Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
Vol. 04(02): 177 - 191 (2017)

La función Gamma: propiedades básicas y algunas aplicaciones

The Gamma Function: basic properties and some applications

Maruja Gavilán Gonzales* and Martha Gonzales Bohorquez**

Received, Ap. 04, 2017 *Accepted, Aug. 31, 2017*

Resumen

El objetivo del presente trabajo es estudiar algunas propiedades y aplicaciones de la función Gamma, denotada por Γ. Inicialmente, se utiliza la teoría de la integral de Lebesgue para demostrar que la integral impropia, dada por Γ es convergente. Después de esto, no solo se describe la extensión del dominio de Γ sino también se deducen algunas propiedades elementales. Se presentan dos maneras de probar que $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, donde B es la función Beta. Finalmente se incluyen algunas aplicaciones de la función Gamma como herramienta útil en la ingeniería de confiabilidad.

Palabras clave. Integral de Lebesgue, función Gamma, función Beta, convolución, distribución continua.

Abstract

The goal of the present work is to study some properties and applications of the Gamma Function, denoted by Γ. Initially, we use the Lebesgue Integral Theory in order to prove that the improper integral given by Γ is convergent. We describe the extended domain property of Γ, and we also deduce some elementary properties. We present two different ways of proving that $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, where B is the Beta Function. Finally, we include some applications of the Gamma Function, between them some serve up as tools on Reliability Engineering.

Keywords. Lebesgue Integral, Gamma Function, Beta Function, Convolution, Continuous Distribution.

1. Introducción.

La matemática es una disciplina básica y esencial en la educación y el adiestramiento del ingeniero, la misma que contribuye a la formación del pensamiento crítico, productivo, creador y científico del profesional. En tal sentido, en el presente artículo se estudian y describen algunas propiedades elementales de la conocida función Gamma [7, 5, 1], la cual está definida en una parte de los números reales por medio de la siguiente identidad

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$$

(definición 2.1). Para esta importante integral impropia [2], se incluyen los siguientes tres resultados: inicialmente se justifica adecuadamente su existencia (sección 2.1), se demuestra su continuidad, con respecto a x (sección 2.2) y se obtienen algunas de sus propiedades básicas (sección 2.3 - sección 2.5). Como complemento de estos resultados fundamentales, se presentan dos formas diferentes de demostrar la igualdad

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \text{donde} \quad B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \quad \text{es la función Beta}$$

(sección 2.6). Como corolario se exhiben algunas aplicaciones de Γ a la ingeniería (sección 3). En las aplicaciones que expone el presente artículo está la deducción de la fórmula para obtener el volumen de una 'esfera' en $\mathbb{R}^n$ (sección 3.1) y como consecuencia se encuentra otra fórmula para la integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n(t)dt$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (Corolario 3.1). En la última parte de la tercera sección se presentan algunas distribuciones continuas – como la distribución gamma, exponencial, Erlang, Weibull, entre otras – que ponen de manifiesto la fuerza de la teoría en el área de

*Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Av. Venezuela s/n., Ciudad Universitaria, Lima–Perú. Corresponding author: (mgavilang@unmsm.edu.pe).
**Departamento de Matemáticas, UNMSM. (mgonzalesb@unmsm.edu.pe).

DOI: http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2017.02.05

Mantenimiento Industrial, vea por ejemplo [3, 6]. Específicamente, se presentan algunas distribuciones continuas en las que la función Gamma es una herramienta poderosa. Cabe mencionar que para definir la función de densidad de estas distribuciones se requiere el cálculo de parámetros. Un procedimiento para obtener estos parámetros es recolectar mediciones y con ellos estimar los mismos.

La importancia del estudio, análisis y descripción de la función Γ radica en la diversidad de aplicaciones en las ciencias e ingeniería. Como por ejemplo al tratar de resolver las ecuaciones diferenciales (ordinarias o parciales) por medio de la transformada de Laplace, aparecen con asiduidad en la solución de diversos problemas las funciones de la forma $f(x) = x^{n-1}$ $(n > 0)$ cuya transformada de Laplace se encuentra en términos de la función Γ (vea [13]). Por tal motivo, se tuvo que decidir y presentar solamente algunas aplicaciones enfocadas a una determinada área y campo de estudio, pues de lo contrario habría un crecimiento desmedido de las dimensiones del trabajo. Por lo tanto, uno de los objetivos de este trabajo es colaborar con la difusión de las aplicaciones de la matemática, como por ejemplo describir y mostrar a la función Gamma[1] como una herramienta poderosa en la Ingeniería Industrial.

2. Resultados y Discusión. A continuación se dan algunos resultados de la integral de Lebesgue que es una extensión de la integral de Riemann [2, 4, 10]. Por ejemplo, la clásica función característica (o indicatriz)

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad \text{dada por} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}; \\ 1, & x \notin \mathbb{Q}; \end{cases}$$

no es Riemann integrable sin embargo la integral de Lebesgue en $[0,1]$ sí existe y su valor es uno. En tal sentido, la integral de Lebesgue permite integrar además de las funciones acotadas, las no acotadas en dominios más generales, como los intervalos de longitud infinita [10].

