Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
Vol. 04(02): 175 - 176 (2017)

Minimización de Funciones Supermodulares en un retículo finito relativamente complementado

Minimization of a supermodular functions over a relatively complemented finite lattice

Nelson Aragonés Salazar*

Received, Ap. 04, 2017 *Accepted, Aug. 31, 2017*

Resumen

En este trabajo se presentan dos principios de descarte para solucionar el problema de la minimización de una función supermodular definida en un retículo finito relativamente complementado. Este resultado generaliza el presentado en [1] para el caso de una función supermodular definida en la clase de subconjuntos de un conjunto finito dado.

Palabras clave. Optimización combinatoria, retículo finito relativamente complementado, función supermodular.

Abstract

This work presents two discarding principles to solve the problem of the minimization of a supermodular function over a relatively complemented finite lattice. This result generalizes the one presented in [1] for the case of a supermodular function defined in the class of subsets of a given finite set.

Keywords. Combinatorial optimization, relatively complemented finite lattice, supermodular function.

1. Introducción. Además del desarrollo de esquemas generales de programación discreta es sumamente importante la creación de métodos de solución para clases específicas de problemas. Uno de los avances más interesantes y originales en esta dirección lo conforman los trabajos de V.P. Cherenin y V.R. Jachaturov, en los que se desarrolla el "método de cálculos sucesivos"para encontrar el mínimo de una función supermodular definida en todos los subconjuntos de un conjunto finito dado.

El presente trabajo tiene por objetivo exponer dos principios de descarte que extienden los principos de descarte de Cherenin [3] [4] [1] para el caso de la minimización de una función supermodular definida en un retículo finito relativamente complementado.

2. Retículo relativamente complementado. Sea $\langle A; \leq, \vee, \wedge\rangle$ un retículo, $a, b \in A$, $a \leq b$ y $x \in [a, b] = \{x \in \Omega : \quad a \leq x \leq b\}$ [2]. El retículo $\langle A; \leq, \vee, \wedge\rangle$ se denomina finito si $|A| < \infty$. Se denomina *complemento relativo* del elemento x en el intervalo $[a, b]$ al elemento $x^* \in [a, b]$, tal que $x \wedge x^* = a$ y $x \vee x^* = b$. El retículo $\langle A; \leq, \vee, \wedge\rangle$ se denomina *retículo relativamente complementado* si para todo $x \in A$ en todo intervalo que contiene a x existe para él complemento relativo x^*.

3. Minimización de funciones supermodulares. En [3] [4] [1] se presentan dos principios de descarte de Cherenin para el caso de la minimización de una función supermodular definida en la clase de subconjuntos de un conjunto finito dado. A saber, sea el conjunto finito $I = \{1, 2, \dots, m\}$ y f una función definida en $\Omega = 2^I$. La función f se denomina *supermodular* si para cualesquiera $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$

$$f(\omega_1) + f(\omega_2) \leq f(\omega_1 \cup \omega_2) + f(\omega_1 \cap \omega_2) \quad . \tag{3.1}$$

Para la función supermodular f se considera el siguiente problema: Determinar $\alpha \in \Omega$ tal que

$$f(\alpha) = \min_{\omega \in \Omega} f(\omega).$$

Para este problema tienen lugar los principios de descarte de Cherenin:

1. Sea f supermodular y para $\omega_1 \subset \omega_2$ se tenga que $f(\omega_1) < f(\omega_2)$, entonces $\omega_2 \not\subset \alpha$.

*Departamento de Matemática, Universidad Nacional de Trujillo, Av. Juan Pablo II s/n, Trujillo, Perú (omararagones@yahoo.com).

 DOI: http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2017.02.04

2. Sea f supermodular y para $\omega_1 \subset \omega_2$ se tenga que $f(\omega_1) > f(\omega_2)$, entonces $\alpha \not\subset \omega_1$.

