



## Formulación Lagrangiana-Euleriana Arbitraria del sistema de ecuaciones que modelan la interacción del flujo de aire con el alvéolo pulmonar

### Arbitrary Lagrangian - Eulerian formulation of the equations system which modeling the interaction of airflow with the pulmonary alveolus

Raúl E. Reupo Vallejos\*, Obidio Rubio\*\*, Alexis Rodriguez\*\*\*, and Luis J. Caucha\*\*\*\*

Received, Ag. 30, 2017

Accepted, Nov. 18, 2017

#### Resumen

*En este artículo, Formulamos un proceso fisiológico, a través de un problema de interacción fluido-estructura bidimensional entre el flujo de aire y el alvéolo pulmonar, en el marco de referencia Euleriano - Lagrangiano Arbitrario (ALE). Este problema se origina al acoplar las ecuaciones del fluido y de la estructura, descritas por las Ecuaciones de evolución de Navier-Stokes para flujos incompresibles, y una ecuación de equilibrio, respectivamente.*

**Palabras Claves:** Interacción Fluido-Estructura, flujo de aire, alvéolo pulmonar, marco de referencia Lagrangiano-Euleriano Arbitrario (ALE), Ecuaciones de Navier-Stokes, Ecuación de Equilibrio.

#### Abstract

*In this article, we formulate a physiological process through a two-dimensional fluid-structure interaction problem between the airflow and the pulmonary alveolus in the Eulerian-Lagrangian Arbitrary (ALE) frame. This problem arises by coupling the equations of the fluid and the structure, described by the Navier-Stokes equations of evolution for incompressible flows, and an equilibrium equation, respectively.*

**Keywords.** Fluid-Structure interaction, airflow, pulmonary alveolus, Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) framework, Navier-Stokes equations, equilibrium equation.

#### 1. Introducción.

En la última década, los problemas de interacción fluido-estructura han logrado gran interés en el campo de la Fisiología Humana; ya que estos modelan de forma casi realista el funcionamiento de los órganos y tejidos del ser humano. La gran mayoría de trabajos han abarcado problemas referentes a la hemodinámica ([1], [8],[19] [22], [23], [24], [25]), y a la dinámica del fluido en el sistema respiratorio humano ([4], [5]). Los problemas de interacción fluido-estructura, se originan por el acoplamiento de las ecuaciones que modelan la dinámica del fluido, junto con las del movimiento y deformación de la estructura; así como también, de ciertas condiciones impuestas sobre la zona de contacto del fluido con la estructura, a la cual se le llama interfaz.

Tradicionalmente, existen dos sistemas de coordenadas que se utilizan para estudiar la dinámica del fluido y la mecánica de sólidos, a saber: las coordenadas Eulerianas, centradas en el espacio; y las Lagrangianas, centradas en la partícula. El marco Lagrangiano, es apropiado para materiales, cuyas deformaciones son pequeñas, como por ejemplo los sólidos, y no para cuerpos con grandes deformaciones como son los fluidos. Para estos el marco Euleriano es el indicado.

Desde el punto de vista de los métodos numéricos, el marco Euleriano se caracteriza porque mientras el cuerpo está en movimiento, la malla permanece fija, por lo que no aparecen deformaciones de la malla; mientras que en el marco Lagrangiano, la malla se mueve junto a las partículas, quedando deformada también la malla.

\*Raul Reupo, Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas-Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, Perú (rreupo@unprg.edu.pe).

\*\*Obidio Rubio, Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo-Perú (orubio@unitru.edu.pe)

\*\*\* Alexis Rodriguez, Universidad Nacional de Trujillo, Trujillo-perú (alexlar20@yahoo.es)

\*\*\*\*Luis J. Caucha, Universidad Nacional de Tumbes, Tumbes-Perú (ljcaucham@untumbes.edu.pe).

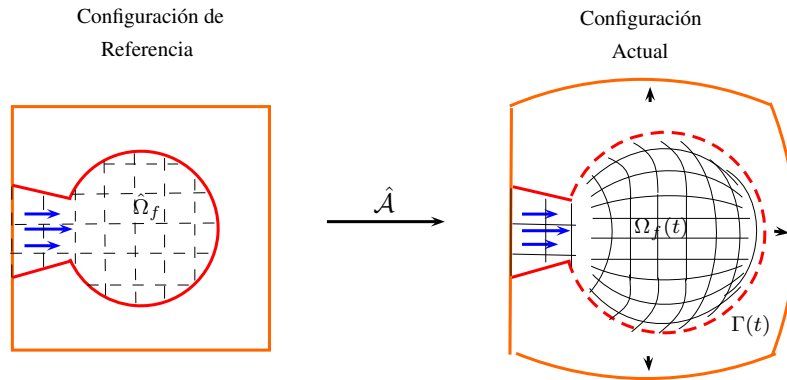


FIGURA 1.1. *Movimiento del Dominio del Fluido de acuerdo al movimiento de la Estructura*

Formular un problema de interacción fluido-estructura implica que las ecuaciones para el fluido y la estructura deben estar en el marco Euleriano y Lagrangiano respectivamente, surgiendo un problema en las condiciones sobre la interfaz, ya que estas se encontrarían en diferentes sistemas de coordenadas. Para solucionar este problema, los problemas de interacción fluido-estructura pueden ser estudiados en un marco puramente Euleriano ([6],[10] y [15]), completamente Lagrangiano ([2], [3], [13] y [12]), o en el sistema de coordenadas Lagrangiano-Euleriano Arbitrario (ALE) ([8],[7],[16] y [17]).

En el sistema de coordenadas ALE, no se sigue a las partículas; sin embargo se definen trayectorias arbitrarias permaneciendo dentro del marco de interés ([10]). Un problema de interacción fluido - estructura en este tipo de coordenadas, se centra en dos tipos de movimiento. Primero, el movimiento físico; y segundo el movimiento del dominio del fluido  $\Omega(t)$ , producido por el movimiento de la interfaz  $\Gamma(t)$  causada por la deformación del sólido, vea la figura 1.1. La gran ventaja desde el punto de vista numérico, de trabajar un problema de interacción fluido - estructura en este tipo de coordenadas, es que muy cerca de la interfaz, la malla se mueve junto con las partículas, lo que es ideal para adoptar un marco Lagrangiano; mientras que lejos de la interfaz la malla no se mueve, comportándose como en el sistema Euleriano.

En este artículo formulamos matemáticamente en el sistema de coordenadas ALE, un proceso fisiológico, que se origina de forma natural en el sistema respiratorio humano, para ser más específicos, en la unidad estructural donde se realiza el intercambio de oxígeno y  $CO_2$ , llamada alvéolo.

