Р. И. Паровик, Обобщенное уравнение Матье, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2011, выпуск 2(3), 12–17

DOI: http://dx.doi.org/10.18454/2079-6641-2011-3-2-12-17

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2011. № 2(3). С. 12-17. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2011-3-2-12-17

УДК 517.955

ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ МАТЬЕ

Паровик Р.И.

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7
Филиал Дальневосточного Федерального государственного университета, 683031, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Тушканова, 11/1
E-mail: romano84@mail.ru

Рассмотрена нелокальная модель волнового процесса,которая обобщает классическую модель парметрического резонанса Матье. Доказано, что такая модель имеет единственное решение.

Ключевые слова: оператор Капуто-Герасимова, формула Хилле-Тамаркина, интеграл Вольтерра второго рода

MSC 35C05

GENERALIZED EQUATIONS OF MATHIEU

Parovik R.I.

Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia
Branch of the Far Eastern Federal State University, 683 031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Tushkanova st., 11 / 1, Russia
E-mail: romano84@mail.ru

We consider a nonlocal model of the wave process, which generalizes the classical model parmetricheskogo resonance Mathieu. It is proved that this model has a unique solution.

Key words: Caputo-Gerasimov operator, , Hille-Tamarkin formula, the integral Volterra of the second kind

Введение

В последнее время широкое развитие получила теория нелокальных процессов, которые происходят в средах с фрактальными свойствами [1]. Эта теория хорошо вписывается в рамки физики открытых систем [2], основная идея, которой состоит в том, что окрытые системы активно взаимодействуют с внешней средой, обладают свойствами масштабной инвариантности, самоподобия и самоорганизацией. Процессы в таких системах будут являться нелокальными и нелинейными.

Бурно развивается одно из направлений теории нелокальных процессов–теория массопереноса во фрактальных средах [3] Такой интерес вызван тем, что процесс массопереноса в реальных средах является нелинейным и может обладать свойствами активной среды (аномальная диффузия). Нелокальные процессы можно описать используя хорошо разработанный математический аппарат дробного интегродифференцирования. Суть, которого в замене классических производных целого порядка на производные дробного порядка в ураненииях, описывающих процесс. Дробныей производные представляют собой интегральные операторы со степенным ядром типа Абеля и при определенных значениях дробного порядка переходят к классическим производным целого порядка

Решая уравнение в производных дробного порядка, мы фактически решаяем семейство уравнений и находим для каждого такого уравнения семейство его решений. Семейство уравнений и решений, в свою очередь, образуют некоторое функциональное пространство, которое дает возможность наиболее адекватно описать процессы в средах с фрактальными свойствами.

Определяющим параметром во фрактальной среде является ее фрактальная размерность. Установлено, что фрактальная размерность среды связана с порядком дробной производной, например для широкого класса грунтов можно считать эту зависимость прямо пропорциональной [4]. Здесь появляется класс обратных задач по определению дробного порядка производных входящих в уравнение того или иного процесса. Это позволит, например, более качественно исследовать напряженно-деформирование сотояние геосреды [5].

В настоящей работе предлагается обобщение уравнения Матье, которое характеризуется эффектом параметрического резонанса, суть которого состоит в увеличении амплитуды колебаний за счет изменения параметра колебательной системы [6]. Устанавливается существование и единственность решения этого уравнения.

Постановка задачи

$$\partial_{0t}^{\beta} u(\tau) + A\left[1 + m\cos_{\alpha}(\omega t)\right] u(t) = f(t), \qquad (1)$$

$$u(0) = u_1,\, u'(0) = u_2.$$

Здесь $\cos_{\alpha}(t) = E_{\alpha}(-t^{\alpha}) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)}$ – обобщенный косинус с параметром α (функция Миттаг-Леффлера), который при значении $\alpha = 2$ совпадает с обычным косинусом, введен в работе [7], т.е. $\cos_2(t) = \cos(t)$. Дробная производная (1) имеет смысл Герасимова - Капуто с параметром $1 < \beta < 2$. Параметры A, m, u_1, u_2, заданные константы.

Теорема. *Решение задачи (1) существует и единственно.*

Доказательство. Уравнение (1) можно преобразовать, действуя оператором $D_{0t}^{2-\beta}$ и дважды проинтегрируем, получим следующее интегральное уравнение:

$$u(t)+AD_{0t}^{-\beta}u(\tau)=f(t)-AmD_{0t}^{-\beta}\left[\cos_{\alpha}(\omega\tau)u(\tau)\right]+u_1+u_2t. \tag{2}$$

или

$$u(t)+AD_{0t}^{-\beta}u(\tau)=g(t). \tag{3}$$

Здесь $g(t)$ – правая часть уравнения (1). В работе [3] показано, что решением уравнения (3) будет следующее выражение

$$u(t)=g(t)-A\int\limits_0^t(t-\tau)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left[-A(t-\tau)^{\beta}\right]g(\tau)\,d\tau. \tag{4}$$

