Journal homepage: http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM/index

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
Vol. 04(01): 124-138 (2017)

Construcción de una función Vectorial a partir de un punto fijo dado previamente

Building a Vectorial function from a fixed point given previously

Franco Rubio López [*], Orlando Hernández Bracamonte [**]

Received: Feb 12, 2017 *Accepted: May 19, 2017*

Resumen

En este artículo construimos una función vectorial con un punto fijo dado a priori, a partir de los puntos fijos de una función cuadrática. Nuestro logro es dar un criterio para la asignación de valores a los elementos de la matriz asociada a la función vectorial, lo cual permitirá establecer la estabilidad del sistema, garantizando que dicho punto fijo sea un atractor.

Palabras Clave: Punto Fijo, punto fijo atractor, estabilidad, función vectorial.

Abstract

In this paper we construct a vector function with a fixed point given previously, from the fixed points of a quadratic function. Our goal is to provide a criterion for the assignment of values to the elements of the matrix associated to the vector function, which will allow to establish the stability of the system, ensuring that said fixed point is an attractor.

Keywords: Fixed Point, fixed point attractor, stability, vector function.

1. Introducción.

El concepto de “punto fijo” de una función escalar o vectorial tiene múltiples aplicaciones; tanto en ciencias básicas como en ciencias aplicadas; dado que el comportamiento de muchos sistemas radica precisamente en la naturaleza del punto fijo; es decir si son atractores o repelentes. En este artículo nosotros construimos una función vectorial a partir de los puntos fijos de las funciones cuadráticas dadas por Rubio y Hernández [1]. Estos puntos fijos de la funciones cuadráticas; permiten dar a priori un punto fijo; el cual será un punto fijo atractor de la función vectorial.

---

[*] Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Av. Juan Pablo II s/n, Ciudad Universitaria, Trujillo-Perú.
[**] Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad Nacional de Trujillo, Av. Juan Pablo II s/n, Ciudad Universitaria, Trujillo-Perú (ohernandez@unitru.edu.pe)

[*] Corresponding author
E-mail: frubio@unitru.edu.pe (F. Rubio)

DOI: http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2017.01.12

En la sección 2 se enuncian algunos resultados establecidos en [1]; los cuales permitirán construir la función vectorial dada en la sección 3.

En la sección 4 y 5, se hace el estudio en el conjunto de los números enteros y reales respectivamente, abordando el caso sobre el número de componentes nulas en el punto fijo; y además se enuncian y prueban resultados que nos permitirá en la sección 6, formular resultados sobre la estabilidad del sistema.

2. Función Cuadrática.

En esta sección se enuncian algunos resultados obtenidos por Rubio y Hernández (2015), en el cual se dan dos puntos x_0 , $x_1 \in R$, $x_0 < x_1$, como puntos fijos a priori, y se determina la función cuadrática:

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C \tag{1}$$

donde:

$$\begin{cases} A = \frac{y_m - x_m}{(x_m - x_1)(x_m - x_0)} \\ B = \frac{y_m(x_0 + x_1) - x_0 x_1 - x_m^2}{(x_1 - x_m)(x_m - x_0)} \\ C = \frac{x_0 x_1 (y_m - x_m)}{(x_m - x_1)(x_m - x_0)} \end{cases} \tag{2}$$

El punto (x_m, y_m) es dado, de tal manera que $(x_0, x_0), (x_1, x_1)\ y\ (x_m, y_m)$ son no colineales.

Usando el teorema (5.1) de [1], con $x_m = x_0 - \varepsilon,\ y_m = x_0\ ,\ \varepsilon = 0.1$, se tiene:

a) x_0 es un punto fijo atractor. (3)

b) x_1 es un punto fijo repelente.

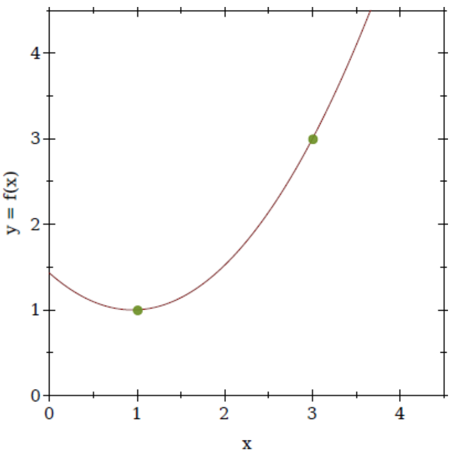
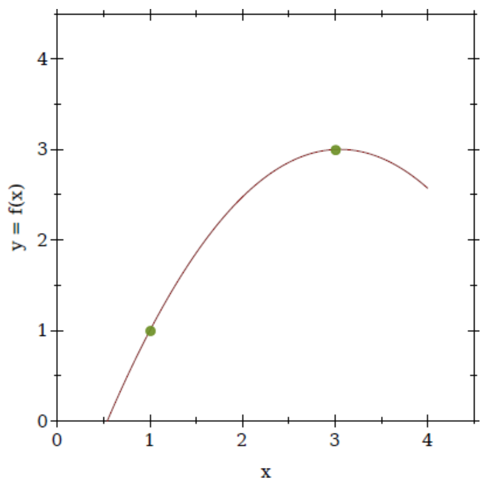


Fig. Nro. 1. Punto fijo $x_0 = 1$, atractor

Usando el teorema (5.4) de [1], con $x_m = x_1 + \varepsilon,\ y_m = x_1\ ,\ \varepsilon = 0.1$, se tiene:

a) x_0 es un punto fijo repelente.

b) x_1 es un punto fijo atractor. (4)



. Fig. Nro. 2. Punto fijo $x_1 = 3$, atractor

3. Caso n-dimensional

Sea $F: R^n \rightarrow R^n$ una aplicación definida por $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))$, donde:

$$F_i(x) = A_i(\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_j)^2 + B_i\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_j\right) + C_i\,,\ \forall i = 1, \dots, n \qquad (5)$$

donde $A_i, B_i\ y\ C_i$, son constantes.