Estos resultados se pueden extender. Consideremos el retículo finito $\langle \Omega; \leq, \vee, \wedge \rangle$ y f una función definida en Ω. La función f se denomina *supermodular* si para cualesquiera $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ tiene lugar

$$f(\omega_1) + f(\omega_2) \leq f(\omega_1 \wedge \omega_2) + f(\omega_1 \vee \omega_2) \ . \tag{3.2}$$

Para la función supermodular f considérese el siguiente problema: Determinar $\alpha \in \Omega$ tal que

$$f(\alpha) = \min_{\omega \in \Omega} f(\omega).$$

LEMA 3.1. *Sea f supermodular y $\omega_l \leq \omega_c \leq \omega_r$. Entonces tiene lugar la desigualdad*

$$f(\omega_c^*) + f(\omega_c) - f(\omega_l) - f(\omega_r) \leq 0. \tag{3.3}$$

En efecto. Sea ω_c^* el complemento de ω_c respecto de $[\omega_l, \omega_r]$. Por la supermodularidad de f se sigue

$$f(\omega_c^*) + f(\omega_c) \leq f(\omega_c^* \wedge \omega_c) + f(\omega_c^* \vee \omega_c) = f(\omega_l) + f(\omega_r).$$

Tiene lugar la siguiente propiedad.

TEOREMA 3.1. *Sea f una función supermodular, entonces*

1. si $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \alpha \Longrightarrow f(\omega_1) \geq f(\omega_2)$,

2. si $\alpha \leq \omega_1 \leq \omega_2 \Longrightarrow f(\omega_1) \leq f(\omega_2)$.

En efecto, consideremos el primer caso. Para $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \alpha$, por el lema 3.1 tiene lugar la desigualdad

$$f(\omega_2^*) + f(\omega_2) - f(\omega_1) - f(\alpha) \leq 0,$$

de donde

$$f(\omega_2) \leq f(\omega_2) + f(\omega_2^*) - f(\alpha) \leq f(\omega_1).$$

El segundo caso del teorema se demuestra de forma similar.

TEOREMA 3.2 (Primer principio de descarte). *Sea f supermodular y para $\omega_1 \leq \omega_2$ se tenga que $f(\omega_1) < f(\omega_2)$, entonces $\omega_2 \not\leq \alpha$.*

En efecto, suponiendo que $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \alpha$. Por el teorema 3.1 tiene lugar la desigualdad

$$f(\omega_2) \leq f(\omega_1),$$

de donde

$$f(\omega_1) < f(\omega_2) \leq f(\omega_1),$$

lo que es absurdo.

La propiedad de f establecida en este teorema permite descartar todas las variantes ω tales que $\omega_2 \leq \omega$.

TEOREMA 3.3 (Segundo principio de descarte). *Sea f supermodular y para $\omega_1 \leq \omega_2$ se tenga que $f(\omega_1) > f(\omega_2)$, entonces $\alpha \not\leq \omega_1$.*

En efecto, suponiendo que $\alpha \leq \omega_1 \leq \omega_2$. Por el teorema 3.1 tiene lugar la desigualdad

$$f(\omega_1) \leq f(\omega_2),$$

de donde

$$f(\omega_2) < f(\omega_1) \leq f(\omega_2),$$

lo que es absurdo.

La propiedad de f establecida en este teorema permite descartar todas las variantes ω tales que $\omega \leq \omega_1$.

4. Conclusiones. Los principios de descarte presentados permiten evitar la búsqueda exhaustiva del mínimo de una función supermodular, definida en un retículo finito relativamente complementado, y extienden los principios propuestos para el caso del mínimo de una función supermodular definida en la clase de subconjuntos de un conjunto finito dado [4].

Referencias

[1] N. Aragonés S. *Minimización de funciones supermodulares,* Selecciones Matemáticas, Vol. 02(02): 49-52 (2015).

[2] G. Gratzer *Lattice Theory*, Dover Publications, Inc, Mineola, New York. (2009).

[3] V. R. Jachatúrov, *Métodos matemáticos de programación regional*, Nauka, Moscú. (1989).

[4] V. R. Jachatúrov, *Métodos Combinatorios y Algoritmos para la solución de problemas de optimización discreta de gran escala*, Nauka, Moscú. (2000).