Здесь $E_{\beta,\beta}(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^{\beta k}}{\Gamma(\beta k+\beta)}$ – функция типа Миттаг-Леффлера. Решение (4) называют также формулой Хилле-Тамаркина. Подставляя выражение для функции $g(t)$ в формулу (4), получим следующее интегральное уравнение

$$u(t)=f(t)+u_1+u_2t-AmD_{0t}^{-\beta}\left[\cos_{\alpha}(\tau)u(\tau)\right]-$$

$$-A\int\limits_0^t\left(f(\tau)+u_1+u_2t-AmD_{0t}^{-\beta}\left[\cos_{\alpha}(\omega\tau)u(\tau)\right]\right)(t-\tau)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left[-A(t-\tau)^{\beta}\right]d\tau.$$

Преобразуем это уравнение, раскроем в его правой части скобки и получим три интеграла

$$u(t)=f(t)+u_1+u_2t-AmD_{0t}^{-\beta}\left[\cos_{\alpha}(\omega\tau)u(\tau)\right]-Au_1\int\limits_0^t(t-\tau)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left[-A(t-\tau)^{\beta}\right]d\tau-$$

$$-Au_2\int\limits_0^t\tau(t-\tau)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left[-A(t-\tau)^{\beta}\right]d\tau+\int\limits_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left[-A(t-\tau)^{\beta}\right]d\tau+ \tag{5}$$

$$+A^2m\int\limits_0^t D_{0\tau}^{-\beta}\left[\cos_{\alpha}(\omega\tau)u(\tau)\right](t-\tau)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left[-A(t-\tau)^{\beta}\right]d\tau.$$

Рассмотрим каждый интеграл в (5) по отдельности:

$$I_1=-Au_1\int\limits_0^t(t-\tau)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left[-A(t-\tau)^{\beta}\right]d\tau=-Au_1t^{\beta}E_{\beta,\beta+1}\left(-At^{\beta}\right)=u_1\left[E_{\beta,1}\left(-At^{\beta}\right)-1\right]. \tag{6}$$

Здесь мы использовали свойство функции типа Миттаг-Леффлера::

$$E_{\alpha,\beta}(z)-\frac{1}{\Gamma(\beta)}=zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z). \tag{7}$$

Аналогично второй интеграл будет иметь вид с учетом (7):

$$I_2=-Au_2\int\limits_0^t \tau\left(t-\tau\right)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left[-A\left(t-\tau\right)^{\beta}\right]d\tau=\left|v=t-\tau\right|=Au_2\int\limits_0^t\left(t-v\right)v^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left[-Av^{\beta}\right]dv=$$

$$=Au_2\int\limits_0^t\frac{v^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left(-Av^{\beta}\right)dv}{\left(t-v\right)^{-1}}=Au_2D_{0t}^{-2}\left[v^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left(-Av^{\beta}\right)\right]=-Au_2t^{\beta+1}E_{\beta,\beta+2}\left(-At^{\beta}\right)=$$

$$=u_2t(-At^{\beta})E_{\beta,\beta+2}\left(-At^{\beta}\right)=-u_2t\left[E_{\beta,2}\left(-At^{\beta}\right)-1\right].$$

Третий интеграл оставим без изменений. Четвертый интеграл с учетом коммутативности свертки и оператора дробного интегрирования, а так же согласно свойству (7) может быть записан так

$$I_4=A^2m\int\limits_0^t D_{0\tau}^{-\beta}\left[\cos_{\alpha}\left(\omega\tau\right)u\left(\tau\right)\right]\left(t-\tau\right)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left[-A\left(t-\tau\right)^{\beta}\right]d\tau=$$

$$=A^2m\int\limits_0^t\cos_{\alpha}\left(\omega\tau\right)u\left(\tau\right)D_{t\tau}^{-\beta}\left(t-\tau\right)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left[-A\left(t-\tau\right)^{\beta}\right]d\tau=$$

$$=A^2m\int\limits_0^t\cos_{\alpha}\left(\omega\tau\right)u\left(\tau\right)\left(t-\tau\right)^{2\beta-1}E_{\beta,2\beta}\left[-A\left(t-\tau\right)^{\beta}\right]d\tau=$$

$$=-Am\int\limits_0^t\left[t-\tau\right]^{\beta-1}\cos_{\alpha}\left(\omega\tau\right)u\left(\tau\right)\left(-A\right)\left[t-\tau\right]^{\beta}E_{\beta,2\beta}\left[-A\left(t-\tau\right)^{\beta}\right]d\tau=$$

$$=-Am\int\limits_0^t\left(t-\tau\right)^{\beta-1}\cos_{\alpha}\left(\omega\tau\right)u\left(\tau\right)\left(E_{\beta,\beta}\left[-A\left(t-\tau\right)^{\beta}\right]-\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)d\tau=$$

$$=-Am\int\limits_0^t\left(t-\tau\right)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left[-A\left(t-\tau\right)^{\beta}\right]\cos_{\alpha}\left(\tau\right)u\left(\tau\right)d\tau+\frac{Am}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^t\frac{\cos_{\alpha}\left(\tau\right)u\left(\tau\right)d\tau}{\left(t-\tau\right)^{1-\beta}}=$$

$$=-Am\int\limits_0^t\left(t-\tau\right)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left[-A\left(t-\tau\right)^{\beta}\right]\cos_{\alpha}\left(\tau\right)u\left(\tau\right)d\tau+AmD_{0t}^{-\beta}\left[\cos_{\alpha}\left(\tau\right)u\left(\tau\right)\right].$$