Ahora, considerar $x_p = (x_p^1,\ x_p^2, \dots, x_p^n) \in R^n$, tal que:

$$f_i(x_p^i) = x_p^i\,, \forall i = 1, \dots, n. \qquad (6)$$

donde:

$$f_i(y) = A_i y^2 + B_i y + C_i\,,\quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \text{es dada por (1).}$$

Teorema 3.1. Sea $x_p = (x_p^1,\ x_p^2, \dots, x_p^n) \in R^n$, tal que $f_i(x_p^i) = x_p^i$, $\forall i = 1, \dots, n.$

x_p es un punto fijo de F(x) si y solo sí $\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_p^j = x_p^i\,,\ \forall i = 1, \dots, n.$ (7)

Prueba

Si x_p es un punto fijo de F(x), es decir: $F(x_p) = x_p$, entonces:

$$A_i(\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_p^j)^2 + B_i\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_p^j\right) + C_i = x_p^i\,,\ \forall i = 1, \dots, n.$$

$$= f_i\left(x_p^i\right) = A_i(x_p^i)^2 + B_i(x_p^i) + C_i.$$

Por lo tanto: $\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_p^j = x_p^i\,,\ \forall i = 1, \dots, n.$

Recíprocamente, si $\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_p^j = x_p^i\,,\ \forall i = 1, \dots, n,$ entonces:

$$F_i(x_p) = A_i\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_p^j\right)^2 + B_i\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_p^j\right) + C_i\,,\ \forall i = 1, \dots, n,$$

$$= A_i\left(x_p^i\right)^2 + B_i\left(x_p^i\right) + C_i = f_i\left(x_p^i\right) = x_p^i\,,\ \forall i = 1, \dots, n.$$

Por lo tanto: $F(x_p) = x_p$.

Desarrollando (7) se obtiene:

$$\begin{cases} w_{11}x_p^1 + w_{12}x_p^2 + \cdots + w_{1n}x_p^n = x_p^1 \\ w_{21}x_p^1 + w_{22}x_p^2 + \cdots + w_{2n}x_p^n = x_p^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ w_{n1}x_p^1 + w_{n2}x_p^2 + \cdots + w_{nn}x_p^n = x_p^n \end{cases}$$

La matriz asociada al sistema anterior es:

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & \cdots & w_{nn} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Además, de (7) se obtiene:

$$w_{ii} = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} w_{ij} \frac{x_p^j}{x_p^i}, \quad x_p^i \neq 0, \tag{9}$$

4. Estudio en el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$

Es esta sección proponemos una forma de asignar valores a los elementos de W, de tal manera que esto permita garantizar la estabilidad del sistema.

4.1. Caso 1. Suponer que $x_p = (x_p^1, \dots, x_p^n) \in R^n$, tal que $x_p^i \in \mathbb{Z}$, $x_p^i \neq 0$, $\forall\, i = 1, \dots, n$, y considerar $M = \sum_{k=1}^{n} \left|x_p^k\right|$. (10)

Ahora, asignamos valores a los elementos de la matriz W, de acuerdo a la regla:

1. Si $-\frac{x_p^j}{x_p^i} > 0$, entonces $w_{ij} = -\frac{1}{M}$. (11)
2. Si $-\frac{x_p^j}{x_p^i} < 0$, entonces $w_{ij} = \frac{1}{M}$. (12)

De (11) y (12):

$$-\frac{x_p^j}{x_p^i} w_{ij} < 0\ , \tag{13}$$

$$-\sum_{\substack{j=1, \\ j\neq i}}^{n} \frac{x_p^j}{x_p^i} w_{ij} < 0.$$

Por lo tanto:

$$\sum_{\substack{j=1, \\ j\neq i}}^{n} \frac{x_p^j}{x_p^i} w_{ij} > 0. \tag{14}$$

Teorema 4.1. Sean $x_p = (x_p^1, \dots, x_p^n) \in R^n$, $x_p^i \in \mathbb{Z}$, $x_p^i \neq 0$, $\forall\, i = 1, \dots, n.$ Entonces:

$$0 < w_{ii} < 1\,, \quad \forall i = 1, \dots, n. \tag{15}$$

Prueba.