Para describir brevemente la construcción de la integral de Lebesgue, recordemos que cada función $g : I \subset \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ admite una sucesión creciente de funciones crecientes $\{g_n\}$ en I cuya imagen es un conjunto finito de modo que cada pre–imagen

$$(g_n)^{-1}(a_j) = \{x \in I : g_n(x) = a_j\} \quad j = 1,\ldots,N_n$$

admite una medida de Lebesgue[2] (‘longitud’), digamos $m\left((g_n)^{-1}(a_j)\right) \in \mathbb{R}$. Con esto se define la integral de Lebesgue de cada g_n como

$$\sum_{j=1}^{N_n} a_j m\left((g_n)^{-1}(a_j)\right) = \int_I g_n.$$

Por lo tanto, la integral de Lebesgue de $g : I \subset \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ será

$$\int_I g = \lim_{n\to+\infty} \int_I g_n \in [-\infty,+\infty]. \tag{2.1}$$

Para el caso general $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ basta recordar que cada $g(x)$ puede escribirse como

$$g(x) = g^+(x) - g^-(x),$$

con

$$g^+(x) = \frac{g(x) + |g(x)|}{2} \geq 0 \quad \text{y} \quad g^-(x) = \frac{|g(x)| - g(x)}{2} \geq 0$$

y se define

$$\int_I g = \int_I g^+ - \int_I g^-,$$

donde las integrales de la derecha se obtienen de la construcción anterior (2.1). Una interesante y útil introducción de ésta teoría aparece en el quinto capítulo de [4] o en el décimo primer capítulo de [10] (Vea también [2, Cap. 10]).

[1] La función Gamma fue introducida por primera vez por el matemático suizo Leonhard Euler (1707–1783) con el objetivo de generalizar la función factorial para valores no enteros [1, 5, 7, 8].

[2] Si en esta construcción se exige que cada conjunto

$$(g_n)^{-1}(a_j) = \{x \in I : g_n(x) = a_j\}$$

sea un intervalo, se consigue la definición de la conocida integral de Riemann [10].

NOTA. *El caso especial*

$$\int_I g \in \mathbb{R}$$

se resume diciendo que g *pertenece a* $L(I)$*, el espacio de las funciones Lebesgue integrables en* I*. Específicamente,* $L(I)$ *está formado por funciones medibles* $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *cuya integral es finita. Además, en este espacio está bien definida la siguiente norma*

$$||g||_1 = \int_I g^+ + \int_I g^- \in [0, +\infty),$$

que hace de $L(I)$ *un espacio de Banach.*

TEOREMA 2.1 (Beppo Levi). *Considere* $f_n \in L(I)$*. Si se cumplen las siguientes condiciones:*
(a) La sucesión $\{f_n\}$*, con* $n \in \mathbb{Z}^+$*, crece en c.t.p.*[3] *de* I*.*
(b) El siguiente límite $\lim\limits_{n\to\infty} \int_I f_n$ *existe.*
Entonces $\{f_n\}$ *converge en c.t.p. de* I *hacia una función límite* $f \in L(I)$ *y su integral satisface*

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n.$$

Demostración: Para la demostración referimos al lector al Teorema 10.24 de [2] (Vea también la demostración dada en [10, Página 344]). □

Observe que el teorema anterior es esencial en la construcción moderna de la teoría de integración dada por Lebesgue.

TEOREMA 2.2 (Convergencia dominada). *Considere* $f_n \in L(I)$*. Si se satisface lo siguiente:*
(a) La sucesión $\{f_n\}$*, con* $n \in \mathbb{Z}^+$*, converge en c.t.p. de* I*, hacia una función límite* f*.*
(b) Existe una función no negativa $g \in L(I)$ *tal que cada* $n \geq 1$ *implica que*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \text{ en c.t.p. de } I.$$

Entonces la función límite $f \in L(I)$*, la sucesión* $\left\{\int_I f_n\right\}$ *converge y se verifica*

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n.$$

Demostración: Una prueba aparece en [10, Página 347] o en la sección 10.10 de [2]. □

Note que el teorema anterior permite describir funciones integrables con la misma estrategia de intercambiar la integral con el límite, pero sin la restricción a sucesiones monótonas.

TEOREMA 2.3. *Sea* f *una función Riemann integrable en* $[a, b]$ *para cada* $b \geq a$*. Si existe una constante* $M > 0$ *tal que*

$$\int_a^b |f(x)|dx \leq M$$

para cada $b \geq a$*, entonces tanto* f *como* $|f|$ *son funciones Riemann integrables en* $[a, +\infty[$ *en el sentido impropio. Es decir*

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x) \in \mathbb{R} \quad y \quad \lim_{b\to+\infty} \int_a^b |f|(x) \in \mathbb{R}$$

Además, f *es Lebesgue integrable en* $[a, +\infty[$ *y la integral es igual al límite anterior.*
Demostración: Para la demostración referimos al lector a la [2, Página 337]. □
El siguiente es uno de los resultados más utiles dentro del desarrollo del trabajo.

[3] c.t.p. se lee en *Casi todo Punto*. Esto significa que el conjunto de puntos donde una determinada propiedad no se cumple es medible y su medida de Lebesgue es cero.

TEOREMA 2.4. *Sean X e Y dos subintervalos de $\mathbb{R}$. Sea f una función definida en $X \times Y$ que satisfaga las siguientes condiciones:*

(a) Para cada punto $y \in Y$, la función f_y definida en X por $f_y(x) = f(x, y)$ es medible en X.

(b) Existe una función no negativa $g \in L(X)$ tal que, para cada $y \in Y$, $|f(x, y)| \leq g(x)$ en c.t.p. de X.

(c) Para casi todo $x \in X$, $f(x, y)$ es una función de y continua en Y. Es decir, para cada $y \in Y$ (fijo) $\lim_{t \to y} f(x, t) = f(x, y)$ en c.t.p. de X.

Entonces la integral de Lebesgue $\int_X f(x, y)dx$ existe para cada $y \in Y$ y la función F definida por la ecuación $F(y) = \int_X f(x, y)dx$ es continua en Y. Es decir si $y \in Y$ se tiene

$$\lim_{t \to y} \int_X f(x, t)dx = \int_X \lim_{t \to y} f(x, t)dx.$$

Demostración: Para la demostración referimos al lector a la [2, Página 343]. □

2.1. Existencia de la Función Gamma. A continuación se define la función Gamma, cuya existencia será demostrada en la proposición 2.1.

