{\partial}{\partial \xi_2} u(-\xi_1, -\xi_2) \right) + 49 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} u(-\xi_1, -\xi_2) \right), \left\{ \begin{array}{l} -\xi_1 = y + \frac{1}{7} x, \\ -\xi_2 = x \end{array} \right.$$

> pdsolve(%[1]);

$$u(-\xi_1, -\xi_2) = -\frac{7}{2} e^{-\frac{2}{7} \xi_2} _F1(-\xi_1) + \frac{1}{7} \xi_2 + _F2(-\xi_1)$$

> sol := u(x, y) = subs(%%[2], rhs(%));

$$sol := u(x, y) = -\frac{7}{2} e^{-\frac{2}{7} x} _F1\left(y + \frac{1}{7} x\right) + \frac{1}{7} x + _F2\left(y + \frac{1}{7} x\right)$$

> simplify(subs(sol, PDE1));

Impact Factor:

ISRA (India) = 1.344	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	PIHII (Russia) = 0.179	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 1.042	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 2.031	

$$49 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-\frac{7}{2} e^{-\frac{2}{7}x} {}_2F_1\left(y + \frac{1}{7}x\right) + \frac{1}{7}x + {}_2F_2\left(y + \frac{1}{7}x\right) \right) \right) - 14 \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left(-\frac{7}{2} e^{-\frac{2}{7}x} {}_2F_1\left(y + \frac{1}{7}x\right) + \frac{1}{7}x + {}_2F_2\left(y + \frac{1}{7}x\right) \right) \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(-\frac{7}{2} e^{-\frac{2}{7}x} {}_2F_1\left(y + \frac{1}{7}x\right) + \frac{1}{7}x + {}_2F_2\left(y + \frac{1}{7}x\right) \right) + 14 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{7}{2} e^{-\frac{2}{7}x} {}_2F_1\left(y + \frac{1}{7}x\right) + \frac{1}{7}x + {}_2F_2\left(y + \frac{1}{7}x\right) \right) \right) - 2 \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{7}{2} e^{-\frac{2}{7}x} {}_2F_1\left(y + \frac{1}{7}x\right) + \frac{1}{7}x + {}_2F_2\left(y + \frac{1}{7}x\right) \right) \right) - 2 = 0$$

> *simplify(lhs(%));*

0

Таким образом,

$$u(x, y) = -\frac{7}{2} e^{\frac{2}{7}y} F_1 \left(y + \frac{1}{7}x \right) + F_2 \left(y + \frac{1}{7}x \right) + \frac{1}{7}x,$$

F_1, F_2 - постоянные.

References:

1. Bitsadze AV (1982) Uravneniya matematicheskoy fiziki. Moscow: Nauka, 1982, -336p.
2. Vladimirov VS (1981) Uravneniya matematicheskoy fiziki. Moscow: Nauka, 1981, -512p.
3. Mikhaylov VP (1983) Differentsial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi. Moscow: Nauka, 1983, -424p.
4. Goloskokov DP (2004) Uravneniya matematicheskoy fiziki. Reshenie zadach v sisteme Maple uchebnik dlya vuzov - SPb.: Piter, 2004.-539 p.
5. D'yakonov VP (2006) Maple 9.5/10 v matematike, fizike i obrazovanii Izd: Piter, 2006.
6. (2010) «Reshenie obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy v pakete Maple», Metodicheskie ukazaniya k provedeniyu prakticheskikh zanyatiy. Novokuznetsk 2010.
7. (2012) «Postroenie grafikov v pakete Maple», Novokuznetsk 2012.
8. Sdvizhkov OA (2003) «Matematika na komp'yutere: Maple 8», Moscow SOLON – PRESS 2003.
9. (2016) Kratkoe posobie po Maple. 2016. Available: <http://mif.vspu.ru/books/mapletut/page4.html> (Accessed: 20.03.2016).

