



## Análisis Matemático de una cadena alimenticia - presa - depredador - control - biológico

### Mathematical analysis of a food chain: prey - predator - biological - control

JHELLY PÉREZ NÚÑEZ \* AND ROXANA LÓPEZ CRUZ \*\*

Received, Apr. 22, 2017

Accepted, Jun. 27, 2017

#### Resumen

*En este artículo se presenta la dinámica de un control biológico mediante un modelo matemático de cadena alimenticia de tres niveles tróficos. Este modelo matemático está basado en un modelo depredador presa con respuesta funcional Holling tipo II razón dependiente, incluyendo un depredador superior obteniendo así un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias. La información que nos brinda este trabajo también podría ser útil para el diseño de planes de desarrollo que respondan a las necesidades del sector agrícola con el fin de orientar a una no contaminación del medio ambiente en el país a través del uso del control biológico para controlar las plagas.*

**Palabras Claves:** Depredador - Presa, Cadena Alimenticia, Control Biológico, Escenarios de Extinción, Estabilidad Asintótica, Runge - Kutta.

#### Abstract

*In this work, we present the dynamics of biological control through a mathematical model using a simple food chain of three trophic levels. This mathematical model is based on a ratio-dependent predator-prey model with Holling type II functional response, adding a top predator so this model is a system of three ordinary differential equations. We study the existence and uniqueness, invariance and boundary of solutions. The information given in this work could also be useful for the design of development plans that meet the needs of the agricultural sector to guide the non-pollution of the environment in the country through the use of biological control to control pests.*

**Key Words:** Predator - Prey, Food Chain, Biological Control, Scenarios Extinction, Asymptotic Stability, Runge - Kutta.

**1. Introducción.** La problemática que vive el Perú con respecto a la pérdida de cultivos en diferentes zonas de nuestro país es muy difícil debido a que plagas de diferente índole atacan a las plantaciones ocasionando la destrucción total de la siembra. Las personas para combatir este mal utilizan insecticidas, fungicidas, pesticidas, etc. Lo que uno no se da cuenta es que con estos insumos lo que estamos haciendo es dañar el medio ambiente que nos rodea e incluso contagiarnos de alguna enfermedad si no tomamos alguna medida preventiva. Por ese motivo la Subdirección de Control Biológico tiene por objetivo intensificar el uso del control biológico en los principales cultivos y valles agrícolas del país, así como propiciar la reducción del uso de agroquímicos para disminuir los residuos tóxicos en los alimentos, proteger la salud del agricultor y la contaminación del medio ambiente. [6]

\*Jhelly Reynaluz Pérez Núñez, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Av. Venezuela s/n., Ciudad Universitaria, Lima-Perú. Corresponding author [jhelly.perez@unmsm.edu.pe](mailto:jhelly.perez@unmsm.edu.pe).

\*\*Roxana López Cruz, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Av. Venezuela s/n., Ciudad Universitaria, Lima-Perú. Corresponding author [rlopezc@unmsm.edu.pe](mailto:rlopezc@unmsm.edu.pe).

Para cumplir con estos objetivos se emplean las siguientes estrategias :

- Producir controladores biológicos, efectuar introducciones y cuarentena de especies de controladores biológicos exóticos; optimizar métodos de producción de controladores biológicos; desarrollar metodologías MIP para cultivos ecológicos, control de calidad a los agentes biológicos producidos por los laboratorios en convenio.
- Mantener convenios de promoción, producción y empleo del control biológico a través de las Direcciones Ejecutivas del SENASA.
- Capacitar en control biológico, evaluaciones de plagas y uso de controladores biológicos; a los especialistas del SENASA para la formación de evaluadores de cultivos en campo en el ámbito de su jurisdicción.
- Dictar cursos de entrenamiento en Control Biológico a profesionales, técnicos y agricultores en la Subdirección de control biológico y en las Direcciones Ejecutivas.

La importancia del estudio de la dinámica de los controladores biológicos recae en el hecho de que por lo general son de bajos costos y no son nocivos ni para el medio ambiente ni las personas del entorno. El control biológico es una técnica milenaria que utilizaron culturas como la china en el siglo III. Fue sin embargo, a finales del siglo XIX cuando el control biológico de plagas despertó un gran interés debido al éxito que se consiguió con la introducción de la mariquita (*Rodolia cardinales*) para el control de la cochinilla acanalada (*Icerya purchasi*) realizado en los Estados Unidos entre 1888-1889 por Charles Valentine Riley, salvando así a la floreciente industria de los cítricos de California [7].