DEFINICIÓN 2.1. *La función Gamma $x \mapsto \Gamma(x)$ se define mediante la asociación*

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \in \mathbb{R}.$$

En la siguiente proposición se obtiene que el dominio de la función Γ incluye al intervalo $]0, +\infty[$.

PROPOSICIÓN 2.1. *La integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ es convergente, para todo $x > 0$.*

Demostración: La prueba de este resultado se dará en los pasos (a.1) y (a.2).

(a.1) La integral $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt \in \mathbb{R}$.

En efecto, para obtener (a.1) se considera $x > 0$. En $[0, 1]$ se define una nueva función haciendo $f(t) = t^{x-1}e^{-t}$ para $0 < t \leq 1$ y $f(0) = 0$. Luego, si $m = x - 1$ y $0 < t \leq 1$ se obtiene

$$f(t) = t^m e^{-t} \leq t^m = g(t) \quad \text{con} \quad m > -1. \tag{2.2}$$

Se analiza los siguientes casos:

- Si $m \geq 0$, g es una función acotada y Riemann integrable, además $\displaystyle\int_0^1 g(t)dt = \frac{1}{m+1}$.
- Si $-1 < m < 0$, g no esta acotada y por lo tanto no es Riemann integrable en $[0, 1]$. Para este caso se definen las funciones $\{g_n\}$ como sigue

$$g_n(t) = \begin{cases} t^m, & x \geq \frac{1}{n}, \\ 0, & 0 \leq x < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

La sucesión $\{g_n\}$ es creciente y $g_n \to g$ en $[0, 1]$, además cada g_n es integrable en $[0, 1]$ y

$$\int_0^1 g_n(t)dt = \frac{1}{m+1}\left(1 - \frac{1}{n^{m+1}}\right).$$

Como $m + 1 > 0$, entonces la integral converge hacia $\dfrac{1}{m+1}$, por lo tanto $\displaystyle\int_0^1 g(t)dt = \frac{1}{m+1}$. Integrando de 0 a 1 la desigualdad de (2.2) se obtiene por el teorema 2.1 que la integral de Lebesgue $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ existe, para cada $x > 0$. Se verifica (a.1).

(a.2) A continuación se probará la existencia de la integral $\displaystyle\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$.

Como $\lim_{t\to\infty} e^{-t}t^{x-1} = 0$, existe una constante $M \geq 0$ tal que $e^{\frac{-t}{2}} t^{x-1} \leq M$ para $t \geq 1$, por eso

$$h(t) = e^{-t}t^{x-1} \leq Me^{\frac{-t}{2}} \quad \text{y} \quad \int_1^r |h(t)|dt \leq M \int_1^r e^{\frac{-t}{2}} dt = 2M(1 - e^{\frac{-r}{2}}) < 2M.$$

Por el teorema 2.3 la integral $\displaystyle\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ existe para $x \in \mathbb{R}$. En este caso existe como integral de Riemann y como integral de Lebesgue. Se cumple (a.2).

Del primer y segundo paso se concluye que la integral impropia $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ es convergente, para todo $x > 0$ y se obtiene la proposición. □

COROLARIO 2.1. *Para cada* $p > 0$,

$$\Gamma(z) = p^z \int_0^\infty s^{z-1}e^{-ps}ds.$$

Demostración: Si se sustituye $t = ps$ con $p > 0$ en la definición de la función Gamma, se obtiene

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-ps}(ps)^{z-1}pds = p^z \int_0^\infty s^{z-1}e^{-ps}ds.$$

De los extremos sigue el corolario. □

2.2. Continuidad de la Función Gamma. Esta continuidad se obtiene en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 2.2. *La función Gamma* $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$, *dada en la definición 2.1, es continua en* $]0, \infty[= X$.

Demostración: Se usa el teorema 2.4. Note que por cada $x > 0$, el integrando $f(t, x) = e^{-t}t^{x-1}$ como función de t, es continua en $[0, \infty[= T$ y por lo tanto es medible en T. Si $t > 0$ (fijo) $f(t, x)$ se verifica que $\lim\limits_{r\to x} f(t, r) = f(t, x)$ en c.t.p. de $]0, \infty[= X$. Además, en cada subintervalo $[a, b] \subset X$ donde $0 < a < b$ la función

$$g(t) = \begin{cases} t^{a-1}, & 0 < t < 1, \\ Me^{\frac{-t}{2}} & t \geq 1. \end{cases}$$

(M es una constante positiva) es integrable en T y verifica que para cada $x \in [a, b]$ se tiene que $|f(t, x)| \leq g(t)$ en c.t.p. de T. Por lo tanto, se cumplen las tres condiciones del teorema 2.4 y se obtiene que Γ es continua en cada $[a, b] \subset X$ y asi Γ será continua en X. □

2.3. Propiedades de la Función Gamma. A continuación se probará algunas propiedades de la función Gamma.

PROPOSICIÓN 2.3. *Para todo* $x > 0$, *se verifica* $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$, *o equivalentemente*

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}. \tag{2.3}$$

Demostración: Sean a y b dos números reales tales que $0 < a < b$. Integrando por partes ($u = t^x; dv = e^{-t}dt$) en $\int_a^b t^x e^{-t}dt$ sigue que

$$\int_a^b t^x e^{-t}dt = a^x e^{-a} - b^x e^{-b} + x\int_a^b t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Tomando límite cuando $a \to 0^+$ y $b \to +\infty$, se obtiene $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$. □

COROLARIO 2.2. *Si* $n \in \mathbb{Z}^+$, *entonces*

$$\Gamma(n + 1) = (n + 1)!.$$

Demostración: Se observa que $\Gamma(1) = 1$ ($\Gamma(1) = \lim\limits_{k\to\infty} \int_0^k e^{-t}dt = 1$) entonces $0! = 1$. Luego de aplicar inductivamente la proposición 2.3 se obtiene $\Gamma(\tilde{n}) = (\tilde{n} - 1)!$. □

2.4. Extensión del dominio de la Función Gamma. En la sección 2.1 se probó la existencia de Γ para valores positivos de la variable x. Ahora extenderemos su dominio a $\mathbb{R}\backslash\{\mathbb{Z}^- \cup \{0\}\}$.