**2. Proceso Fisiológico del sistema respiratorio a nivel alveolar.** El proceso fisiológico que formulamos es la dinámica de la respiración a nivel alveolar, y está basado en el modelo dado por Dailey y Ghadiali ([4]). El alvéolo pulmonar constituye la unidad básica estructural de los pulmones, y es ahí en donde se produce el intercambio gaseoso entre el aire inspirado y el dióxido de carbono  $CO_2$  que trae la sangre después de haber llevado oxígeno  $O_2$  a todo el cuerpo humano.

Como lo afirma Dailey y Ghadiali ([4]), para poder modelar un proceso fisiológico a nivel alveolar, primero se debe entender el proceso de respiración. Al iniciar el proceso de la respiración, con la inspiración, se observa que los músculos realizan un proceso de contracción y a la vez toda la caja torácica tiende a desplazarse hacia arriba y también hacia afuera, mientras que el diafragma tiende a desplazarse hacia abajo. Este proceso hace que las tensiones que se generan en los tejidos se transfieran a través del parénquima pulmonar, originando que el alvéolo pulmonar se expanda.

La expansión del alvéolo, produce un aumento del volumen alveolar, y esto a su vez origina una presión subambiente en el interior del alvéolo, la cual impulsa el flujo de aire en los pulmones. Es decir, la presión dentro del alvéolo debe ser menor que la presión atmosférica para que se pueda originar un flujo de aire. Aquí la presión debe ser negativa.

Al finalizar el proceso de inspiración, el flujo de aire cesa, y esto se debe a que las presiones internas y externas se han igualado en el flujo de aire en el pulmón. Luego, como los músculos inspiratorios se relajan, el retroceso elástico disminuye el volumen alveolar y a la vez aumenta la presión de aire alveolar. El flujo de aire sale de los pulmones hasta que las presiones internas y externas se igualan nuevamente.

Al entender el proceso de respiración a nivel alveolar, Dailey y Ghadiali ([4]) afirman que, a nivel alveolar, la deformación del tejido impulsa al campo de flujo de aire. Por lo tanto la relación directa entre el movimiento del tejido y el flujo de aire en los alvéolos, originan de una manera natural, un problema de interacción fluido - estructura.

Así mismo, Dailey y Ghadiali ([4]) afirman, que en vez de imponer arbitrariamente el movimiento de la pared alveolar, el modelo transmite las cargas a través de los tejidos a la pared alveolar. En este modelo las propiedades de los tejidos tales como la elasticidad y viscosidad influyen en el movimiento de la pared

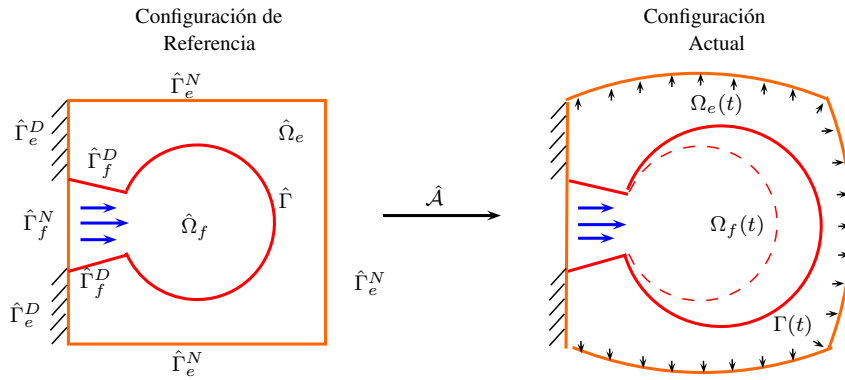


FIGURA 3.1. Interacción del flujo de aire con el tejido a nivel alveolar

alveolar.

**3. Formulación matemática de la interacción del flujo de aire con el alvéolo pulmonar.** El proceso fisiológico, de la interacción del flujo de aire con el alvéolo pulmonar se realiza en un dominio del espacio  $\mathbb{R}^3$ ; Sin embargo, aquí formulamos matemáticamente el problema, en un dominio del espacio  $\mathbb{R}^2$ , el cual se está moviendo a través del tiempo como se muestra en la figura 3.1.

**3.1. Notación.** Nosotros denotamos por  $\Omega_f(t) = \Omega_f \times I$  y  $\Omega_e(t) = \Omega_e \times I$ , donde  $\Omega_f, \Omega_e \subset \mathbb{R}^2$  y  $I = [0, T]$  es un intervalo de tiempo, al dominio en movimiento ocupado por el fluido (flujo de aire) y la estructura (alvéolo) en el tiempo  $t \in [0, T]$ , respectivamente;  $\partial\Omega_f(t)$  y  $\partial\Omega_e(t)$  denotan las fronteras de  $\Omega_f(t)$  y  $\Omega_e(t)$  respectivamente.

Además,  $\Gamma(t) = \partial\Omega_f(t) \cap \partial\Omega_e(t) \neq \emptyset$ , denota a la interfaz.  $\Gamma_f^D(t)$  y  $\Gamma_e^D(t)$  denotan a las partes de la fronteras  $\partial\Omega_f(t)$  y  $\partial\Omega_e(t)$ , con condiciones de tipo Dirichlet para el fluido y la estructura, respectivamente.  $\Gamma_f^N(t)$  y  $\Gamma_e^N(t)$  denotan las partes de la fronteras  $\partial\Omega_f(t)$  y  $\partial\Omega_e(t)$  con condiciones de tipo Neumann para el fluido y la estructura, respectivamente. Así mismo  $\Gamma(t), \Gamma_f^D(t), \Gamma_f^N(t), \Gamma_e^D(t), \Gamma_e^N(t) \subset \mathbb{R}$ .

**3.2. Formulación del problema para el fluido.** Sean  $v_f : \Omega_f(t) \rightarrow \mathbb{R}^2$ , la velocidad del fluido;  $p : \Omega_f(t) \rightarrow \mathbb{R}$  la presión en el fluido.  $\rho : \Omega_f(t) \rightarrow \mathbb{R}$  la densidad del fluido. Además,  $\nu$  denota la viscosidad cinemática del fluido, y  $\sigma_f$  es el tensor de tensiones de Cauchy.

Supóngase que el flujo de aire a nivel alveolar, se comporta como un fluido Newtoniano, incompresible y cuya densidad es constante. Entonces, según Dailey y Ghadiali ([4]), este flujo de aire estará modelado por las Ecuaciones de Navier-Stokes incompresible.