En [8] se utiliza la expresión “control biológico” con dos acepciones:

1. La introducción de los enemigos naturales por el hombre y el manejo que éste hace de ellos para controlar las plagas, al que llaman *control biológico aplicado*.
2. El control espontáneo en la naturaleza sin la intervención del hombre, que denominan *control biológico natural*.

En este último, el control biológico constituye un fenómeno ecológico en el cual las plantas y los animales los regulan sus enemigos naturales (agentes bióticos de mortalidad) y representa uno de los principales componentes del control natural que mantiene a todas las especies vivientes en un estado de equilibrio con sus ambientes.

Las especies que coexisten, cada una con su propia historia de selección natural, constituyen una comunidad natural. En esta comunidad, el tipo de especies y su abundancia a veces se mantienen constantes de un año al siguiente; pero cuando la comunidad se simplifica con la agricultura, el hábitat cambia drásticamente. Para cada individuo, nuevas condiciones favorables o desfavorables emergen y muchas especies de plantas y animales desaparecen, mientras que otras prevalecen con abundantes recursos y espacio. La ausencia de enemigos naturales y la reducción de la competencia con otras especies explican cómo ciertas especies de insectos se incrementaron en grandes números y se convirtieron en plagas [4].

En el contexto agrícola se denomina plaga a cualquier organismo que a determinado nivel de población o inóculo compite y causa daño económico sobre una especie animal o vegetal en cualquiera de las etapas de establecimiento, desarrollo o producción, o en el manejo posterior que el hombre hace de ella para su beneficio [4].

El control biológico busca invertir esta situación y frenar el crecimiento desmedido de las poblaciones plagas mediante un factor clave de mortalidad; esto es introduciendo depredadores naturales de la plaga y de esta manera se espera influir de forma drástica en la mortalidad de las especies plaga para evitar daños económicos.

**2. Metodología.** Las bases teóricas que se utilizan en el presente trabajo son las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) para el estudio de un modelo matemático, para el cual se verificara la existencia y unicidad, invarianza y acotación de las soluciones. La dinámica del control biológico es estudiada de forma local y asintótica, analizando las condiciones para la coexistencia de las tres especies así como también los escenarios de extinción total y parcial del sistema, de dónde vemos cuando tiene o no tiene éxito el control biológico. Para un mayor entendimiento los resultados fueron contrastados con sus respectivas simulaciones realizadas en un programa desarrollado en la tesis el cual aproxima las soluciones utilizando el método de Runge - Kutta de cuarto orden.

**2.1. Modelo de cadena alimenticia con tres niveles tróficos.** Los modelos depredador-presa, pueden ser vistos como cadenas alimenticias de dos niveles tróficos, dónde la presa es el primer nivel trófico y el depredador es el segundo nivel trófico. Modelos matemáticos de muchos procesos de control biológico se relacionan naturalmente con sistemas diferenciales de tres ecuaciones que describen el crecimiento de las plantas (presa), plaga (depredador medio) y el agente controlador (depredador superior) respectivamente. La interacción de estas tres especies comúnmente forma una cadena alimenticia. Entonces nuestro sistema resultante sería atractivo para modelar ciertos procesos de control biológico dónde la presa es una especie planta, el depredador intermedio es una plaga y el depredador superior es el agente controlador biológico; y la extinción simultanea de la plaga y el agente controlador es el sello del éxito del modelo de control biológico. Esto nos motiva a estudiar el siguiente modelo de cadena alimenticia, razón dependiente, con tres niveles tróficos. A continuación analizaremos el modelo estudiado por [2] y [5].

$$(2.1) \quad \begin{cases} x_1'(\tau) = rx_1 \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - \frac{1}{\eta_1} \frac{b_1 x_1 y_1}{a_1 y_1 + x_1} & , \quad x_1(0) > 0 \\ y_1'(\tau) = \frac{b_1 x_1 y_1}{a_1 y_1 + x_1} - e_1 y_1 - \frac{1}{\eta_2} \frac{b_2 y_1 z_1}{a_2 z_1 + y_1} & , \quad y_1(0) > 0 \\ z_1'(\tau) = \frac{b_2 y_1 z_1}{a_2 z_1 + y_1} - e_2 z_1 & , \quad z_1(0) > 0 \end{cases}$$

dónde variables dependientes del tiempo  $\tau$ , son las siguientes

| Variable    | Descripción                                    | Dimensión                                  |
|-------------|--|--|
| $x_1(\tau)$ | Densidad poblacional de las presas             | $\frac{\text{presa}}{\text{área}}$         |
| $y_1(\tau)$ | Densidad poblacional del depredador intermedio | $\frac{\text{depredador } i}{\text{área}}$ |
| $z_1(\tau)$ | Densidad poblacional del depredador superior   | $\frac{\text{depredador } s}{\text{área}}$ |