PROPOSICIÓN 2.4. *La función Gamma* $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ *es válida para todo número real* x *excepto* $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$.

Demostración: Se observa que que $\Gamma(m)$ son infinitos para todo $m \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$. Además,

- $\lim\limits_{x\to(2k)^+} \Gamma(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(2k)^-} \Gamma(x) = -\infty$ para todo $k \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ y
- $\lim\limits_{x\to k^+} \Gamma(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to k^-} \Gamma(x) = +\infty$ para todo $k \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$.

Para cualquier otro valor negativo de x, se puede calcular $\Gamma(x)$ usando (2.3) cuantas veces sea necesario hasta que $\Gamma(x+1)$ tenga un argumento positivo. De esta manera la función Gamma resulta válida para todos los valores de x, excepto para $x \in \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$. $\Box$

2.5. La fórmula de Euler. A continuación se prueba otra caracterización de la función Gamma. La relación (2.4) es conocida como la *fórmula de Euler*, pues es él quien la establece por primera vez en 1729 en una carta enviada a Goldbach [7, 8, 9].

PROPOSICIÓN 2.5. *Para todo valor de x distinto de* $0, -1, -2, \ldots,$

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}. \tag{2.4}$$

Demostración: Se utiliza la conocida relación $e^{-t} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$. Por la definición de la función Gamma y usando el hecho que es una integral de Lebesgue se obtiene

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dx,\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{b\to+\infty}\int_0^{b}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dx\right),\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}dx.\end{aligned}$$

La sustitución $\left(r=\frac{t}{n}\right)$ implica

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} n^x\int_0^1 (1-r)^n r^{x-1}dr.$$

Integrando por partes $\left(u=(1-r)^n; d\nu = r^{x-1}\right)$ se obtiene

$$I_{n,x} = \int_0^1 (1-r)^n r^{x-1}dr = \frac{n}{x}I_{n-1,x+1} \quad \text{para} \quad n\in\mathbb{Z}^+,$$

es decir

$$I_{n,x} = \frac{n}{x}I_{n-1,x+1}.$$

Aplicando reiteradas veces la fórmula anterior se obtiene

$$I_{n,x} = \frac{n(n-1)\cdots 1}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Luego

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)},\\ &= \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{2}{x+2}\right)\cdots\left(\frac{n}{x+n}\right)\frac{2^x}{1^x}\frac{3^x}{2^x}\cdots\frac{n^x}{(n-1)^x},\\ &= \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^x\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Por tanto, (2.4) define un producto convergente cuando $-x \notin \mathbb{N}\cup\{0\}$. $\Box$

COROLARIO 2.3.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Demostración: Como consecuencia de la fórmula de Euler, dada en (2.4), y del hecho que

$$\frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right),$$

se tiene

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(-x) &= \left[\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}\right]\left[\frac{1}{-x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-x}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-1}\right],\\ &= \frac{1}{-x^2\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)}.\end{aligned}$$

Luego

$$\Gamma(x)\Gamma(-x) = \frac{-\pi}{x\text{sen}(\pi x)}.$$

Usando (2.3) y la última igualdad se tiene $\Gamma(-x) = -\frac{\Gamma(1-x)}{x}$, entonces

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\text{sen}(\pi x)},$$

y si $x = \frac{1}{2}$, se obtiene $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. □

COROLARIO 2.4.

$$\sqrt{\pi} = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx.$$

Demostración: Para la primera igualdad se hace $x = \frac{1}{2}$ en la definición de la función Gamma. Para la segunda igualdad bastará sustituir $t = x^2$. □

La integral $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ se relaciona con probabilidad, y con la distribución normal.

COROLARIO 2.5.

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

Demostración: De la proposición 2.3 y del corolario 2.3 se obtiene que para $n > 0$

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),\\ &= \left(\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-3}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

De aquí se obtiene el corolario. □

2.6. La Función Beta. Inicialmente se presenta la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.2. *Para todo $x > 0$, $y > 0$ se define la función Beta por*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt. \tag{2.5}$$

NOTA. *Si se realiza el cambio de variable $s = 1 - t$ en la integral (2.5) se obtiene*

$$B(x, y) = B(y, x).$$

Varios cambios de variable dan lugar a diferentes representaciones de la función Beta. Se presentan algunos de ellos

1. Si se sustituye $u = \frac{t}{1-t}$ en la definición de la función Beta se tiene

$$B(x, y) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{u+1}\right)^{x-1} \left(\frac{1}{u+1}\right)^{y-1} \frac{du}{(u+1)^2},$$

al simplificarse se obtiene

$$B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(u+1)^{x+y}} du. \tag{2.6}$$

2. Si en el corolario 2.1 se sustituye $p = 1 + u$, $z = x + y$ se tiene

$$\frac{1}{(u+1)^{x+y}} = \frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_0^{+\infty} e^{-(1+u)t} t^{x+y-1} dt,$$

al sustituir esta expresión en (2.6) se obtiene

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x+y-1} \left(\int_0^{+\infty} e^{-ut} u^{x-1} du\right) dt, \\ &= \frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x+y-1} \frac{\Gamma(x)}{t^x} dt, \\ &= \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{y-1} dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \text{para} \quad x > 0; \quad y > 0. \tag{2.7}$$