Подставляя полученные выражения в (7) приходим к следующему интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$u\left(t\right)=u_1+u_2t-AmD_{0t}^{-\beta}\left[\cos_{\alpha}\left(\omega\tau\right)u\left(\tau\right)\right]+u_1\left[E_{\beta,1}\left(-At^{\beta}\right)-1\right]+u_2t\left[E_{\beta,2}\left(-At^{\beta}\right)-1\right]-$$

$$-Am\int\limits_0^t\left(t-\tau\right)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left[-A\left(t-\tau\right)^{\beta}\right]\cos_{\alpha}\left(\omega\tau\right)u\left(\tau\right)d\tau+AmD_{0t}^{-\beta}\left[\cos_{\alpha}\left(\omega\tau\right)u\left(\tau\right)\right]= \qquad (8)$$

$$= u_1 E_{\beta,1}\left(-At^{\beta}\right) + u_2 t E_{\beta,2}\left(-At^{\beta}\right) - m\int_0^t A(t-\tau)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}\left[-A(t-\tau)^{\beta}\right]\cos_{\alpha}(\omega\tau)\,u(\tau)\,d\tau.$$

В более привычной записи уравнение (8) выглядит так

$$u(t) - m\int_0^t K(t,\tau)\,u(\tau)\,d\tau = g(t). \tag{9}$$

Здесь ядро - $K(t,\tau) = A(t-\tau)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left[-A(t-\tau)^{\beta}\right]\cos_{\alpha}(\omega\tau)$ и правая часть уравнения (9) имеет вид: $g(t) = u_1 E_{\beta,1}\left(-At^{\beta}\right) + u_2 t E_{\beta,2}\left(-At^{\beta}\right) + \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left[-A(t-\tau)^{\beta}\right] f(\tau)\,d\tau.$ Известно, что интегральное уравнение типа (9) разрешимы и имеют единственное решение [8]. □

Замечание. Заметим, что при значении параметра $m = 0$ уравнение (9) переходит в известное решение дробного осциллятора [7, 9]:

$$u(t) = u_1 E_{\beta,1}\left(-At^{\beta}\right) + u_2 t E_{\beta,2}\left(-At^{\beta}\right) + \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left[-A(t-\tau)^{\beta}\right] f(\tau)\,d\tau.$$

Заключение

В заключении хочется отметить, что развитие задачи (1) может осуществляться по следующим направлениям. Аналогично работам [10, 11] исследовать решение задачи, чтобы дать ответ на вопрос: есть ли в этом случае параметрический резонанс и если есть, то при каких условиях он происходит?.

Следующим направлением исследования является учет случайной правой части уравнения (1), т.е. необходимо рассмотреть стохастическое уравнение.

Еще одним направлением исследований является определение дробного параметра β по экспериментальным данным.

Библиографический список

1. Лукк А.А., Дещеревский А.В., Сидорин А.Я., Сидорин И.А. Вариации геофизических полей как проявления детерминированного хаоса во фрактальной среде. – М.: ОИФЗ РАН, 1996. – 210 с.

2. Климонтович Ю.Л. Введение в физику открытых систем. – М.: Янус-К, 2002. – 284 с.

3. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М: Физматлит, 2003. – 272 с.

4. Беданокова С.Ю. Математическое моделирование водного и солевого режимов в почвах с фрактальной организаций: Автореф. канд. физ.–мат. наук. – Таганрог, 2007. – 16 с.

5. Паровик Р.И. Дробный анализ временных рядов радоновых полей Южной Камчатки// Материалы Второго Международного Российско-Казахского симпозиума «Уравнения смешанного типа, родственные проблемы анализа и информатики», г. Нальчик, 23-27 мая 2011 г. – 2011. – С. 137-139.

6. Sinha S.C., Chou C.C., Denman H.H Stability analysis of systems with periodic coefficients: an approximate approach // Journal of Sound and Vibration. – 1979. – 64 (4). – P. 515-527.

7. Нахушева В.А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов – М.: Наука, 2006. – 173 с.

8. Трикоми Ф. Интегральные уравнения – М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. – 300 с.

9. Мейланов Р. П., Янполов М. С. Особенности фазовой траектории фрактального осциллятора // Письма в ЖТФ. – 2002. – є 1(28). – С. 67–73.

10. Rand R.H., Sah S.M., Suchrsky M.K. Fractional Mathieu equation // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. – 2010. – 15. – P. 3254-3262.

11. Van de Pol, F., Strutt, M. J. On the Stability of the Solutions of Mathieu's Equation. – Philos. – 1928. – Mag. – 5. – P. 18–38.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 10.10.2011