Definición de parámetros

| Variable | Descripción  | Dimensión   |
|----------|--|---|
| $r$      | Tasa de crecimiento intrínseco de la presa             | $\frac{1}{t}$                                       |
| $K$      | Capacidad de carga de la presa                         | $\frac{\text{presa}}{\text{área}}$                  |
| $\eta_1$ | Tasa de captura del depredador intermedio              | $\frac{\text{depredador } i}{\text{presa}}$         |
| $\eta_2$ | Tasa de captura del depredador superior                | $\frac{\text{depredador } s}{\text{depredador } i}$ |
| $a_1$    | Constante de semi saturación del depredador intermedio | $\frac{\text{presa}}{\text{depredador } i}$         |
| $a_2$    | Constante de semi saturación del depredador superior   | $\frac{\text{depredador } i}{\text{depredador } s}$ |
| $b_1$    | Razón de crecimiento máximo del depredador intermedio  | $\frac{1}{t}$                                       |
| $b_2$    | Razón de crecimiento máximo del depredador superior    | $\frac{1}{t}$                                       |
| $e_1$    | Tasa de muerte del depredador intermedio               | $\frac{1}{t}$                                       |
| $e_2$    | Tasa de muerte del depredador superior                 | $\frac{1}{t}$                                       |

Obsérvese que la relación entre estas tres especies es simple,  $z_1$  se alimenta únicamente de  $y_1$ , mientras que  $y_1$  se alimenta únicamente de  $x_1$ , y no se considera el reciclaje de nutrientes. Estas relaciones simples producen nuestra llamada cadena alimenticia . Una característica importante de una cadena alimenticia es el llamado “efecto dominó”, el cual dice: si una especie se extingue, entonces todas las especies de niveles tróficos superiores también lo harán. La demostración de este resultado se encuentra en [5].

Por simplicidad, adimensionalizaremos el sistema (2.1) mediante las siguientes transformaciones

$$\begin{aligned}
 t &= r\tau & \rightarrow & dt = r d\tau \\
 x &= \frac{x_1}{K} & \rightarrow & dx = \frac{1}{K} dx_1 \\
 y &= \frac{a_1 y_1}{K} & \rightarrow & dy = \frac{a_1}{K} dy_1 \\
 z &= \frac{a_1 a_2 z_1}{K} & \rightarrow & dz = \frac{a_1 a_2}{K} dz_1
 \end{aligned}$$

Haciendo el respectivo análisis tenemos nuestro modelo de cadena alimenticia con tres niveles tróficos adimensionalizado.

$$(2.2) \quad \begin{cases} x'(t) = x(1-x) - \frac{c_1 xy}{x+y} & , \quad x(0) > 0 \\ y'(t) = \frac{m_1 xy}{x+y} - d_1 y - \frac{c_2 yz}{z+y} & , \quad y(0) > 0 \\ z'(t) = \frac{m_2 yz}{z+y} - d_2 z & , \quad z(0) > 0 \end{cases}$$

**2.2. Existencia y unicidad de las soluciones.** Para mostrar la existencia y unicidad de las soluciones del sistema (2.2), trabajaremos con las funciones  $F_i$  para  $i = 1, 2, 3$  definidas por las ecuaciones siguientes

$$(2.3) \quad F_1(x, y, z) = x(1-x) - \frac{c_1 xy}{x+y}$$

$$(2.4) \quad F_2(x, y, z) = \frac{m_1 xy}{x+y} - d_1 y - \frac{c_2 yz}{z+y}$$

$$(2.5) \quad F_3(x, y, z) = \frac{m_2 yz}{z+y} - d_2 z$$

Las cuales están definidas para en

$$\Omega^\circ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\}$$

Consideremos  $\Omega^\circ$ , y la función

$$\begin{aligned}
 F &: \Omega^\circ \subseteq \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\
 &(x, y, z) & \mapsto & F(x, y, z)
 \end{aligned}$$

dónde

$$F(x(t), y(t), z(t)) = (F_1(x(t), y(t), z(t)), F_2(x(t), y(t), z(t)), F_3(x(t), y(t), z(t)))$$

y  $w(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , así tenemos el siguiente PVI asociado a  $w$  y  $F$

$$(2.6) \quad \begin{cases} w' = F(w) \\ w(0) = (x(0), y(0), z(0)) \end{cases}$$

Con  $x(0) > 0, y(0) > 0$  y  $z(0) > 0$ . Notamos que el PVI (2.6) es equivalente a nuestro modelo de cadena alimenticia con tres niveles tróficos definido por el sistema (2.2).