NOTA. *La representación dada en (2.7) tambien se puede obtener utilizando el teorema de convolución*[4] *dado en [2, Página 401]. Se debe considerar dos casos:*

Caso i: $0 < x < 1; \quad 0 < y < 1.$

Para la demostración de este caso, se considera $x > 0$ y se define

$$f_x(t) = \begin{cases} t^x e^{-t}, & t > 0, \\ 0 & t \geq 0. \end{cases}$$

Entonces $f_x \in L(\mathbb{R})$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(t)dt = \Gamma(x+1)$. Como f_x es continua y acotada en $\mathbb{R}$, se aplica el teorema de convolución para las funciones f_x y f_{y-1} y se obtiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f_x * f_{y-1})(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(t)dt \int_{-\infty}^{+\infty} f_{y-1}(r)dr.$$

[4] Dadas dos funciones f y g, ambas integrables de Lebesgue en $(-\infty, +\infty)$, sea S el conjunto de todos los x para el cual existe la integral de Lebesgue

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt,$$

esta integral define una función h en S llamada convolución de f y g. Para designar esta función se suele escribir

$$h = f * g.$$

Es decir

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(f_x * f_{y-1})(t)dt = \Gamma(x+1)\Gamma(y) = x\Gamma(x)\Gamma(y).$$

Por otro lado, por la definición de convolución,

$$\begin{aligned}(f_x * f_{y-1})(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(t)f_{y-1}(z-t)dt,\\ &= e^{-z}\int_0^z t^x(z-t)^{y-1}dt.\end{aligned}$$

Mediante la sustitución $t = uz$, *se tiene* $(f_x * f_{y-1})(z) = e^{-z}z^{x+y}B(x+1,y)$, *entonces*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}(f_x * f_{y-1})(t)dt &= B(x+1,y)\Gamma(x+y+1),\\ &= (x+y)B(x+1,y)\Gamma(x+y).\end{aligned}$$

Luego bastará demostrar

$$(x+y)B(x+1,y) = xB(x,y). \tag{2.8}$$

Para obtener (2.8) *se integra por partes tomando* $(u = z^x; d\nu = (1-z)^{y-1}dz)$ *en la integral* $B(x+1,y) = \int_0^1 z^x(1-z)^{y-1}dz$, *luego*

$$\begin{aligned}\int_0^1 z^x(1-z)^{y-1}dz &= \frac{x}{y}\int_0^1 z^{x-1}(1-z)^y dz,\\ &= \frac{x}{y}\int_0^1 z^{x-1}(1-z)^{y-1}dz - \frac{x}{y}\int_0^1 z^x(1-z)^{y-1}dz.\end{aligned}$$

Trasponiendo términos en los extremos de la última relación se obtiene

$$(x+y)\int_0^1 z^x(1-z)^{y-1}dz = x\int_0^1 z^{x-1}(1-z)^{y-1}dz$$

lo cual demuestra (2.8).

Caso ii: $x > 1; \quad y > 1.$

Para demostrar el caso ii, se procede de manera similar, solo que en este caso se aplica el teorema de convolución a las funciones f_x *y* f_y.

2.7. La fórmula de duplicación de la Función Gamma. Esta fórmula se probrará en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 2.6.

$$2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2x). \tag{2.9}$$

Demostración: De la definición de la función Beta y de (2.7) se tiene

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

Si $x = y$

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}dt,\\ &= \int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{x-1}dt + \int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}dt,\\ &= 2\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{x-1}dt\end{aligned}$$

Si $t = \dfrac{1-\sqrt{u}}{2}$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} &= -\frac{1}{2}\int_1^0 \left(\frac{1-\sqrt{u}}{2}\right)^{x-1}\left(\frac{1+\sqrt{u}}{2}\right)^{x-1} u^{-1/2}du,\\
&= \frac{1}{2^{2x-1}}\int_0^1 u^{-1/2}(1-u)^{x-1}du,\\
&= \frac{1}{2^{2x-1}}B\left(\frac{1}{2},x\right),\\
&= \frac{1}{2^{2x-1}}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(x)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right)}.
\end{aligned}$$

De donde resulta la fórmula de duplicación (2.9). □

3. Aplicaciones de la Función Gamma. Dentro de las aplicaciones se consideran inicialmente un volumen y después algunas distribuciones que se relacionan con la función Gamma.

3.1. Cálculo del volumen de una esfera en $\mathbb{R}^n$. En el espacio euclideano $\mathbb{R}^n$, se define la esfera de centro en el origen $0 = (0,\ldots,0)$ y radio $r > 0$ como el conjunto de puntos $x = (x_1,\ldots,x_n)$ para los cuales $\|x\| = (x_1^2+\cdots+x_n^2)^{1/2} \le r$. Esta esfera se denota por $e(n,r)$, es decir

$$e(n,r) = \left\{(x_1,\ldots,x_n) : (x_1^2+\cdots+x_n^2)^{1/2} \le r\right\}.$$

TEOREMA 3.1. *El volumen en $\mathbb{R}^n$ de $e(n,r)$, que se denota por $\nu(n,r)$ se obtiene mediante*

$$\nu(n,r) = \int_{x_1^2+\cdots+x_n^2\le r^2} dx_1\ldots dx_n = \frac{r^n\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Demostración: Se observa que $\nu(n,r) = r^n\nu(n,1)$, por tanto encontrar el volumen de tal esfera se reduce al cálculo del volumen de una esfera unitaria.