De (14) se tiene:

$$0 < \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} \frac{x_p^j}{x_p^i} w_{ij} \leq \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} \left| w_{ij} \frac{x_p^j}{x_p^i} \right| = \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} |w_{ij}| \frac{|x_p^j|}{|x_p^i|}$$

$$= \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} \frac{|x_p^j|}{M|x_p^i|} \leq \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} \frac{|x_p^j|}{M} < 1.$$

Entonces:

$$0 < \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} \frac{x_p^j}{x_p^i} w_{ij} < 1,$$

$$0 < 1 - \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} \frac{x_p^j}{x_p^i} w_{ij} < 1.$$

Por lo tanto: $0 < w_{ii} < 1\,, \quad \forall i = 1, \dots, n.$

Teorema 4.2. Sean $x_p = \left(x_p^1, \dots, x_p^n\right) \in R^n$ $(n \geq 2)$, $x_p^i \in \mathbb{Z}$, $x_p^i \neq 0$, $\forall\, i = 1, \dots, n.$ Entonces

:

$$\|W\|_\infty < 1 + \frac{n-1}{M}. \tag{16}$$

Prueba

$$\sum_{j=1}^{n} |w_{ij}| = |w_{ii}| + \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} |w_{ij}|$$

$$= |w_{ii}| + \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{M} = |w_{ii}| + \frac{n-1}{M}.$$

Por teorema (4.1): $\sum_{j=1}^{n} |w_{ij}| < 1 + \frac{n-1}{M}$,

Por lo tanto: $\|W\|_\infty < 1 + \frac{n-1}{M}.$

Corolario 4.1. Con las hipótesis del teorema (4.2), se tiene:

$$\|W\|_\infty < 2 - \frac{1}{n} \tag{17}$$

Prueba

Por teorema (4.2): $\|W\|_\infty < 1 + \frac{n-1}{M}$. Ahora, como $x_p^i \in \mathbb{Z}$, $x_p^i \neq 0$, $\forall\, i = 1, \dots, n$, entonces:

$$\left|x_p^i\right| \geq 1\,, \ \forall\, i = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_p^i| \geq n, \text{ entonces: } \frac{1}{M} \leq \frac{1}{n}.$$

Luego: $\|W\|_\infty < 1 + \frac{n-1}{M} < 1 + \frac{n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}.$

4.2. Caso 2. Suponer que $x_p = (x_p^1, \dots, x_p^n) \in R^n$, tal que $x_p^i \in \mathbb{Z}$, $\forall\, i = 1, \dots, n$, y existe un único $x_p^{i_0} = 0$.

Para asignar valores a los elementos de la matriz W, seguir los pasos:

1. Si $x_p^i \neq 0$, usar (11) ó (12).
2. Para $x_p^{i_0} = 0$, considerar:

$$\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i_0}}^{n} w_{i_0\,j} x_p^j = 0, \tag{18}$$

De (18) despejar una variable en función de las otras. Sin pérdida de generalidad, suponer que podemos despejar $w_{i_0\,n}$:

$$w_{i_0\,n} = -\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i_0}}^{n-1} w_{i_0\,j} \frac{x_p^j}{x_p^n} \tag{19}$$

Teorema 4.3. Sea $x_p = (x_p^1, \dots, x_p^n) \in R^n$, tal que $x_p^i \in \mathbb{Z}$, $\forall\, i = 1, \dots, n$, y existe un único $x_p^{i_0} = 0$. Entonces:

$$\left|w_{i_0\,n}\right| < 1 \tag{20}$$

Prueba

De (19): $$w_{i_0\,n} = -\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i_0}}^{n-1} w_{i_0\,j} \frac{x_p^j}{x_p^n},$$

Entonces: $$\left|w_{i_0\,n}\right| = \left|-\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i_0}}^{n-1} w_{i_0\,j} \frac{x_p^j}{x_p^n}\right| \leq \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i_0}}^{n-1} \frac{\left|x_p^j\right|}{\left|x_p^n\right| M}$$

$$< \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i_0}}^{n-1} \frac{\left|x_p^j\right|}{M} < 1.$$

Por lo tanto: $$\left|w_{i_0\,n}\right| < 1.$$

Luego, la matriz W tendrá la forma:

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1\,i_0} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ w_{n1} & \cdots & w_{n\,i_0} & \cdots & w_{nn} \end{pmatrix}$$

donde los elementos $w_{k\,i_0}$, $\forall\, k = 1, \dots, n$, son libres.

Teorema 4.4. Sea $x_p = (x_p^1, \dots, x_p^n) \in R^n$, tal que $x_p^i \in \mathbb{Z}$, $\forall\, i = 1, \dots, n$, y existe un único $x_p^{i_0} = 0$. Entonces:

$$\sum_{j=1}^{n} \left|w_{ij}\right| < 1 + \frac{n-2}{M} + \left|w_{i\,i_0}\right|, \ \forall\, i = 1, \dots, n. \tag{21}$$

Prueba

Caso 1. $x_p^i \neq 0$, $\forall\, i \neq i_0$. Entonces:

$$\sum_{j=1}^{n} \left|w_{ij}\right| = |w_{ii}| + \underbrace{|w_{i1}| + \cdots + |w_{i\,i-1}| + |w_{i\,i+1}| + \cdots + |w_{in}|}_{n-2\ términos} + \left|w_{i\,i_0}\right|, \ i_0 \neq\neq n.$$

$$= |w_{ii}| + \frac{n-2}{M} + |w_{i\,i_0}|$$

$$< 1 + \frac{n-2}{M} + |w_{i\,i_0}| \text{ , por (15).}$$

Luego: $\sum_{j=1}^{n}|w_{ij}| < 1 + \frac{n-2}{M} + |w_{i\,i_0}|$.

Caso 2. $x_p^{i_0} = 0$. Entonces:

$$\sum_{j=1}^{n}|w_{i_0\,j}| = |w_{i_0 i_0}| + \underbrace{|w_{i_0\,1}| + \cdots + |w_{i_0\,i_0-1}| + |w_{i_0\,i_0+1}| + \cdots + |w_{i_0\,n-1}|}_{n-2\ términos} + |w_{i_0\,n}|$$

$$= |w_{i_0 i_0}| + \frac{n-2}{M} + |w_{i_0\,n}|$$

$$< 1 + \frac{n-2}{M} + |w_{i_0\,i_0}| \text{ , por (20).}$$

Luego: $\sum_{j=1}^{n}|w_{i_0\,j}| < 1 + \frac{n-2}{M} + |w_{i_0\,i_0}|$.