Para mostrar la existencia y unicidad de las soluciones del modelo (2.2), se utilizara el siguiente teorema.

**TEOREMA 1 (Existencia y unicidad).** *Sea  $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  localmente lipschitz y para cada  $j = 1, 2, 3$  se satisfice*

$$F_j(w) \geq 0 \text{ para cualquier } w \in \mathbb{R}_+^3 \text{ con } w_j = 0.$$

Entonces para cualquier  $w_0 \in \mathbb{R}_+^3$ , existe una única solución del PVI

$$\begin{cases} w' &= F(w) \\ w(0) &= w_0 \end{cases}$$

con valores en  $\mathbb{R}_+^3$ , la cual está definida en algún intervalo  $[0, T)$  con  $T \in \langle 0, \infty \rangle$ . Si  $T < \infty$ , entonces

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{j=1}^3 w_j(t) = \infty.$$

Este resultado se encuentra en [3] y [5].

**2.3. Positividad y acotación de las soluciones.** Notemos que el sistema (2.2) es un modelo ecológico-biológico, por ende debe cumplir con ciertas cuestiones biológicas como la positividad de las soluciones y también la acotación de las mismas, ya que no se considera que alguna población crezca indefinidamente.

LEMA 1. La región  $\Omega^\circ$  es invariante por el sistema (2.2). Esto es, si  $(x(0), y(0), z(0)) \in \Omega^\circ$ , entonces  $(x(t), y(t), z(t)) \in \Omega^\circ$  para todo  $t \geq 0$ . (Ver Prueba en [5]).

LEMA 2. Las soluciones  $x(t), y(t)$  y  $z(t)$  del sistema (2.2) son acotadas para todo  $t \geq 0$ . (Ver Prueba en [5]).

### 3. Estabilidad Local del Modelo.

**3.1. Existencia de  $(E_c)$  punto crítico interior a  $\Omega$ .** Por otro lado consideremos la existencia y unicidad de un punto de equilibrio interior a

$$(3.1) \quad \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

al cual llamaremos  $E_c$ ; pero esto lo haremos mediante el siguiente lema.

LEMA 3. El punto de equilibrio  $E_c = (x_c, y_c, z_c)$  del sistema (2.2), interior a  $\Omega$ , existe y es único si y solamente si se cumplen las siguientes condiciones

1.  $m_2 > d_2$
2.  $A > 1$
3.  $0 < c_1 < \frac{A}{A-1}$

Donde

$$(3.2) \quad A = \frac{m_1}{\frac{c_2(m_2 - d_2)}{m_2} + d_1}$$

y  $E_c$  está definido por

$$x_c = \frac{1}{A} (c_1 + A(1 - c_1)), \quad y_c = (A - 1)x_c \quad y \quad z_c = \frac{m_2 - d_2}{d_2} y_c.$$

(Ver Prueba en [2] y [5]).

**3.2. Estabilidad local del punto crítico  $E_c$ .** A continuación estudiaremos la estabilidad para el punto crítico  $E_c$ , además veremos las condiciones bajo las cuales el punto crítico  $E_c$  es estable. Para los resultados siguientes asumiremos que  $E_c$  existe, por consiguiente se satisfacen las condiciones del Lema 3 y estudiaremos su estabilidad local.

Para hallar la matriz Jacobiana del sistema (2.2), calcularemos las derivadas parciales respecto a  $x, y$  y  $z$  de las funciones  $F_1, F_2$  y  $F_3$  definidas por (2.3), (2.4) y (2.5) respectivamente. El desarrollo de estas derivadas lo encontramos en [5], en particular tenemos:

$$m_{1,1} = x_c \left( -1 + \frac{c_1 y_c}{(x_c + y_c)^2} \right) \quad \text{y} \quad m_{2,2} = y_c \left( -\frac{m_1 x_c}{(x_c + y_c)^2} + \frac{c_2 z_c}{(y_c + z_c)^2} \right)$$

En la siguiente proposición daremos condiciones suficientes para la estabilidad local de  $E_c$ .