En efecto, si se introducen las nuevas variables $y_1,\ldots,y_n$ de manera que se cumpla $x_i = ry_i, \quad i = 1,\ldots,n$ entonces la ecuación $x_1^2+\cdots+x_n^2 = r^2$ se transforma en la ecuación de la esfera unitaria $y_1^2+\cdots+y_n^2 = 1$. El jacobiano de la transformación $F(y_1,\ldots,y_n) = (x_1,\ldots,x_n)$ es el determinante de la matriz diagonal de orden n dada por diag$(\frac{\partial x_i}{\partial y_i})$ = diag$(r,\ldots,r)$ y es igual a r^n. Por lo tanto

$$\nu(n,r) = \int_{y_1^2+\cdots+y_n^2\le 1} r^n dy_1\ldots dy_n = r^n\nu(n,1).$$

Cálculo de $\nu(n,1)$.

$$\begin{aligned}
\nu(n,1) &= \int_{x_1^2+\cdots+x_n^2\le 1} dx_1\ldots dx_n,\\
&= \int_{-1}^1 dx_1\int_{x_2^2+\cdots+x_n^2\le 1-x_1^2} dx_2\ldots dx_n,\\
&= \int_{-1}^1 \nu(n-1,(1-x_1^2)^{1/2})dx_1,\\
&= \int_{-1}^1 (1-x_1^2)^{\frac{n-1}{2}}\nu(n-1,1)dx_1,\\
&= \nu(n-1,1)\int_{-1}^1 \left(1-x_1^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dx_1.
\end{aligned}$$

De los extremos se deduce que

$$\frac{\nu(n,1)}{2\nu(n-1,1)} = \int_0^1 \left(1-x_1^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dx_1. \tag{3.1}$$

Si se sustituye $t = x_1^2$ en la última igualdad se obtiene

$$\frac{\nu(n,1)}{\nu(n-1,1)} = \int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{\frac{n-1}{2}}dt = B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right),$$

es decir

$$\nu(n,1) = \nu(n-1,1)B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right). \tag{3.2}$$

Aplicando la fórmula (3.2) reiteradas veces se obtiene

$$\begin{aligned}
\nu(n,1) &= \nu(1,1)\cdot B(\frac{1}{2},\frac{3}{2})\cdot B(\frac{1}{2},\frac{4}{2})\cdot B(\frac{1}{2},\frac{5}{2})\cdots B(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2})\cdot B(\frac{1}{2},\frac{n}{2})\cdot B(\frac{1}{2},\frac{n+1}{2}),\\
&= 2\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(3)}\cdots\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})},\\
&= 2\frac{(\Gamma(\frac{1}{2}))^{n-1}\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}.\\
&= \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.
\end{aligned}$$

De los extremos se obtiene

$$\nu(n,1) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \tag{3.3}$$

Luego $\nu(n,r) = \dfrac{r^n\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$. □

NOTA. *Para ilustrar el resultado, se dá el cálculo de $\nu(n,1)$ para algunos valores conocidos.*

- *En el caso $n=1$, el volumen, usualmente llamado 'longitud', de la esfera unitaria satisface*

$$\nu(1,1) = \int_{x_1^2} dx_1 = \int_{-1}^1 dx_1 = 2.$$

- *Si $n=2$, el volumen (llamado 'área') viene dado por*

$$\nu(2,1) = \nu(1,1)B\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right) = \pi.$$

- *Cuando $n=3$, el volumen de la esfera unitaria cumple*

$$\nu(3,1) = \nu(2,1)B\left(\frac{1}{2},2\right) = \frac{4}{3}\pi.$$

La prueba del teorema 3.1 nos permite deducir una fórmula del siguiente corolario.

COROLARIO 3.1.

$$\int_0^{\pi/2} sen^n t dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

Demostración: En efecto, se realiza un cambio de variable $x_1 = cos t$ en (3.1) es decir

$$\begin{aligned}
\frac{\nu(n,1)}{2\nu(n-1,1)} &= \int_0^1 (1-x_1^2)^{\frac{n-1}{2}}dx_1,\\
&= -\int_{\pi/2}^0 (1-cos^2 t)^{\frac{n-1}{2}} sen t dt,\\
&= \int_0^{\pi/2} sen^n t dt.
\end{aligned}$$

Aplicando la ecuación (3.3) se concluye el corolario. □

3.2. Distribución Gamma. La distribución Gamma juega un rol fundamental en los problemas de fiabilidad y tiempos de espera, tal como se describe en [6, 3].

La función densidad de la distribución Gamma con parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ esta dada por

$$g(x,\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} e^{\frac{-x}{\beta}}, & \text{para} \quad x > 0 \\ 0, & \text{en otros casos} \end{cases}$$

La media y varianza de la distribución gamma son

$$\mu = \alpha\beta \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \alpha\beta^2.$$

EJEMPLO 1. *El tiempo en horas que semanalmente requiere una máquina para su mantenimiento es una variable aleatoria con distribución gamma con parámetros $\alpha = 3$, $\beta = 2$.*

a) Encuentre la probabilidad que alguna semana el tiempo de mantenimiento sea mayor a 8 horas.

b) Si el costo de mantemimiento en dólares es

$$C(x) = 30x + 2x^2,$$

siendo x el tiempo de mantenimiento, encuentre el costo promedio de mantenimiento.