Además, supóngase que  $\Gamma_f^D(t)$  se mantiene fija en todo tiempo  $t \in [0, T]$ , es decir,  $\Gamma_f^D(t)$  no va sufrir ninguna deformación a lo largo de todo tiempo, vea la figura 3.1. Sin embargo, aquí, la velocidad se comporta como la función  $v_f^D = v_f^D(x, t)$ , la cual debe estar definida sobre  $\Gamma_f^D(t)$ .

$\Gamma_f^N(t)$  es la parte de la frontera por donde ingresa el flujo de aire al alvéolo, y también por donde sale el  $CO_2$ , vea la figura 3.1; aquí no se conoce el valor de la velocidad del fluido, sin embargo se supondrá que las tensiones en la dirección del vector normal  $\vec{n}_f$  están dadas por la relación  $\sigma_f \cdot \vec{n}_f = g_f$ , donde  $g_f = g_f(x, t)$  debe estar definida sobre  $\Gamma_f^N(t)$ . Es importante mencionar que por la misma característica de esta parte de la frontera, se supone que no sufre ninguna deformación en todo tiempo, es decir al igual que  $\Gamma_f^D(t), \Gamma_f^N(t)$  se mantiene fija en todo  $t \in [0, T]$ .

Por otro lado, con respecto a la velocidad inicial del fluido, se tendrá que en el instante  $t = 0$ , la velocidad del fluido, se comporta como la función  $v_f^0 = v_f^0(x)$ , la cual debe estar definida sobre  $\Omega_f$ . ; así mismo se supone que a nivel alveolar no actúa fuerza externa alguna (como por ejemplo, la gravedad). Con todos los supuestos dados anteriormente, el problema del fluido se expresa matemáticamente como:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \partial_t v_f + \rho(v_f \cdot \nabla)v_f - \text{div}(\sigma_f) = 0 & \text{en } \Omega_f(t) \\ \text{div}(v_f) = 0 & \text{en } \Omega_f(t) \\ v_f(x, 0) = v_f^0(x) & \text{en } \Omega_f \\ v_f(x, t) = v_f^D(x, t) & \text{en } \Gamma_f^D(t) \\ \sigma_f \cdot \vec{n}_f = g_f(x, t) & \text{en } \Gamma_f^N(t) \end{array} \right. \quad (3.1)$$

donde el tensor de tensiones de Cauchy  $\sigma_f$ , satisface la Ley constitutiva

$$\sigma_f = -pI + \rho\nu(\nabla v_f + \nabla v_f^T) \tag{3.2}$$

donde  $I$  es el tensor identidad.

**3.3. Formulación del problema para la estructura.** En esta sección se formulará el problema de la estructura en el marco Lagrangiano Sea  $\hat{u}_e : \hat{\Omega}_e \rightarrow \mathbb{R}^2$ , un campo de deformación diferenciable en el dominio de referencia  $\hat{\Omega}_e$ ,  $\hat{v}_e = d_t \hat{u}_e$  la velocidad material,  $\hat{E}$  el módulo de Young,  $\hat{\eta}$  viscosidad del tejido; además  $\sigma_e$  es el tensor de tensiones en coordenadas Euleriana,  $\hat{\Sigma}$  el segundo tensor de Piola Kirchhoff (ver definición 4.5).

Debido a la presencia de propiedades viscosas y elásticas del tejido, cuando se deforman. Se supondrá que la estructura (los tejidos alrededor del alvéolo) se comporta como un material viscoelástico. Aquí, la deformación depende del tiempo; y el tensor de tensiones depende tanto de la deformación como de la velocidad de deformación ([14]). Además, se asumirá que la deformación es en forma homogénea. Entonces, según Dailey y Ghadiali ([4]), esta estructura estará modelada por la ecuación de equilibrio

$$\widehat{div}(\hat{F}_e \hat{\Sigma}) = 0$$

Supóngase que  $\hat{\Gamma}_e^D$  se mantiene fija, es decir,  $\hat{\Gamma}_e^D$  no sufre deformación, vea la figura 3.1. Con esta condición,  $\hat{u}_e = 0$ , y esto implica que  $\hat{v}_e = 0$  sobre  $\hat{\Gamma}_e^D$ .

La frontera  $\hat{\Gamma}_e^N$  si sufre deformación, vea la figura 3.1; pero aquí, se impondrá la condición sobre las tensiones en la dirección del vector normal  $\hat{n}_e$ , que se formula como:  $\sigma_e \cdot \hat{n}_e = 0$ , (en coordenadas Eulerianas), y que en el marco Lagrangiano se expresa de la siguiente manera  $\hat{F}_e \hat{\Sigma} \cdot \hat{n}_e = 0$ .

Por otro lado, para las condiciones iniciales  $\hat{u}_e$  y  $\hat{v}_e$ , se asumirá que sobre  $\hat{\Omega}_e$ ,  $\hat{u}_e(\hat{x}, 0) = \hat{u}_e^0(\hat{x})$  y  $\hat{v}_e(\hat{x}, 0) = \hat{v}_e^0(\hat{x})$ . Con respecto al tensor de tensiones,  $\sigma_e$ , satisface la ley constitutiva de Kelvin-Voigt, es decir

$$\sigma_e = E\varepsilon + \eta \frac{d}{dt} \varepsilon$$

con

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\hat{\nabla} \hat{u}_e + \hat{\nabla} \hat{u}_e^T)$$

y

$$\frac{d}{dt} \varepsilon = \frac{1}{2}(\hat{\nabla} \hat{v}_e + \hat{\nabla} \hat{v}_e^T)$$

Por lo tanto, el problema de la estructura en el marco Lagrangiano, se expresa matemáticamente como:

$$\begin{cases} \widehat{div}(\hat{F}_e \hat{\Sigma}) = 0 & \text{en } \hat{\Omega}_e \\ \hat{u}_e(\hat{x}, 0) = \hat{u}_e^0(\hat{x}) & \text{en } \hat{\Omega}_e \\ \hat{v}_e(\hat{x}, 0) = \hat{v}_e^0(\hat{x}) & \text{en } \hat{\Omega}_e \\ \hat{u}_e(\hat{x}, t) = 0 & \text{en } \hat{\Gamma}_e^D \\ \hat{F}_e \hat{\Sigma} \cdot \hat{n}_e = 0 & \text{en } \hat{\Gamma}_e^N \end{cases} \tag{3.3}$$

donde

$$\hat{F}_e \hat{\Sigma} = \hat{J}_e \hat{\sigma}_e \hat{F}_e^{-T} \tag{3.4}$$

$$\hat{\sigma}_e = \frac{\hat{E}}{2}(\hat{\nabla} \hat{u}_e \hat{F}_e^{-1} + \hat{F}_e^{-T} \hat{\nabla} \hat{u}_e^T) + \frac{\hat{\eta}}{2}(\hat{\nabla} \hat{v}_e \hat{F}_e^{-1} + \hat{F}_e^{-T} \hat{\nabla} \hat{v}_e^T)$$