De casos (1) y (2) se tiene:

$$\sum_{j=1}^{n}|w_{ij}| < 1 + \frac{n-2}{M} + |w_{i\,i_0}|, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Teorema 4.5. Sea $x_p = (x_p^1, \ldots, x_p^n) \in R^n$ (≥ 3), tal que $x_p^i \in \mathbb{Z}$, $\forall\, i = 1, \ldots, n$, y existe un único $x_p^{i_0} = 0$. Entonces:

1. $\|W\|_\infty < 1 + \frac{n-2}{M} + máx\{|w_{i\,i_0}|/\ i = 1, \ldots, n\}$. (22)

2. $\|W\|_\infty < 2 - \frac{1}{n-1} + máx\{|w_{i\,i_0}|/\ i = 1, \ldots, n\}$. (23)

3. Si $|w_{i\,i_0}| = 0$, $\forall\, i = 1, \ldots, n$, entonces: $\|W\|_\infty < 2 - \frac{1}{n-1}$. (24)

Prueba

1. Como $|w_{i\,i_0}| \leq máx\{|w_{k\,i_0}|/\ k = 1, \ldots, n\}$, $\forall\, i = 1, \ldots, n$.

Usando (21), se tiene:

$$\sum_{j=1}^{n}|w_{ij}| < 1 + \frac{n-2}{M} + |w_{i\,i_0}| \leq 1 + \frac{n-2}{M} + máx\{|w_{k\,i_0}|/\ k = 1, \ldots, n\}$$

Por lo tanto:

$$\|W\|_\infty < 1 + \frac{n-2}{M} + máx\{|w_{k\,i_0}|/\ k = 1, \ldots, n\}.$$

2. Como $x_p^{i_0} = 0$, entonces al considerar: $|x_p^j| \geq 1$, se tiene:

$M = \sum_{j=1}^{n}|x_p^j| \geq n - 1$, entonces $\frac{1}{M} \leq \frac{1}{n-1}$. Luego en (22):

$$\|W\|_\infty < 1 + \frac{n-2}{n-1} + máx\{|w_{i\,i_0}|/\ i = 1, \ldots, n\}$$

$$= 1 - \frac{1}{n-1} + máx\{|w_{i\,i_0}|/\ i = 1, \ldots, n\}.$$

3. Reemplazando $|w_{i\,i_0}| = 0$ en (23), se obtiene:

$$\|W\|_\infty < 2 - \frac{1}{n-1}.$$

Sea N_0 el número de ceros de $x_p = (x_p^1, \dots, x_p^n) \in R^n (n \geq 3)$, $x_p^i \in \mathbb{Z}$, $\forall\, i = 1, \dots, n$, tal que

$1 \leq N_0 \leq n-2$.

Para asignar valores a los elementos de la matriz W, seguir la regla:

1. Si $x_p^i \neq 0$, usar (11) ó (12).
2. Si $x_p^i = 0, \forall\, i \in \{1, \dots, N_0\}$, considerar:

$$\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i_k}}^{n} w_{i_k\, j}\, x_p^j = 0\,, \quad \forall k \in \{1, \dots, N_0\}. \tag{25}$$

De (25) despejar una variable en función de las otras. Sin pérdida de generalidad suponer que $w_{i_k\, n} \neq 0, \forall k \in \{1, \dots, N_0\}$, por tanto:

$$w_{i_k\, n} = -\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i_k}}^{n-1} w_{i_k\, j} \frac{x_p^j}{x_p^n} \tag{26}$$

Teorema 4.6. Sea N_0 el número de ceros de $x_p = (x_p^1, \dots, x_p^n) \in R^n (n \geq 3)$, $x_p^i \in \mathbb{Z}$, $\forall\, i = 1, \dots, n$, tal que $1 \leq N_0 \leq n-2$. Entonces:

$$|w_{i_k\, n}| < 1\,, \ \forall\, k \in \{1, \dots, N_0\}. \tag{27}$$

Prueba

De (26): $\quad |w_{i_k\, n}| \leq \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i_k}}^{n-1} \frac{|x_p^j|}{|x_p^n| M} \leq \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i_k}}^{n-1} \frac{|x_p^j|}{M} < 1.$

Observar que la matriz W tendrá nN_0 elementos libres.

Teorema 4.7. Sea N_0 el número de ceros de $x_p = (x_p^1, \dots, x_p^n) \in R^n (n \geq 3)$, $x_p^i \in \mathbb{Z}$, $\forall\, i = 1, \dots, n$, tal que $1 \leq N_0 \leq n-2$. Entonces:

$$\sum_{j=1}^{n} |w_{ij}| < 1 + \frac{n-N_0-1}{M} + \sum_{k=1}^{N_0} |w_{i\, i_k}|, \ \ \forall\, i = 1, \dots, n. \tag{28}$$