Solución.

a) Sea x la duración de mantenimiento en horas (variable aleatoria) su densidad de probabilidad es

$$g(x,\alpha,\beta) = \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} e^{\frac{-x}{\beta}},$$

entonces

$$g(x,3,2) = \frac{x^{3-1}}{2^3\Gamma(3)} e^{\frac{-x}{2}} = \frac{1}{16} x^2 e^{\frac{-x}{2}}.$$

La probabilidad de que el tiempo de mantenimiento sea mayor a 8 horas esta dada por

$$\begin{aligned} 1 - P(x \leq 8) &= 1 - \frac{1}{16}\int_0^8 x^2 e^{\frac{-x}{2}} dx, \\ &= 0,2381. \end{aligned}$$

b) El costo promedio o la esperanza (ver [12, Página 101]) de la función costo esta dado por

$$\begin{aligned} E(c(x)) &= E(30x + 2x^2), \\ &= 30E(x) + 2E(x^2). \end{aligned}$$

Como $E(x) = \mu = \alpha\beta = 3(2) = 6$ y

$$\begin{aligned} E(x^2) &= \int_0^{\infty} x^2 g(x,3,2) dx, \\ &= \int_0^{\infty} x^2 \left(\frac{1}{16} x^2 e^{\frac{-x}{2}}\right) dx, \\ &= 48. \end{aligned}$$

Luego, $E(c(x)) = 30(6) + 2(48) = 276$ dólares.

3.3. Distribución Exponencial. La distribución exponencial es un caso particular de la distribución gamma y ocurre cuando sustituimos $\alpha = 1$ en su función densidad.

Es decir, la función densidad de la distribución exponencial, con parámetro $\beta > 0$ esta dado por

$$e(x, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{\frac{-x}{\beta}}, & \text{para} \quad x > 0 \\ 0, & \text{en otros casos} \end{cases}$$

$(\Gamma(1) = 1)$.
La media y la varianza de la distribución exponencial son

$$\mu = \beta \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \beta^2.$$

EJEMPLO 2. *El tiempo de revisión del motor de un avión sigue aproximadamente una distribución exponencial, con media de 22 minutos.*

a) *Halle la probabilidad de que el tiempo de la revisión sea menor a 10 minutos.*
b) *El costo de la revisión es de 200 euros por cada media hora o fracción. ¿Cuál es la probabilidad de que una revisión cueste 400 euros?*
c) *Para efectuar una programación sobre las revisiones del motor ¿cuánto tiempo se debe asignar a cada revisión para que la probabilidad de que cualquier tiempo de revisión mayor que el tiempo asignado sea solo de 0,1?*

Solución.

a) Sea x el tiempo de revisión del motor de un avión en minutos y la media $\beta = 22$.
La función densidad esta dada por

$$e(x, 22) = \frac{1}{22} e^{\frac{-x}{22}} \quad x > 0.$$

La probabibidad que el tiempo de revisión sea menor a 10 minutos es

$$P(x < 10) = \frac{1}{22} \int_0^{10} e^{\frac{-x}{22}} dx = 0{,}365.$$

b) Como el costo de revisión del motor es de 200 euros por cada media hora o fracción para que la revisión cueste 400 euros la duración de la revisión debe ser inferior o igual a 60 minutos. Es decir, se tendrá que calcular $P(30 < x < 60)$ esto es,

$$P(30 < x < 60) = \int_{30}^{60} \frac{1}{22} e^{\frac{-x}{22}} dx = 0{,}19.$$

c) Sea t el tiempo que se debe asignar a la revisión, verificando $P(x > t) = 0,1$

$$P(x > t) = \int_t^{\infty} \frac{1}{22} e^{\frac{-x}{22}} dx = 0,1.$$

Como $e^{-t/22} = 0,1$ entonces $t = 50,6$ minutos.

3.4. Distribución de Erlang. La distribución de Erlang es un caso particular de la distribución gamma y ocurre cuando se considera $\beta = \frac{1}{\lambda}$ y $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ en su función densidad.

Es decir, la función densidad de la distribución Erlang con $\lambda > 0$ y $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ esta dado por

$$K(x, \alpha, \lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda(\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{(\alpha-1)!}, & \text{para} \quad x > 0 \\ 0, & \text{en otros casos} \end{cases}$$

$(\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!)$.

La media y la varianza de la distribución de Erlang son

$$\mu = \alpha/\lambda \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \alpha/\lambda^2.$$

Inicialmente tuvo aplicación en la ingeniería de tráfico. Actualmente la distribución de Erlang tiene aplicación en el área de procesos estocásticos y en modelos de servicio masivo. Existe una asociación entre los modelos de probabilidad de Poisson y de Erlang. Si el número de eventos aleatorios independientes que ocurren en un lapso específico es una variable aleatoria de Poisson con frecuencia constante igual λ entonces para un α dado el tiempo de espera hasta que ocurra el $\alpha-$ésimo evento de Poisson sigue una distribución de Erlang. El lector interesado en ver aplicaciones en la ingeniería de confiabilidad sugerimos ver [12].

3.5. Distribución de Ji Cuadrada. La distribución de ji cuadrada (o comúnmente Chi cuadrada, $\mathcal{X}^2$, de Pearson) es un caso particular de la función gamma y ocurre cuando se sustituye $\alpha = \nu/2$ y $\beta = 2$ en su función densidad.

Es decir, la función densidad de la distribución de ji cuadrada con $\nu \in \mathbb{Z}^+$ esta dado por

$$f(x,\nu) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{(\nu/2)-1} e^{-x/2}, & \text{para} \quad x > 0 \\ 0, & \text{en otros casos} \end{cases}$$

La media y la varianza de la distribución ji cuadrada son

$$\mu = \nu \quad \text{y} \quad \sigma^2 = 2\nu.$$

La distribución de ji cuadrada juega un rol importante en la inferencia estadística. Es un componente importante de la prueba de hipótesis y de la estimación estadística. Los temas que tratan con distribuciones de muestreo, análisis de varianza y estadística no parámetrica implican el uso extenso de la **distribución ji cuadrada**.