Por lo tanto

$$\hat{F}_e \hat{\Sigma} = \frac{\hat{E}}{2}(\hat{\nabla} \hat{u}_e \hat{F}_e^{-1} \hat{J}_e \hat{F}_e^{-T} + \hat{F}_e^{-T} \hat{\nabla} \hat{u}_e^T \hat{J}_e \hat{F}_e^{-T}) + \frac{\hat{\eta}}{2}(\hat{\nabla} \hat{v}_e \hat{F}_e^{-1} \hat{J}_e \hat{F}_e^{-T} + \hat{F}_e^{-T} \hat{\nabla} \hat{v}_e^T \hat{J}_e \hat{F}_e^{-T}) \tag{3.5}$$

**3.4. Condiciones de acoplamiento para la interacción fluido-estructura.** Suponiendo que a nivel alveolar, la viscosidad es pequeña, entonces, según Dailey y Ghadiali ([4]), y Richter ([15]), se impone la condición cinemática sobre  $\Gamma(t)$ , asumiendo la continuidad de la velocidad normal, es decir:

$$\vec{n}_f \cdot v_f(x, t) = -\vec{n}_e \cdot v_e(x, t), \quad \text{en } \Gamma(t) \tag{3.6}$$

Así también, siguiendo el principio de la Tercera Ley de Newton, es decir, que a toda acción existe una reacción, se impone la condición dinámica sobre  $\Gamma(t)$  ([4], [15]), es decir:

$$\sigma_f \cdot \vec{n}_f = -\sigma_e \cdot \vec{n}_e, \quad \text{en } \Gamma(t) \tag{3.7}$$

donde:  $\vec{n}_f$  y  $\vec{n}_e$  son los vectores normales.

**3.5. Sistema de Ecuaciones que modelan el flujo de aire y su interacción con el alvéolo pulmonar.** Las ecuaciones para el fluido (3.1) y estructura (3.3), junto con las condiciones (3.6) y (3.7), originan el problema (3.1)

**PROBLEMA 3.1.** *Encontrar la velocidad del fluido  $v_f$  y presión  $p$ , así como también la deformación de la estructura  $\hat{u}_e$  y velocidad  $\hat{v}_e$ ; tal que  $v_f(x, 0) = v_f^0(x)$ ,  $\hat{u}_e(x, 0) = \hat{u}_e^0(x)$ ,  $\hat{v}_e(x, 0) = \hat{v}_e^0(x)$ , y*

$$\begin{aligned} \text{Ecuaciones del fluido} & \quad \begin{cases} \rho \partial_t v_f + \rho(v_f \cdot \nabla)v_f - \text{div}(\sigma_f) = 0 & \text{en } \Omega_f(t) \\ \text{div}(v_f) = 0 & \text{en } \Omega_f(t) \end{cases} \\ \text{Ecuación de la estructura} & \quad \begin{cases} \widehat{\text{div}}(\hat{F}_e \hat{\Sigma}) = 0 & \text{en } \hat{\Omega}_e \end{cases} \\ \text{Condiciones de Dirichlet} & \quad \begin{cases} v_f(x, t) = v_f^D(x, t) & \text{en } \Gamma_f^D(t) \\ \hat{u}_e(\hat{x}, t) = 0 & \text{en } \hat{\Gamma}_e^D \end{cases} \\ \text{Condiciones de Neumann} & \quad \begin{cases} \sigma_f \cdot \vec{n}_f = g_f(x, t) & \text{en } \Gamma_f^N(t) \\ \hat{F}_e \hat{\Sigma} \cdot \hat{n}_e = 0 & \text{en } \hat{\Gamma}_e^N \end{cases} \\ \text{Condiciones en la Interfaz} & \quad \begin{cases} \vec{n}_f \cdot v_f = -\hat{n}_e \cdot (\hat{v}_e \circ \hat{T}^{-1}), & \text{en } \Gamma(t) \\ \hat{J}_f \hat{\sigma}_f \hat{F}_f^{-T} \cdot \vec{n}_f = -\hat{F}_e \hat{\Sigma}_e \cdot \hat{n}_e, & \text{en } \hat{\Gamma} \end{cases} \end{aligned} \tag{3.8}$$

En este acoplamiento, se observa que las condiciones cinemática y dinámica, se encuentran en coordenadas Eulerianas y Lagrangianas, respectivamente. De esta manera, las condiciones sobre la interfaz viven entre ambos subproblemas (para el fluido y estructura), cuando lo ideal es que ellas se encuentren en un mismo sistema de coordenadas, es por ello que a continuación, se formula el problema (3.1), en el marco de referencia ALE.

**4. Formulación matemática de la interacción del flujo de aire con el alvéolo pulmonar en el marco de referencia ALE.**

**4.1. Mapeo ALE.** El acoplamiento de las ecuaciones del fluido (3.1) y de la estructura (3.3), trae como consecuencia que los dominios  $\Omega_f(t)$  y  $\Omega_e(t)$  sean desconocidos a priori ([18]). Para lograr el acoplamiento de estas ecuaciones, en el sistema de coordenadas ALE, se considerará un solo dominio  $\Omega(t) = \Omega \times I$ , donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  y  $I = [0, T]$  es un intervalo de tiempo, que resulta de la unión de los dominios  $\Omega_f(t)$  y  $\Omega_e(t)$ , de la frontera  $\Gamma_f^D(t)$  y de la interfaz  $\Gamma(t)$ , es decir:

$$\Omega(t) = \Omega_f(t) \cup \Gamma_f^D(t) \cup \Gamma(t) \cup \Omega_e(t)$$

y, además

$$\partial\Omega(t) = \Gamma_f^N(t) \cup \Gamma_e^D(t) \cup \Gamma_e^N(t)$$

$$\Gamma(t) = \overline{\Omega_f(t)} \cap \overline{\Omega_e(t)} \setminus \Gamma_f^D(t)$$

Por la misma definición del dominio  $\Omega(t)$ , se dice que éste se encuentra en movimiento. Supóngase que en el instante  $t_0 \in [0, T]$  todo el dominio  $\Omega(t)$ , es fijado. Por lo tanto el acoplamiento de las ecuaciones (3.1) y (3.3), se reformulará sobre el dominio fijo  $\hat{\Omega} = \Omega(t_0)$ . De esta manera, se introduce una configuración de referencia, denotando por

$$\hat{\Omega} = \hat{\Omega}_f \cup \hat{\Gamma}_f^D \cup \hat{\Gamma} \cup \hat{\Omega}_e(t)$$

y  $\Gamma(t) = \overline{\hat{\Omega}_f} \cap \overline{\hat{\Omega}_e} \setminus \hat{\Gamma}_f^D$ . Donde  $\hat{\Omega}_f \subset \hat{\Omega}$  es el dominio fijo para el fluido, y  $\hat{\Omega}_e = \Omega \setminus \overline{\hat{\Omega}_f} \subset \Omega$  el dominio fijo para la estructura. Además la interfaz  $\hat{\Gamma} = \partial\hat{\Omega}_f \cap \partial\hat{\Omega}_e \setminus \hat{\Gamma}_f^D$  es asumida de clase  $C^{1,1}$ .