Prueba

Caso 1. $x_p^i \neq 0, \forall\, i \notin \{i_1, \dots, i_{N_0}\}$. Entonces:

$$\sum_{j=1}^{n} |w_{ij}| = |w_{ii}| + \underbrace{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}_{\substack{n-N_0-1\ \text{términos}\\ \text{asignados}}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N_0} |w_{i\, i_k}|}_{\substack{\text{términos}\\ \text{libres}}}$$

$$= |w_{ii}| + \frac{n-N_0-1}{M} + \sum_{k=1}^{N_0} |w_{i\, i_k}|$$

$$< 1 + \frac{n-N_0-1}{M} + \sum_{k=1}^{N_0} |w_{i\, i_k}|\ \text{, por (15).}$$

Por lo tanto: $\qquad \sum_{j=1}^{n} |w_{ij}| < 1 + \frac{n-N_0-1}{M} + \sum_{k=1}^{N_0} |w_{i\, i_k}|, \ \ \forall\, i = 1, \dots, n.$

Caso 2. $x_p^i = 0,\ \forall\, i \in \{i_1, \dots, i_{N_0}\}$. Entonces:

$$\sum_{j=1}^{n} |w_{ij}| = |w_{in}| + \underbrace{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}_{\substack{n-N_0-1\ \text{términos} \\ \text{asignados}}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N_0} |w_{i\,i_k}|}_{\substack{\text{términos} \\ \text{libres}}}$$

Por tanto: $\sum_{j=1}^{n} |w_{ij}| < 1 + \frac{n-N_0-1}{M} + \sum_{k=1}^{N_0} |w_{i\,i_k}|,\ \ \forall\, i = 1, \dots, n.$

De casos (1) y (2) se sigue el teorema.

Teorema 4.8. Sea N_0 el número de ceros de $x_p = (x_p^1, \dots, x_p^n) \in R^n, n \geq 3, x_p^i \in \mathbb{Z},\ \forall\, i = 1, \dots, n$, tal que $1 \leq N_0 \leq n-2$. Entonces:

1. $\|W\|_\infty < 1 + \frac{n-N_0-1}{M} + máx\{\sum_{k=1}^{N_0} |w_{i\,i_k}|\ /\ i = 1, \dots, n\}$. (29)
2. $\|W\|_\infty < 2 - \frac{1}{n-N_0} + máx\{\sum_{k=1}^{N_0} |w_{i\,i_k}|\ /\ i = 1, \dots, n\}$. (30)
3. Si $|w_{i\,i_k}| = 0,\ \forall i = 1, \dots, n,\ k \in \{1, \dots, N_0\}$, entonces:
$$\|W\|_\infty < 2 - \frac{1}{n-N_0}. \tag{31}$$
4. Si $N_0 = n-2,\ |w_{i\,i_k}| = 0,\ \forall i = 1, \dots, n,\ k \in \{1, \dots, N_0\}$, entonces:
$$\|W\|_\infty < 1 + \frac{1}{M}. \tag{32}$$

Prueba

1. Como $\sum_{k=1}^{N_0} |w_{i\,i_k}| \leq máx\{\sum_{k=1}^{N_0} |w_{i\,i_k}| / i = 1, \dots, n\}$, de (28) se tiene:

$$\|W\|_\infty < 1 + \frac{n-N_0-1}{M} + máx\{\sum_{k=1}^{N_0} |w_{i\,i_k}|\ /\ i = 1, \dots, n.$$

2. Como $x_p^i = 0,\ \forall\, i \in \{i_1, \dots, i_{N_0}\}$, al considerar $|x_p^j| \geq 1$, se tiene:

$M = \sum_{j=1}^{n} |x_p^j| \geq n - N_0$, y reemplazando en (29), se obtiene:

$$\|W\|_\infty < 1 + \frac{n-N_0-1}{n-N_0} + máx\{\sum_{k=1}^{N_0} |w_{i\,i_k}|\ /\ i = 1, \dots, n.$$

$$\|W\|_\infty < 2 - \frac{1}{n-N_0} + máx\{\sum_{k=1}^{N_0} |w_{i\,i_k}|\ /\ i = 1, \dots, n\ .$$

3. Si $|w_{i\,i_k}| = 0,\ \forall i = 1, \dots, n,\ k \in \{1, \dots, N_0\}$, de (30) se obtiene:
$$\|W\|_\infty < 2 - \frac{1}{n-N_0}.$$
4. Si $N_0 = n-2,\ |w_{i\,i_k}| = 0,\ \forall i = 1, \dots, n,\ k \in \{1, \dots, N_0\}$, de (29):
$$\|W\|_\infty < 1 + \frac{n-N_0-1}{M} + máx\{\sum_{k=1}^{N_0} |w_{i\,i_k}|\ /\ i = 1, \dots, n\}$$

Luego: $\|W\|_\infty < 1 + \frac{1}{M}$.

5. Estudio en R

En esta sección hacemos el estudio en el conjunto de los números Reales R, asumiendo que $x_p = (x_p^1, \dots, x_p^n) \in R^n$, es un punto fijo de la aplicación $F: R^n \to R^n$ dada por (5) y (6). Además, sea $M = \sum_{k=1}^{n} |x_p^k|$.

5.1. Caso 1. Suponer que $x_p^j \neq 0,\ \forall i = 1, \dots, n$.

La asignación de valores a los elementos de la matriz W, se hará teniendo en cuenta (11) ó (12).