PROPOSICIÓN 1 (Coexistencia de las tres especies). *Si  $m_{1,1} < 0$  y  $m_{2,2} < 0$  entonces  $E_c = (x_c, y_c, z_c)$  es local y asintóticamente estable.* (Ver Prueba en [2] y [5]).

**3.3. Inestabilidad local del punto crítico  $E_c$ .** En el apartado anterior asumimos la existencia del punto  $E_c$ , es decir que se satisfacen las condiciones del Lema 3, y estudiamos las condiciones bajo las cuales  $E_c$  es estable. Esto lo hicimos mediante el criterio de Routh, para lo cual calculamos la matriz Jacobiana del sistema (2.2) evaluamos en  $E_c = (x_c, y_c, z_c)$ , calculamos el polinomio característico de dicha matriz

$$P_M(\lambda) = \lambda^3 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda + A_3$$

y para que  $E_c$  sea estable, se debía verificar que  $A_1 > 0$ ,  $A_3 > 0$  y  $A_1 A_2 > A_3$  esto se debía a que en el arreglo

$$\begin{array}{c|cc} \lambda^3 & 1 & A_2 \\ \lambda^2 & A_1 & A_3 \\ \lambda^1 & \frac{A_1 A_2 - A_3}{A_1} & \\ \lambda^0 & A_3 & \end{array}$$

los componentes de la primera columna deben tener el mismo signo. Entonces para que  $E_c$  sea inestable basta que aparezca un componente negativo en la primera columna del arreglo anterior. Entonces para discutir la inestabilidad de  $E_c$ ; consideraremos la posibilidad de escoger  $c_1$  y  $c_2$  de tal manera que  $A_1 < 0$ .

Esto lo haremos mediante la siguiente proposición

PROPOSICIÓN 2. *Si se cumplen*

- i.  $0 < m_2 - d_2 < m_1 - d_1$
- ii.  $\frac{m_2}{d_2} < (m_1 - d_1) - (m_2 - d_2)$

*Entonces  $E_c$  es inestable cuando*

$$m_2 < c_2 < \frac{m_2(m_1 - d_1)}{m_2 - d_2}.$$

*Y  $c_2$  esta proximo al valor de  $\frac{m_2(m_1 - d_1)}{(m_2 - d_2)}$ .* (Ver Prueba en [2] y [5]).

**4. Comportamiento Asintótico de las Soluciones.** En esta sección estudiaremos el comportamiento asintótico de la solución del sistema (2.2) alrededor de  $E_0 = (0, 0, 0)$  y  $E_1 = (1, 0, 0)$ . Examinaremos condiciones que llevan a la extinción de ciertas especies, como la extinción de  $x$  y en consecuencia la extinción de  $y$  y  $z$  (extinción total  $E_0$ ); o la extinción de  $y$  y en consecuencia la extinción de  $z$  pero no de  $x$  (estado libre de depredadores  $E_1$ ); o la extinción de  $z$  mas no la de  $x$  y  $y$ . Todo esto ocurre cuando el punto de equilibrio  $E_c$ , interior a  $\Omega$ , no existe.

Una de las características de las cadenas alimenticias simples es el efecto dominó, el cual nos dice que si se extingue algún nivel trófico en nuestra cadena alimenticia, entonces también lo harán los niveles tróficos superiores (los que se alimentan de él).

PROPOSICIÓN 3 (Efecto dominó). *Sean  $x, y$  y  $z$  las soluciones del sistema (2.2). Entonces*

- *Si  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ .*

- Si  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ .

(Ver Prueba en [5]). Donde veremos que si se extingue  $x$  también lo hará  $y$ , y si se extingue  $y$  también lo hará  $z$ .

A continuación veremos un teorema que nos da las condiciones para la extinción de el depredador intermedio y superior, pero no de la especie presa  $x$ . El teorema sugiere que si el depredador intermedio tiene una capacidad de consumo baja (caracterizado por  $c_1 < 1$ ) entonces las presas persistirán.

LEMA 4. Si  $m_2 > d_2$  y  $0 < A \leq 1$  donde  $A$  esta definido por (3.2). Entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0.$$

(Ver Prueba en [5]).