Definamos una transformación  $\hat{\mathcal{A}} : \hat{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \Omega(t)$ , tal que

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}} : \hat{\Omega}_e \times [0, T] &\rightarrow \Omega_e(t) \subset \Omega(t) \\ (\hat{x}, t) &\rightarrow \hat{\mathcal{A}}(\hat{x}, t) = \hat{x} + \hat{u}_e(\hat{x}, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}} : \hat{\Omega}_f \times [0, T] &\rightarrow \Omega_f(t) \\ (\hat{x}, t) &\rightarrow \hat{\mathcal{A}}(\hat{x}, t) = \hat{x} + \hat{u}_f(\hat{x}, t) \end{aligned}$$

donde, la deformación  $\hat{u}_f$ , del dominio  $\hat{\Omega}_f$ , satisface la ecuación armónica ([1],[9],[15],[19],[21],[22],[23])

$$\begin{aligned} -\hat{\Delta}\hat{u}_f &= 0 && \text{en } \hat{\Omega}_f \\ \hat{u}_f &= \hat{u}_e && \text{en } \hat{\Gamma} \\ \hat{u}_f &= 0 && \text{en } \hat{\Gamma}_f^D \cup \hat{\Gamma}_f^N \end{aligned} \tag{4.1}$$

La transformación  $\hat{\mathcal{A}}$  es llamada el *mapeo ALE*, y  $\hat{x}$  hace referencia a las coordenadas ALE ([11],[15], [16],[17],[18],[19],[20], [24]). El mapeo ALE, ayuda a realizar la deformación arbitraria del dominio del fluido, de tal manera que en la interfaz, esta deformación es igual a la de la estructura.

Nosotros denotaremos al gradiente de  $\hat{\mathcal{A}}$  como

$$\hat{\nabla}\hat{\mathcal{A}} = \hat{F} = \begin{cases} \hat{F}_f, & \text{en } \hat{\Omega}_f \\ \hat{F}_e, & \text{en } \hat{\Omega}_e \end{cases}$$

y su determinante

$$\det(\hat{F}) = \hat{J} = \begin{cases} \det(\hat{F}_f) = \hat{J}_f, \\ \det(\hat{F}_e) = \hat{J}_e, \end{cases}$$

A continuación mencionamos algunos resultados que serán importantes al momento de expresar en coordenadas ALE las ecuaciones del fluido y de la estructura. En los siguientes resultados, se entenderá a  $\hat{W}$  como el dominio de referencia, que para nosotros, pueden ser  $\hat{\Omega}$ ,  $\hat{\Omega}_f$  o  $\hat{\Omega}_e$ .

LEMA 4.1 (MAPEO INVERSO). Sea  $\mathcal{A} : \Omega(t) \rightarrow \hat{W} \times I$  el mapeo inverso de  $\hat{\mathcal{A}}$ , por  $F_W := \nabla\mathcal{A}$  su gradiente, y por  $J_W := \det(F_W)$  su determinante. Entonces se cumple:

$$F_W = \hat{F}_W^{-1}, \quad J_W = \hat{J}_W^{-1}, \quad \partial_t\mathcal{A} = -\hat{F}_W^{-1}\partial_t\hat{\mathcal{A}}$$

*Proof.* Para la demostración revisar ([15], Lema 4, pag. 14)  $\square$

OBSERVACIÓN 4.2. Para una función escalar  $f : \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}$  y un campo vectorial  $\omega : \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , se cumple que

$$\nabla f = \hat{F}_W^{-T}\hat{\nabla}\hat{f}, \quad \nabla\omega = \hat{\nabla}\hat{\omega}\hat{F}_W^{-1} \tag{4.2}$$

donde  $\hat{f} : \hat{W} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\hat{\omega} : \hat{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$

*Proof.* Ver ([15], pag. 14)  $\square$

LEMA 4.3 (TRANSFORMACIÓN DE DERIVADAS TEMPORALES). Sea  $f : \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\hat{f} : \hat{W} \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces se cumple:

$$\partial_t f = \partial_t\hat{f} - (\hat{F}_W^{-1}\partial_t\hat{\mathcal{A}} \cdot \hat{\nabla})\hat{f} \tag{4.3}$$

y

$$d_t f = \partial_t\hat{f} + (\hat{F}_W^{-1}(\hat{v} - \partial_t\hat{\mathcal{A}}) \cdot \hat{\nabla})\hat{f} \tag{4.4}$$

*Proof.* Para la demostración, revisar ([15], Lema 5, pag. 14)  $\square$

LEMA 4.4 (TRANSFORMACIÓN DE PIOLA). Sea  $\omega : \Omega(t) \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial diferenciable y  $\hat{\omega} : \hat{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$  su representación en el sistema de referencia  $\hat{W}$ . La transformación de Piola de  $\omega$  es dada por

$$\hat{J}_W\hat{F}_W^{-1}\hat{\omega}$$

Sobre cada volumen  $\Omega(t)$  con su correspondiente volumen de referencia  $\hat{W}$  se cumple

$$\int_{\partial\Omega(t)} \vec{n} \cdot \omega ds = \int_{\partial\hat{W}} \hat{\vec{n}} \cdot (\hat{J}_W \hat{F}_W^{-1} \hat{\omega}) d\hat{s} \quad (4.5)$$

$$\int_{\Omega(t)} \operatorname{div}(\omega) dx = \int_{\hat{W}} \widehat{\operatorname{div}}(\hat{J}_W \hat{F}_W^{-1} \hat{\omega}) d\hat{x} \quad (4.6)$$

Además, en un sentido puntual, se cumple

$$\hat{J}_W \operatorname{div}(\omega) = \widehat{\operatorname{div}}(\hat{J}_W \hat{F}_W^{-1} \hat{\omega}) \quad (4.7)$$