El lector interesado en ejemplos ilustrativos puede ver [3, página 163] o [12, página 227].

3.6. Distribución de Weibull. La distribución de Weibull se aplica a problemas de prueba de vida como de los de tiempo de falla o duración de la vida. Esta distribución es la mas utilizada en la ingeniería de confiabilidad. Esta disciplina trata con rigor científico la prevención de pérdidas o seguridad industrial.

La función densidad de la distribución de Weibull con $\alpha > 0$ (forma o shape), $\beta > 0$(escala) esta dada por

$$f(t,\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{\alpha \cdot t^{\alpha-1}}{\beta^\alpha} e^{-(t/\beta)^\alpha}, & \text{para} \quad t > 0 \\ 0, & \text{en otros casos} \end{cases}$$

La media y la varianza de la distribución de Weibull son

$$\mu = \frac{\beta}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \frac{\beta^2}{\alpha}\left\{2\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha}\left(\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)^2\right\}.$$

El siguiente ejemplo se inspira en los resultados del capítulo 4 del libro [11].

EJEMPLO 3. *La vida de servicio de un determinado tipo de termistor que produce resistencias dentro de sus especificaciones sigue una distribución de Weibull con $\beta = \sqrt{50}$ y $\alpha = 2$ (mediciones en miles de horas.)*

(a) Halle la probabilidad de que uno de esos termistores, que se ha de instalar en un sistema, trabaje en forma correcta durante mas de 10 000 horas.

(b) Calcule la vida esperada para termistores de este tipo.

Solución.

(a) Si t es la vida útil de un determinado tipo de termistor, la función densidad viene dada por

$$f(t,2,\sqrt{50}) = \frac{2t}{50}e^{-\frac{t^2}{50}} \quad \text{para} \quad t > 0,$$

luego,

$$P(t > 10) = \int_{10}^{\infty} \frac{2t}{50}e^{-\frac{t^2}{50}} = 0,14.$$

(b) Para este caso usamos la fórmula de la esperanza o media dada anteriormente

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\beta}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right), \\ &= \sqrt{50}\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right), \\ &= \sqrt{50}\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \\ &= \sqrt{50}\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}, \\ &= 6,27. \end{aligned}$$

Así, la vida promedio de servicio para estos termistores es 6270 horas.

4. Conclusiones.

- La función Gamma sirve como una herramienta importante en las diferentes áreas de la ingeniería. Una forma de ver su utilidad puede deducirse del estudio simultáneo de la teoría de distribuciones con la función Gamma en la teoría de confiabilidad.
- Por la aplicabilidad que tiene la función Gamma es importante continuar el estudio de sus propiedades matemáticas - como las obtenidas en este trabajo, donde se muestra que su dominio es el conjunto de los números reales excepto el conjunto de los enteros negativos incluyendo a cero - con énfasis en el análisis numérico.

Agradecimientos. This work was partially supported by the UNMSM. Grant number: 151401215.

Los autores agradecen al revisor por hacer un reporte detallado del manuscrito y por enviarnos valiosas sugerencias, las que se incluyeron para mejorar la presentación del trabajo.

Referencias

[1] E. ARTIN, *The Gamma function*. Translated by M. Butler, Holt. Rinehart and Winston, New York, 1964.

[2] TOM M. APOSTOL, *Análisis matemático*. Reverte, Barcelona, 1996.

[3] DEPOOL RIVERO, RAMON & DIÓSCORO, MONASTERIO, *Probabilidad y Estadística. Aplicaciones a la Ingeniería*. Universidad Nacional Experimental Politécnica “Antonio José de Sucre”. Barquisimeto. Venezuela. 2013. http://bqto.unexpo.edu.ve /avisos/PROBABILIDADYESTADISTICA(2-7-13).pdf (visitado 10-10-2016).

[4] NORBERTO FAVA & FELIPE ZÓ, *Medida e Integral de Lebesgue*, Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires. Argentina. 2013. http://cms.dm.uba.ar/depto/public/Curso de grado/fascgrado4.pdfhttp://cms.dm.uba.ar/depto/public/Curso de grado/fascgrado4.pdf (visitado 10-10-2016).

[5] MAURICE GODEFROY, *La fonction Gamma; Théorie, Histoire, Bibliographie*, Gauthier-Villars, Paris, 1901.

[6] PEREZ A. JUAN & C. SERRAT, *Distribuciones habituales en fiabilidad.* UPC, Catalunya. 2006 http://www.uoc.edu/in3/e-math/docs/Q1P _ EI_02.pdf http:// www.uoc.edu/in3/e-math/docs/Q1P _EI _02.pdf (visitado 10-10-2016).

[7] ADRIEN–MARIE LEGENDRE, *Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France*, Paris. 1908 (p. 477, 485, 490.)

[8] DAVIS, PHILIP J., Leonhard Euler's Integral: A Historical Profile of the Gamma Function. *Am. Math. Monthly* **66** (1959) 849–869 .

[9] JUAN JOSÉ RIVAUD., La función gamma. *Micelánea Matemática*, **39** (2004) 61–84.

[10] WALTER RUDIN, *Principles of Mathematical Analysis*. New York: McGraw-Hill. 1964.

[11] RICHARD L. SCHEAFFER & JAMES T. MCCLAVE, *Probabilidad y estadistica para ingenieria*. Mexico: Grupo editorial Iberoamericana. 1993.

[12] RONALD E. WALPOLE, RAYMOND H. MYERS & SHARON L. MYERS. *Probabilidad y estadistica para ingenieros* Mexico: Prentice Hall. 1999

[13] DENNIS G. ZILL & MICHAEL R. CULLEN, *Ecuaciones Diferenciales*. Mexico:McGraw-Hill. 2006.