Teorema 5.1. Si $\left|x_p^i\right| \geq 1,\ \forall i = 1, \dots, n$, entonces:

$$0 < w_{ii} < 1,\ \forall i = 1, \dots, n. \tag{33}$$

Prueba

Por (13), (14) e hipótesis: $\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} w_{i\,j} \frac{x_p^j}{x_p^i} > 0$, entonces:

$$0< \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} w_{i\,j} \frac{x_p^j}{x_p^i} \leq \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} w_{i\,j} \frac{\left|x_p^j\right|}{|x_p^i|M} \leq \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} w_{i\,j} \frac{\left|x_p^j\right|}{M} < 1.$$

Por lo tanto: $$0 < 1 - \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} w_{i\,j} \frac{x_p^j}{x_p^i} < 1.$$

$$0 < w_{ii} < 1,\ \forall i = 1, \dots, n.$$

Teorema 5.2. Si $\left|x_p^i\right| \geq 1,\ \forall i = 1, \dots, n$, entonces:

$$\|W\|_\infty < 1 + \frac{n-1}{M}. \tag{34}$$

Prueba

$$\sum_{j=1}^{n} \left|w_{ij}\right| = |w_{ii}| + \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} \left|w_{ij}\right|$$

$$= |w_{ii}| + \frac{n-1}{M} < 1 + \frac{n-1}{M}.$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left|w_{ij}\right| < 1 + \frac{n-1}{M}\ ,\ \forall i = 1, \dots, n.$$

Corolario 5.1. Si $\left|x_p^i\right| \geq 1,\ \forall i = 1, \dots, n$, entonces:

$$\|W\|_\infty < 2 - \frac{1}{n}. \tag{35}$$

Prueba

Por (34): $\|W\|_\infty < 1 + \frac{n-1}{M}$. Además, como $\left|x_p^i\right| \geq 1,\ \forall i = 1, \dots, n$, entonces:

$M = \sum_{i=1}^{n} \left|x_p^i\right| \geq n$. Por lo tanto: $\|W\|_\infty < 2 - \frac{1}{n}$.

5.2. Caso 2. Sea $\left|x_p^i\right| \geq 1$, excepto un único $x_p^{i_0} = 0$.

Para asignar valores a los elementos de la matriz W, seguir los pasos:

1. Si $x_p^i \neq 0$, usar (11) ó (12).
2. Si $x_p^{i_0} = 0$, considerar:

$$\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i_0}}^{n} w_{i_0\,j}\, x_p^j = 0 \tag{36}$$

De (36) despejar una variable en función de las otras. Sin pérdida de generalidad suponer que $w_{i_0\,n} \neq 0$, luego:

$$w_{i_0\,n} = -\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i_0}}^{n-1} w_{i_0\,j}\frac{x_p^j}{x_p^n} \tag{37}$$

Teorema 5.3. Sea $\left|x_p^i\right| \geq 1$, excepto un único $x_p^{i_0} = 0$. Entonces:

$$|w_{i_0\,n}| < 1. \tag{38}$$

Prueba

De (37): $\left|w_{i_0\,n}\right| \leq \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i_0}}^{n-1} \frac{\left|x_p^j\right|}{|x_p^n|M} \leq \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i_0}}^{n-1} \frac{\left|x_p^j\right|}{M} < 1$. Por tanto: $|w_{i_0\,n}| < 1$.

Teorema 5.4. Sea $\left|x_p^i\right| \geq 1$, excepto un único $x_p^{i_0} = 0$. Entonces:

$$\sum_{j=1}^{n} |w_{ij}| < 1 + \frac{n-2}{M} + \left|w_{i\,i_0}\right|, \ \ \forall\, i = 1, \dots, n \tag{39}$$

Prueba

Caso 1. $\left|x_p^i\right| \geq 1, \forall i \neq i_0$. Entonces:

$$\sum_{j=1}^{n} |w_{ij}| = |w_{ii}| + \underbrace{|w_{i1}| + \cdots + |w_{in}|}_{n-2} + \left|w_{ii_0}\right|$$

$$= |w_{ii}| + \frac{n-2}{M} + \left|w_{ii_0}\right| < 1 + \frac{n-2}{M} + \left|w_{ii_0}\right|, \text{ por (33).}$$

Por lo tanto: $\sum_{j=1}^{n} |w_{ij}| < 1 + \frac{n-2}{M} + \left|w_{i\,i_0}\right|, \ \ \forall\, i = 1, \dots, n$.

Caso 2. $x_p^{i_0} = 0$. Entonces:

$$\sum_{j=1}^{n} |w_{i_0 j}| = \left|w_{i_0 i_0}\right| + \underbrace{\left|w_{i_0 1}\right| + \cdots + \left|w_{i_0 n-1}\right|}_{n-2} + \left|w_{i_0 n}\right|$$

$$= \left|w_{i_0 i_0}\right| + \frac{n-2}{M} + \left|w_{i_0 n}\right| < 1 + \frac{n-2}{M} + \left|w_{i_0 i_0}\right|.$$

De casos (1) y (2) se sigue el teorema.

Teorema 5.5. Sea $\left|x_p^i\right| \geq 1$, excepto un único $x_p^{i_0} = 0$. Entonces:

1. $\|W\|_\infty < 1 + \frac{n-2}{M} + máx\{\left|w_{i\,i_0}\right| / \ i = 1, \dots, n\}$. (40)

2. $\|W\|_\infty < 2 - \frac{1}{n-1} + máx\{\left|w_{i\,i_0}\right| / \ i = 1, \dots, n\}$. (41)

3. Si $\left|w_{i\,i_0}\right| = 0$, $\forall\, i = 1, \dots, n$, entonces: $\|W\|_\infty < 2 - \frac{1}{n-1}$. (42)

Prueba

La prueba es análoga a la del teorema (4.5).

Como en el caso entero, sea N_0 el número de ceros de $x_p = \left(x_p^1, \dots, x_p^n\right) \in R^n (n \geq 3)$, tal que $1 \leq N_0 \leq n-2$.