*Proof.* Para la demostración, revisar ([15], Lema 6, pag. 16)  $\square$

DEFINICIÓN 4.5. El Primer Tensor de tensiones de Piola Kirchhoff está dado por

$$\hat{P} := \hat{J}_W \hat{\sigma} \hat{F}_W^{-T}$$

El segundo tensor de tensiones de Piola Kirchhoff, está dado por

$$\hat{\Sigma} := \hat{F}_W^{-1} \hat{P}$$

**4.2. Problema del Fluido en Coordenadas ALE.** Siguiendo de lo realizado por Richter ([15]), al utilizar los Lemas 4.3 y 4.4, se tiene que

$$\partial_t v = \partial_t \hat{v} - (\hat{F}_W^{-1} \partial_t \hat{A} \cdot \hat{\nabla}) \hat{v}$$

por otro lado,

$$(v \cdot \nabla) v = \nabla v v = \hat{\nabla} \hat{v} \hat{F}_W^{-1} \hat{v} = (\hat{F}_W^{-1} \hat{v} \cdot \hat{\nabla}) \hat{v}$$

luego

$$\begin{aligned} \partial_t v + (v \cdot \nabla) v &= \partial_t \hat{v} - (\hat{F}_W^{-1} \partial_t \hat{A} \cdot \hat{\nabla}) \hat{v} + (\hat{F}_W^{-1} \hat{v} \cdot \hat{\nabla}) \hat{v} \\ &= \partial_t \hat{v} + (\hat{F}_W^{-1} (\hat{v} - \partial_t \hat{A}) \cdot \hat{\nabla}) \hat{v} \end{aligned}$$

Además, por la ecuación (4.7), y la transformación de Piola, se cumple

$$\nabla \cdot \sigma = \operatorname{div}(\sigma) = \hat{J}_W^{-1} \widehat{\operatorname{div}}(\hat{J}_W \hat{\sigma} \hat{F}_W^{-T})$$

luego,

$$\int_{\Omega(t)} (\rho \partial_t v + \rho v \cdot \nabla v - (\nabla \cdot \sigma) - \rho f) dx = \int_{\hat{W}} \hat{J}_W (\rho \partial_t \hat{v} + \rho \hat{v} \cdot \hat{\nabla} \hat{v} - (\widehat{\operatorname{div}}(\hat{J}_W \hat{\sigma} \hat{F}_W^{-T}) - \hat{J}_W \rho f)) d\hat{x}$$

por otro lado, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\hat{W}} \hat{J}_W (\rho \partial_t \hat{v} + \rho \hat{v} \cdot \hat{\nabla} \hat{v} - (\nabla \cdot \sigma) - \rho f) d\hat{x} &= \int_{\hat{W}} [\hat{J}_W (\partial_t \hat{v} + (\hat{F}_W^{-1} (\hat{v} - \partial_t \hat{A}) \cdot \hat{\nabla}) \hat{v}) \\ &\quad - \widehat{\operatorname{div}}(\hat{J}_W \hat{\sigma} \hat{F}_W^{-T}) - \hat{J}_W \rho f] d\hat{x} \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene la siguiente relación en  $\hat{W} = \hat{\Omega}_f$

$$\hat{J}_W (\rho \partial_t \hat{v} + \rho \hat{v} \cdot \hat{\nabla} \hat{v} - (\nabla \cdot \sigma) - \rho f) = \hat{J}_W (\partial_t \hat{v} + (\hat{F}_W^{-1} (\hat{v} - \partial_t \hat{A}) \cdot \hat{\nabla}) \hat{v}) - \widehat{\operatorname{div}}(\hat{J}_W \hat{\sigma} \hat{F}_W^{-T}) - \hat{J}_W \rho f$$

luego, denotando,  $\hat{J}_f = \hat{J}_W$ ,  $\hat{F}_f^{-1} = \hat{F}_W^{-1}$  y  $\hat{F}_f^{-T} = \hat{F}_W^{-T}$ . Entonces las ecuaciones para el fluido, en coordenadas ALE, se expresan como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{J}_f \rho (\partial_t \hat{v}_f + (\hat{F}_W^{-1}(\hat{v}_f - \partial_t \hat{\mathcal{A}}) \cdot \hat{\nabla}) \hat{v}_f) - \widehat{div}(\hat{J}_f \hat{\sigma}_f \hat{F}_f^{-T}) = 0 \quad \text{en } \hat{\Omega}_f \\ \widehat{div}(\hat{J}_f \hat{F}_f^{-1} \hat{v}_f) = 0 \quad \text{en } \hat{\Omega}_f \\ \hat{v}_f(\hat{x}, 0) = \hat{v}_f^0(\hat{x}) \quad \text{en } \hat{\Omega}_f \\ \hat{v}_f(\hat{x}, t) = \hat{v}_f^D(\hat{x}, t) \quad \text{en } \hat{\Gamma}_f^D \\ \hat{J}_f \hat{\sigma}_f \hat{F}_f^{-T} \cdot \hat{n}_f = \hat{g}_f(\hat{x}, t) \quad \text{en } \hat{\Gamma}_f^N \end{array} \right. \quad (4.8)$$

donde:

$$\hat{\sigma}_f = -\hat{p}I + \rho\nu(\hat{\nabla}\hat{v}_f\hat{F}_f^{-1} + \hat{F}_f^{-T}\hat{\nabla}\hat{v}_f^T) \quad (4.9)$$

y, además

$$\begin{aligned} \hat{v}_f(\hat{x}, 0) &= \hat{v}_f^0(\hat{x}) = v_f^0(\hat{\mathcal{A}}(\hat{x}, t), t) \\ \hat{v}_f(\hat{x}, t) &= \hat{v}_f^D(\hat{x}, t) = v_f^D(\hat{\mathcal{A}}(\hat{x}, t), t), \quad \text{en } \hat{\Gamma}_f^D \\ \hat{g}_f(\hat{x}, t) &= g_f(\hat{\mathcal{A}}(\hat{x}, t), t) \end{aligned}$$

**4.3. Problema de la Estructura en Coordenadas ALE.** Con respecto al problema de la estructura en coordenadas ALE, se sigue que de la misma definición del mapeo ALE  $\hat{\mathcal{A}}$ , sobre el dominio de la estructura  $\hat{\Omega}_e$ , el sistema de coordenadas ALE coincide con el sistema Lagrangiano, por lo tanto el problema de la estructura en coordenadas ALE, está definido por la misma ecuación (3.3), es decir