TEOREMA 2 (Éxito del control biológico). Sea  $m_2 > d_2$  y  $0 < A \leq 1$ . Tal que si  $c_1 < 1$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t), z(t)) = (1, 0, 0).$$

*Demostración:* Para esta demostración utilizaremos el Lema 4 de la cual tenemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0.$$

De la primera ecuación del sistema (2.2) tenemos

$$x' = x - x^2 - \frac{c_1 xy}{x + y} > x(1 - c_1 - x)$$

como  $c_1 < 1$ , por el Teorema de Comparación y propiedad de la ecuación logística tenemos

$$\liminf x(t) \geq \liminf \frac{(1 - c_1)x(0)e^{(1-c_1)t}}{1 - c_1 + x(0)[e^{(1-c_1)t} - 1]} \geq 1 - c_1 > 0$$

como  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ , para  $0 < \varepsilon < c_1$  existe  $t_1^* > 0$  tal que

$$y(t) < \left(\frac{1 - c_1}{2}\right) \left(\frac{\varepsilon}{c_1 - \varepsilon}\right) \quad \forall t > t_1^*$$

y como  $\liminf x(t) \geq 1 - c_1$ , existe  $t_2^* > 0$  tal que

$$x(t) \geq 1 - c_1 > \frac{1 - c_1}{2} \quad \forall t > t_2^*$$

Sea  $t^* = \max\{t_1^*, t_2^*\}$  para el cual se cumple

$$\frac{y(t)}{x(t)} < \left(\frac{1 - c_1}{2}\right) \left(\frac{\varepsilon}{c_1 - \varepsilon}\right) \left(\frac{2}{1 - c_1}\right) = \frac{\varepsilon}{c_1 - \varepsilon}$$

Así para  $t > t^*$  se cumple

$$-\frac{c_1 y(t)}{x(t) + y(t)} > -\varepsilon \quad \forall t > t^*$$

entonces para  $t > t^*$ , de la primera ecuación del sistema (2.2) tenemos

$$x' = x - x^2 - \frac{c_1 xy}{x + y} > x - x\varepsilon - x^2$$

entonces del Teorema de Comparación y propiedad de la ecuación logística tenemos

$$\liminf x(t) \geq \liminf \frac{(1 - \varepsilon)x(0)e^{(1-\varepsilon)t}}{1 - \varepsilon + x(0)[e^{(1-\varepsilon)t} - 1]} \geq 1 - \varepsilon$$

haciendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tenemos

$$(4.1) \quad \liminf x(t) \geq 1.$$

Por otro lado, de la primera ecuación del sistema (2.2) tenemos

$$x' = x - x^2 - \frac{c_1xy}{x+y} < x - x^2$$

análogamente a lo anterior, por el Teorema de Comparación y propiedad de la ecuación logística tenemos

$$\limsup x(t) \leq \limsup \frac{x(0)e^t}{1+x(0)[e^t-1]} \leq 1$$

es decir

$$(4.2) \quad \limsup x(t) \leq 1.$$

entonces de las inecuaciones (4.1) y (4.2) tenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1.$$

A continuación veremos un teorema que nos da las condiciones para la extinción total de las tres especies. El teorema indica que si el depredador intermedio tiene una capacidad de consumo alta y agresiva (caracterizado por valores grandes de  $c_1$ ) y hay poca reposición de las presas para saciar dichas necesidades, entonces las tres especies se extinguirán.

**TEOREMA 3 (Extinción total).** *Sea  $m_2 > d_2$  y  $0 < A \leq 1$ . Tal que si*

$$c_1 > 1 + d_1 + c_2 \quad \text{y} \quad \delta := \frac{c_1 - (1 + d_1 + c_2)}{1 + d_1 + c_2} > \frac{x(0)}{y(0)},$$

entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t), z(t)) = (0, 0, 0).$$

*Demostración:* Utilizamos los resultados del Lema 4 en dónde

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0.$$

Si  $c_1 > 1 + d_1 + c_2$  y  $\delta := \frac{c_1 - (1 + d_1 + c_2)}{1 + d_1 + c_2} > \frac{x(0)}{y(0)}$ , entonces podemos afirmar

$$\frac{x(t)}{y(t)} < \delta, \quad \forall t > 0.$$

En efecto, probaremos esto por contradicción, entonces existe un  $t_1 > 0$  tal que

$$(4.3) \quad \frac{x(t_1)}{y(t_1)} \geq \delta \quad \text{y} \quad \frac{x(t)}{y(t)} < \delta \quad \text{para} \quad t \in [0, t_1).$$