Para asignar valores a los elementos de la matriz W, seguir la regla:

1. Si $x_p^i \neq 0$, usar (11) ó (12).
2. Si $x_p^i = 0, \forall\, i \in \{i_1, \dots, i_{N_0}\}$, considerar:

$$\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i_k}}^{n} w_{i_k\, j}\, x_p^j = 0\,, \quad \forall k \in \{1, \dots, N_0\}. \tag{43}$$

De (43) despejar una variable en función de las otras. Sin pérdida de generalidad suponer que $w_{i_k\, n} \neq 0, \forall k \in \{1, \dots, N_0\}$, por tanto:

$$w_{i_k\, n} = -\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i_k}}^{n-1} w_{i_k\, j} \frac{x_p^j}{x_p^n} \tag{44}$$

Teorema 5.6. Si $\left|x_p^i\right| \geq 1, i \notin \{1, \dots, N_0\}$, entonces:

$$\left|w_{i_k\, n}\right| < 1, \;\forall\, k \in \{1, \dots, N_0\}. \tag{45}$$

Prueba

De (44): $$\left|w_{i_k\, n}\right| \leq \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i_k}}^{n-1} w_{i_k\, j} \frac{|x_p^j|}{|x_p^n|M} \leq \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i_k}}^{n-1} w_{i_k\, j} \frac{|x_p^j|}{M} < 1.$$

Teorema 5.7. Si $\left|x_p^i\right| \geq 1, \;\forall i \notin \{1, \dots, N_0\}$, entonces:

$$\sum_{j=1}^{n} |w_{ij}| < 1 + \frac{n-N_0-1}{M} + \sum_{k=1}^{N_0} \left|w_{i\, i_k}\right|, \quad \forall\, i = 1, \dots, n \tag{46}$$

Prueba

La prueba es análoga a la del teorema (4.7).

Teorema 5.8. Si $\left|x_p^i\right| \geq 1, \;\forall i \notin \{1, \dots, N_0\}, \; n \geq 3$, entonces:

1. $\|W\|_\infty < 1 + \frac{n-N_0-1}{M} + máx\{\sum_{k=1}^{N_0} \left|w_{i\, i_k}\right| \;/\; i = 1, \dots, n\}.$ (47)
2. $\|W\|_\infty < 2 - \frac{1}{n-N_0} + máx\{\sum_{k=1}^{N_0} \left|w_{i\, i_k}\right| \;/\; i = 1, \dots, n\}.$ (48)
3. Si $\left|w_{i\, i_k}\right| = 0, \;\forall i = 1, \dots, n\,, \; k \in \{1, \dots, N_0\}, \; 1 \leq N_0 \leq n-2$, entonces:
$$\|W\|_\infty < 2 - \frac{1}{n-N_0}. \tag{49}$$
4. Si $N_0 = n-2\,, \;\left|w_{i\, i_k}\right| = 0, \;\forall i = 1, \dots, n\,, \; k \in \{1, \dots, N_0\}$, entonces:
$$\|W\|_\infty < 1 + \frac{1}{M}\,. \tag{50}$$

Prueba

La prueba es análoga a la del teorema (4.8).

Las gráficas siguientes nos muestran las regiones en 2-dimensiones, de las regiones determinadas en este trabajo.

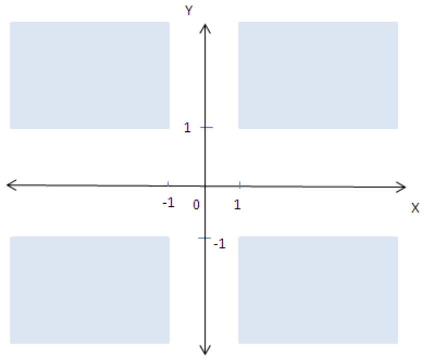


Fig. Nro. 3. Regiones cuando $|x_p^i| \geq 1,\ \forall i = 1, \dots, n$.

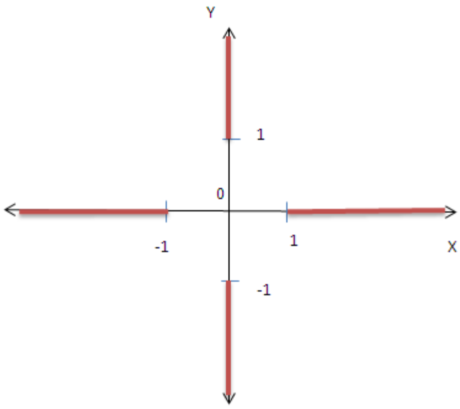


Fig. Nro. 4. Regiones cuando existen componentes nulas.