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{div}(\hat{F}_e \hat{\Sigma}) = 0 \quad \text{en } \hat{\Omega}_e \\ \hat{u}_e(\hat{x}, 0) = \hat{u}_e^0(\hat{x}) \quad \text{en } \hat{\Omega}_e \\ \hat{v}_e(\hat{x}, 0) = \hat{v}_e^0(\hat{x}) \quad \text{en } \hat{\Omega}_e \\ \hat{u}_e(\hat{x}, t) = 0 \quad \text{en } \hat{\Gamma}_e^D \\ \hat{F}_e \hat{\Sigma} \cdot \hat{n}_e = 0 \quad \text{en } \hat{\Gamma}_e^N \end{array} \right. \quad (4.10)$$

donde

$$\hat{F}_e \hat{\Sigma} = \frac{\hat{E}}{2} (\hat{\nabla} \hat{u}_e \hat{F}_e^{-1} \hat{J}_e \hat{F}_e^{-T} + \hat{F}_e^{-T} \hat{\nabla} \hat{u}_e^T \hat{J}_e \hat{F}_e^{-T}) + \frac{\hat{\eta}}{2} (\hat{\nabla} \hat{v}_e \hat{F}_e^{-1} \hat{J}_e \hat{F}_e^{-T} + \hat{F}_e^{-T} \hat{\nabla} \hat{v}_e^T \hat{J}_e \hat{F}_e^{-T}) \quad (4.11)$$

**4.4. Condiciones de Acoplamiento para la interacción Fluido-Estructura en coordenadas ALE.** En esta sección, el objetivo es expresar las condiciones de acoplamiento (3.6) y (3.7) en coordenadas ALE. Además para el acoplamiento de las ecuaciones del fluido y la estructura en este sistema de coordenadas, surge una nueva condición sobre la interfaz, la cual es dada por la ecuación (4.1), es decir:

$$\hat{u}_f = \hat{u}_e$$

Esta condición es llamada condición geométrica. Para un mayor estudio de esta condición, se sugiere revisar ([15], pag. 58) y ([20], pag. 72).

La condición cinemática en el marco ALE, es expresada como

$$\hat{v}_f \cdot \hat{n}_f = -\hat{v}_e \cdot \hat{n}_f, \quad \text{en } \hat{\Gamma} \quad (4.12)$$

y la condición dinámica en coordenadas ALE, está dada como

$$\hat{J}_f \hat{\sigma}_f \hat{F}_f^{-T} \cdot \hat{n}_f = -\hat{F}_e \hat{\Sigma} \cdot \hat{n}_e, \quad \text{en } \hat{\Gamma} \quad (4.13)$$

**4.5. Sistema de Ecuaciones que modelan el flujo de aire y su interacción con el alvéolo pulmonar en coordenadas ALE.** En esta sección, se escribirá el sistema de ecuaciones (3.8) del problema 3.1, en el sistema de coordenadas ALE. Para este objetivo, se utilizará las ecuaciones para el fluido (4.8) y para la estructura (4.10); además, se integra a este sistema, la ecuación diferencial parcial (4.1). Luego, teniendo en consideración que sobre el dominio del fluido,  $\hat{\Omega}_f$ , la velocidad del dominio es igual a la derivada con respecto al tiempo de la deformación  $\hat{u}_f$  del dominio, es decir,  $\partial_t \hat{\mathcal{A}} = \partial_t \hat{u}_f$ , entonces se tiene que el Sistema de ecuaciones (3.8) en el marco de referencia ALE, se expresa como:



**PROBLEMA 4.6.** *Encontrar la velocidad del fluido  $\hat{v}_f$ , la deformación  $\hat{u}_f$ , del dominio  $\hat{\Omega}_f$  y presión  $\hat{p}$ , así como también la deformación de la estructura  $\hat{u}_e$  y velocidad  $\hat{v}_e$ ; tal que  $\hat{v}_f(x, 0) = \hat{v}_f^0(x)$ ,  $\hat{u}_f(x, 0) = \hat{u}_f^0(x)$ ,  $\hat{u}_e(x, 0) = \hat{u}_e^0(x)$ ,  $\hat{v}_e(x, 0) = \hat{v}_e^0(x)$ , y*

$$\begin{cases} \hat{J}_f \rho (\partial_t \hat{v}_f + (\hat{F}_W^{-1}(\hat{v}_f - \partial_t \hat{u}_f) \cdot \hat{\nabla}) \hat{v}_f) - \widehat{div}(\hat{J}_f \hat{\sigma} \hat{F}_f^{-T}) = 0 & \text{en } \hat{\Omega}_f \\ \widehat{div}(\hat{J}_f \hat{F}_f^{-1} \hat{v}_f) = 0 & \text{en } \hat{\Omega}_f \\ \widehat{div}(\hat{F}_e \hat{\Sigma}) = 0 & \text{en } \hat{\Omega}_e \\ -\hat{\Delta} \hat{u}_f = 0 & \text{en } \hat{\Omega}_f \\ \begin{cases} \hat{v}_f = \hat{v}_f^D & \text{en } \hat{\Gamma}_f^D \\ \hat{u}_f = 0 & \text{en } \hat{\Gamma}_f^D \cup \hat{\Gamma}_f^N \\ \hat{u}_e = 0 & \text{en } \hat{\Gamma}_e^D \end{cases} \\ \begin{cases} \hat{J}_f \hat{\sigma}_f \hat{F}_f^{-T} \cdot \hat{n}_f = \hat{g}_f & \text{en } \hat{\Gamma}_f^N \\ \hat{F}_e \hat{\Sigma} \cdot \hat{n}_e = 0 & \text{en } \hat{\Gamma}_e^N \end{cases} \end{cases}$$

junto a las condiciones sobre la interfaz

$$\begin{cases} \hat{u}_f = \hat{u}_e, & \text{en } \hat{\Gamma} \\ \hat{n}_f \cdot \hat{v}_f = -\hat{n}_e \cdot \hat{v}_e, & \text{en } \hat{\Gamma} \\ \hat{J}_f \hat{\sigma}_f \hat{F}_f^{-T} \cdot \hat{n}_f = -\hat{F}_e \hat{\Sigma}_e \cdot \hat{n}_e, & \text{en } \hat{\Gamma} \end{cases} \tag{4.14}$$

donde

$$\hat{\sigma}_f = -\hat{p}I + \rho \nu (\hat{\nabla} \hat{v}_f \hat{F}_f^{-1} + \hat{F}_f^{-T} \hat{\nabla} \hat{v}_f^T)$$

y

$$\hat{F}_e \hat{\Sigma} = \frac{\hat{E}}{2} (\hat{\nabla} \hat{u}_e \hat{F}_e^{-1} \hat{J}_e \hat{F}_e^{-T} + \hat{F}_e^{-T} \hat{\nabla} \hat{u}_e^T \hat{J}_e \hat{F}_e^{-T}) + \frac{\hat{\eta}}{2} (\hat{\nabla} \hat{v}_e \hat{F}_e^{-1} \hat{J}_e \hat{F}_e^{-T} + \hat{F}_e^{-T} \hat{\nabla} \hat{v}_e^T \hat{J}_e \hat{F}_e^{-T})$$