Para  $t \in [0, t_1)$ , tenemos  $\frac{x(t)}{y(t)} < \delta \Rightarrow -\frac{1}{1+\frac{x}{y}} < -\frac{1}{1+\delta}$ ,

y de la primera ecuación del sistema (2.2) tenemos

$$x' = x - x^2 - \frac{c_1xy}{x+y} < x \left( 1 - \frac{c_1}{1+\frac{x}{y}} \right)$$

así para  $t \in [0, t_1)$ , tenemos

$$(4.4) \quad x' < x \left( 1 - \frac{1}{1+\delta} \right).$$



Además, de la segunda ecuación del sistema (2.2) tenemos

$$y' = \frac{m_1xy}{x+y} - y \left( d_1 + \frac{c_2z}{y+z} \right) > -y \left( d_1 + \frac{c_2z}{y+z} \right),$$

de la positividad de  $y$  y  $z$  tenemos

$$z < z+y \Rightarrow \frac{z}{y+z} < 1 \Rightarrow -c_2 < -\frac{c_2z}{y+z}$$

por lo tanto, se cumple

$$(4.5) \quad y' > y(-d_1 - c_2).$$

Por otro lado, tenemos

$$\delta = \frac{c_1 - (1 + d_1 + c_2)}{1 + d_1 + c_2}$$

Operando obtenemos

$$(4.6) \quad 1 - \frac{c_1}{\delta + 1} = -d_1 - c_2.$$

De (4.4), tenemos

$$\frac{x'}{x} < 1 - \frac{1}{1 + \delta}$$

$$x(t_1) < x(0) \exp \left\{ \left( 1 - \frac{1}{1 + \delta} \right) t_1 \right\}$$

por la ecuación (4.6), para  $t \in [0, t_1)$  tenemos

$$(4.7) \quad x(t_1) < x(0) \exp \{ -(d_1 + c_2)t_1 \}.$$

De la ecuación (4.5), tenemos

$$\frac{y'}{y} > -d_1 - c_2$$

luego tenemos

$$(4.8) \quad y(0) < y(t_1) \exp \{ (d_1 + c_2)t_1 \}.$$

De la relación (4.7) tenemos

$$x(t_1)y(0) < x(0)y(0) \exp \{ -(d_1 + c_2)t_1 \}$$

y por la relación (4.8) tenemos

$$x(t_1)y(0) < x(0)y(0) \exp \{ -(d_1 + c_2)t_1 \} < x(0)y(t_1) \exp \{ (d_1 + c_2)t_1 \} \exp \{ -(d_1 + c_2)t_1 \}$$

por consiguiente

$$x(t_1)y(0) < x(0)y(t_1) \exp \{ ((d_1 + c_2) - (d_1 + c_2))t_1 \} = x(0)y(t_1)$$

es decir

$$\frac{x(t_1)}{y(t_1)} < \frac{x(0)}{y(0)}$$

y de nuestras hipótesis iniciales tenemos

$$\delta \leq \frac{x(t_1)}{y(t_1)} < \frac{x(0)}{y(0)} < \delta$$

lo cual es una contracción. Así tenemos probada nuestra afirmación.

De forma similar a la construcción de (4.7), tenemos

$$(4.9) \quad x(t) < x(0)\exp\{-(d_1 + c_2)t\}$$

como  $d_1 > 0$  y  $c_2 > 0$  tenemos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \exp\{-(d_1 + c_2)t\} = 0$ , entonces para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe  $t^* > 0$  tal que

$$0 < x(t) < x(0)\exp\{-(d_1 + c_2)t\} < \varepsilon, \quad \forall t \geq t^*$$

de donde tenemos

$$-\varepsilon < x(t) < \varepsilon, \quad \forall t \geq t^*$$

es decir, para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe  $t^* > 0$  tal que

$$|x(t) - 0| < \varepsilon, \quad \forall t > t^*$$

lo cual es la definición del límite que queríamos probar.

**5. Simulación Computacional.** Las simulaciones computacionales de un modelo matemático permiten ver el comportamiento de las soluciones a través del tiempo, mediante métodos numéricos se podrá aproximar la solución del sistema para esto utilizaremos los métodos de Runge-Kutta ya que tienen un error local de truncamiento de orden alto, como los métodos de Taylor, pero permiten prescindir del calculo y evaluación de las derivadas de  $F(t, w)$ .

El método de Runge-Kutta de mayor uso es el de cuato orden en la forma de la ecuación en diferencias. Estos detalles y mas se pueden encontrar en [1].

Para implementar dichos algoritmos y realizar las simulaciones utilizamos MATLAB R2010a, ya que a pesar de ser el programa de simulación matemática mas utilizado nos brinda una interface amigable para el desarrollo de interfaces de usuario denominada *GUIDE*.

A continuación simularemos diversos escenarios de extinción.