6. Estabilidad.

En esta sección se estudia la estabilidad del punto fijo x_p . La aplicación $F: R^n \to R^n$ dada por (5) está definida por:

$$F_i(x) = A_i(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j)^2 + B_i\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j\right) + C_i\ ,\ \forall i = 1, \dots, n,$$

La cual es diferenciable de clase $C^\infty(R^n)$. Además:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_k}(x) = 2A_i\left[\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\, x^j\right] w_{ik} + B_i w_{ik}\ ,\ \ \forall i, k = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_k}(x) = [2A_i\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\, x^j\right) + B_i] w_{ik}\ ,\ \ \forall i, k = 1, \dots, n.$$

Por lo tanto, la matriz Jacobiana de F en x_p, es:

$$JF\left(x_p\right) = ((2A_i\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\, x_p^j\right) + B_i) w_{ik})_{nxn} \tag{51}$$

Teorema 6.1. Sea $x_p = (x_p^1, \dots, x_p^n) \in R^n$, tal que x_p es un punto fijo de F, y además x_p^i son puntos fijos atractores dados por (3) ó (4). Entonces:

$$\|JF(x_p)\|_\infty < \|W\|_\infty. \tag{52}$$

Prueba

De (51) se tiene:

$$\sum_{k=1}^n \left|\frac{\partial F_i}{\partial x_k}(x_p)\right| = \sum_{k=1}^n \left|(2A_i(\sum_{j=1}^n w_{ij}\, x_p^j) + B_i)w_{ik}\right|$$

$$\sum_{k=1}^n \left|\frac{\partial F_i}{\partial x_k}(x_p)\right| = \sum_{k=1}^n \left|(2A_i(\sum_{j=1}^n w_{ij}\, x_p^j) + B_i)\right||w_{ik}|$$

$$< \sum_{k=1}^n |w_{ik}| \leq \|W\|_\infty.$$

Por tanto: $$\|JF(x_p)\|_\infty < \|W\|_\infty.$$

Teorema 6.2. Sea $x_p = (x_p^1, \dots, x_p^n) \in R^n (n \geq 3)$, $x_p^i \in Z$, $x_p^i \neq 0$, $\forall i = 1, \dots, n$, $F(x_p) = x_p$; y además x_p^i son puntos fijos atractores dados por (3) ó (4). Entonces:

$$\|JF(x_p)\|_\infty < 1 + \frac{n-1}{M} < 2 - \frac{1}{n} \tag{53}$$

Prueba

Por (16), (17) y (52), se tiene:

$$\|JF(x_p)\|_\infty < \|W\|_\infty < 1 + \frac{n-1}{M} < 2 - \frac{1}{M}.$$

Teorema 6.3. Sea $x_p = (x_p^1, \dots, x_p^n) \in R^n (n \geq 3)$, $x_p^i \in Z$, $x_p^i \neq 0$, $\forall i = 1, \dots, n$, excepto en un único $x_p^{i_0} = 0$, $F(x_p) = x_p$, y además x_p^i sean puntos fijos atractores dados por (3) y (4). Entonces:

$$\|JF(x_p)\|_\infty < 1 + \frac{n-2}{M} + máx\{|w_{i\, i_0}| /\ i = 1, \dots, n\} \tag{54}$$

$$< 2 - \frac{1}{n-1} + máx\{|w_{i\, i_0}| /\ i = 1, \dots, n\}$$

Prueba

El resultado se sigue de (22), (23) y (52).

Teorema 6.4. Sea $x_p = (x_p^1, \dots, x_p^n) \in R^n (n \geq 3)$, $x_p^i \in \mathbb{Z}$, $\forall\ i = 1, \dots, n$, N_0 el número de ceros de x_p, $1 \leq N_0 \leq n-2$, $F(x_p) = x_p$, x_p^i puntos fijos atractores dados por (3) ó (4). Entonces:

$$\|JF(x_p)\|_\infty < 1 + \frac{n-N_0-1}{M} + máx\{\sum_{k=1}^{N_0} |w_{i\, i_k}|\ /\ i = 1, \dots, n\} \tag{55}$$

$$< 2 - \frac{1}{n-N_0} + máx\{\sum_{k=1}^{N_0} |w_{i\, i_k}|\ /\ i = 1, \dots, n\}.$$

Prueba

El resultado se sigue de (22), (23) y (52).

Teorema 6.5. Sea $x_p = \left(x_p^1, \dots, x_p^n\right) \in R^n (n \geq 3)$, $x_p^i \in \mathrm{R}$, $x_p^i \neq 0$, $\forall\, i = 1, \dots, n$, $F\left(x_p\right) = x_p$, y x_p^i puntos fijos atractores dados por (3) ó (4). Si $\left|x_p^i\right| \geq 1, \forall\, i = 1, \dots, n$, entonces:

$$\left\|JF(x_p)\right\|_\infty < 1 + \frac{n-1}{M} \tag{56}$$

Prueba

De (52) y (39) se sigue el resultado.

Teorema 6.6. Sea $x_p = \left(x_p^1, \dots, x_p^n\right) \in R^n (n \geq 3)$, $x_p^i \in \mathrm{R}$, $\forall\, i = 1, \dots, n$, $F\left(x_p\right) = x_p$, y x_p^i puntos fijos atractores dados por (3) ó (4), N_0 el número de ceros de x_p, $1 \leq N_0 \leq n-2$. Si $\left|x_p^i\right| \geq 1, \forall\, i \notin \{1, \dots, N_0\}$, entonces:

$$\left\|JF(x_p)\right\|_\infty < 1 + \frac{n-N_0-1}{M} + máx\{\textstyle\sum_{k=1}^{N_0}\left|w_{i\, i_k}\right| \;/\; i = 1, \dots, n\} \tag{57}$$

$$< 2 - \frac{1}{n-N_0} + máx\{\textstyle\sum_{k=1}^{N_0}\left|w_{i\, i_k}\right| \;/\; i = 1, \dots, n\}.$$

Prueba

De (52), (47) y (48), se sigue el resultado.

7. Bibliografía

[1]. Rubio López, F, Hernández Bracamonte, O. Construcción de una función polinómica a partir de los puntos fijos dados previamente, Selecciones Matemáticas, vol. 02 (01), 2015, 54-67.