Encontrar  $\hat{v}_f$ ,  $\hat{u}_f$ ,  $\hat{v}_e$ ,  $\hat{u}_e$ , depende en gran parte, de las condiciones iniciales, es decir, a qué espacios vectoriales pertenecen estas condiciones; por ejemplo:  $\hat{v}_f^0$  y  $\hat{u}_f^0 \in L^2(\hat{\Omega}_f)$ ,  $\hat{v}_e^0$  y  $\hat{u}_e^0 \in L^2(\hat{\Omega}_e)$

**4.6. Conclusión.** En este artículo se ha formulado un fenómeno fisiológico de interacción del flujo de aire con la pared alveolar, a través de un problema de interacción fluido-estructura. Lo primero que se obtuvo fue un sistema de ecuaciones, las cuales describen la dinámica del flujo de aire, y la deformación de la pared del alvéolo. Estas ecuaciones fueron expresadas en coordenadas Eulerianas (para el fluido) y Lagrangianas (para la estructura). Debido al problema que se originó en las condiciones sobre la interfaz, (ya que estas estaban en sistemas de coordenadas distintas), fue necesario formular el problema de interacción fluido-estructura en un nuevo sistema de coordenadas arbitrario, que solucionarán el problema de las condiciones sobre la interfaz. El tipo de coordenadas en el cual se formuló dicho problema fueron las coordenadas ALE. En resumen, el fenómeno fisiológico se ha formulado a través de un problema de interacción fluido-estructura en coordenadas ALE.

Referencias

[1] Barker, A., Cai, X. *Scalable parallel methods for monolithic coupling in fluid-structure interaction with application to blood flow modeling*, Journal of Computational Physics. **229**, (2010), 642-659.  
 [2] Coutand, D., Shkoller, S. *On the motion of an elastic solid inside of an incompressible viscous fluid*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, **176**, N°01 (2005), 25-102.  
 [3] Coutand, D., Shkoller, S. *On the interaction between quasilinear elastodynamics and the Navier-Stokes equations*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, **179**, N°03 (2006), 303-352.  
 [4] Dailey, H., Ghadiali, S. *Fluid-structure analysis of microparticle transport in deformable pulmonary alveoli*, Journal of Aerosol Science, **38** (2007), 269-288.  
 [5] Dailey, H., Yalcin, H., Ghadiali, S. *Fluid-structure modeling of flow-induced alveolar epithelial cell deformation*, Computers and Structures, **85** (2007), 1066-1071.

- [6] Du, Q., Gunzburger, M., Hou, L., Lee, J. *Analysis of a Linear Fluid-Structure Interaction Problem*, Discrete and Continuous Dynamical Systems , **9**, N°03 (2003), 633-650.
- [7] Dunne, T., Rannacher, R., Richter, T. *Numerical Simulation of Fluid-Structure Interaction based on Monolithic Variational Formulations*, Institute of Applied Mathematics University of Heidelberg, Germany.
- [8] Eken, A., Sahin, M. *A parallel monolithic approach for fluid-structure interaction in a cerebral aneurysm*, Computers and Fluids , **153**, (2017), 61-75.
- [9] Formaggia, L., Quarteroni, A., Veneziani, A. *Cardiovascular Mathematics: Modeling and simulation of the circulatory system*, Springer-Verlag. Milano(2009).
- [10] Frei, S. *Eulerian finite element methods for interface problems and fluid-structure interactions*, PhD thesis Universität Heidelberg.
- [11] Hughes, T., Liu, W., Zimmermann, T. *Lagrange-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows*, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg. **29**, (1981), 329-349.
- [12] Ignatova, M., Kukavica, I., Lasiecka I., Tuffaha, A. *On well-posedness and small data global existence for an interface damped free boundary fluid-structure model*, Nonlinearity. **27**, (2014), 467-499.
- [13] Kukavica, I., Tuffaha, A. *Solutions to a fluid-structure interaction free boundary problem*, Discrete and Continuous Dynamical Systems. **32**, N°04 (2012), 1355-1389.
- [14] Meyers, M., Chawla, K. *Mechanical Behavior of Materials*, Cambridge University Press, New York 2009
- [15] Richter, T. *Fluid Structure Interactions. Modeling, Mathematical Analysis and Finite Elements*, Special, preliminar edition exclusively for the participants of the *Winter School on Modeling, Adaptive Discretizations and Solvers for Fluid-Structure Interactions*, Linz, 2016.
- [16] Richter, T. *A Monolithic Geometric Multigrid Solver for Fluid-Structure Interactions in ALE formulation*, International journal for Numerical Methods in Engineering. **104**, N°05 (2015), 372-390.
- [17] Wick, T. *Solving Monolithic Fluid-Structure Interaction Problems in Arbitrary Lagrangian Eulerian Coordinates with the deal.II Library*, Archive of Numerical Software. **1**, N°01 (2013), 1-19.
- [18] Wick, T., Wollner, W. *On the differentiability of stationary fluid-structure interaction problems with respect to the problem data*, Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik. (2013).
- [19] Wick, T. *Adaptive Finite Element Simulation of Fluid-Structure Interaction with Application to Heart-Valve Dynamics*. PhD thesis, Universität Heidelberg, 2012. urn:nbn:de:bsz:16-opus-129926
- [20] Wick, T. *Modeling, Discretization, Optimization, and Simulation of Fluid-Structure Interaction*, Technische Univesrität München, 2015
- [21] Wick, T. *Fluid-structure interactions using different mesh techniques*, Computers and Structures. **89**, (2011), 1456-1467.
- [22] Wu, Y., Chuan Cai, X. *A parallel two-level method for simulating blood flows in branching arteries with the resistive boundary condition*, Computers & Fluids. **45**, (2011), 92-102.
- [23] Wu, Y., Cai, X. *A fully implicit domain decomposition based ALE framework for three-dimensional fluid-structure interaction with application in blood flow computation*, Journal of Computational Physics. **258**, (2014), 524-537.
- [24] Yang, Y. *Mathematical Modeling and Simulation of the Evolution of Plaques in Blood Vessels*. PhD thesis, Universität Heidelberg, 2014.
- [25] Yu, Y., Baek, H., Karniadakis, G. *Generalized fictitious methods for fluid-structure interactions: Analysis and simulations*, Journal of Computational Physics. **245**, (2013), 317-346.