Para los datos que se muestran en la Figura 5.1 se verifican las hipótesis del Teorema 2 por lo tanto se extingue el depredador intermedio y superior mientras que persiste la presa, es decir el control biológico fue efectivo.

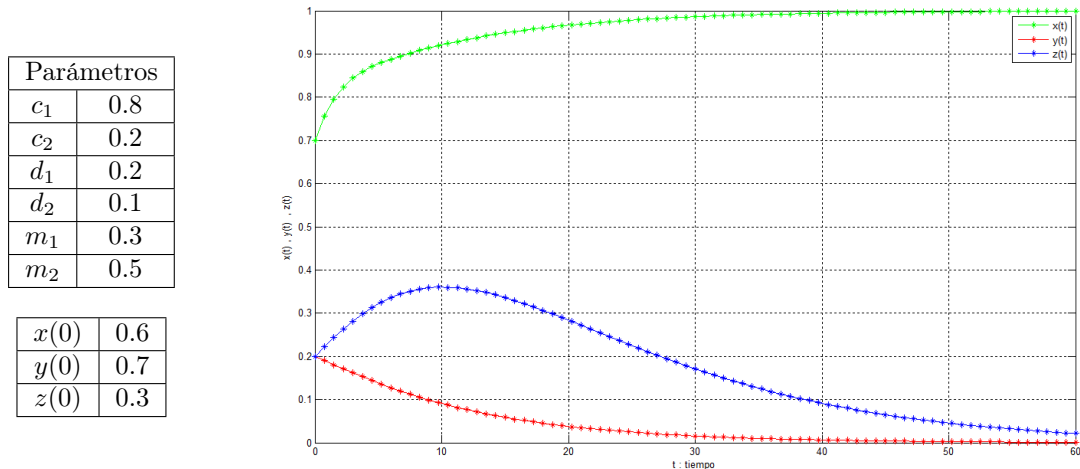


FIGURA 5.1. Soluciones del sistema (2.2) para modelar el Teorema 2

Para los datos que se muestran en la Figura 5.2 se verifican las hipótesis del Teorema 3 entonces el depredador intermedio depreda completamente a las presas, y al carecer de presas el depredador intermedio se extingue y por consiguiente el depredador superior también se extingue.

Tomando en cuenta los siguientes parámetros y condiciones iniciales en la Figura 5.3, podemos observar que las soluciones se estabilizan en la solución constante  $E_c$  además podemos ver que las tres especies coexisten y se encuentran en un estado de equilibrio.

| Parámetros |     |
|------------|-----|
| $c_1$      | 2.5 |
| $c_2$      | 0.2 |
| $d_1$      | 0.2 |
| $d_2$      | 0.1 |
| $m_1$      | 0.3 |
| $m_2$      | 0.5 |

|        |     |
|--------|-----|
| $x(0)$ | 0.6 |
| $y(0)$ | 0.7 |
| $z(0)$ | 0.3 |

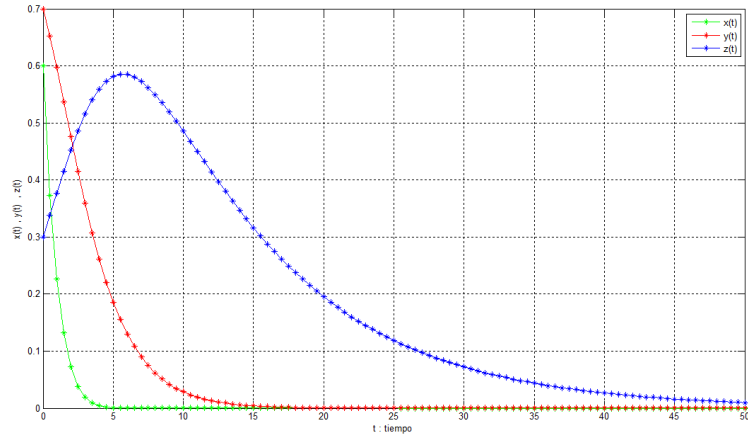


FIGURA 5.2. Soluciones del sistema (2.2) para modelar el Teorema 3

| Parámetros |     |
|------------|-----|
| $c_1$      | 2   |
| $c_2$      | 1.7 |
| $d_1$      | 1   |
| $d_2$      | 1   |
| $m_1$      | 1.4 |
| $m_2$      | 1.1 |

|        |      |
|--------|------|
| $x(0)$ | 1.77 |
| $y(0)$ | 0.23 |
| $z(0)$ | 0.03 |

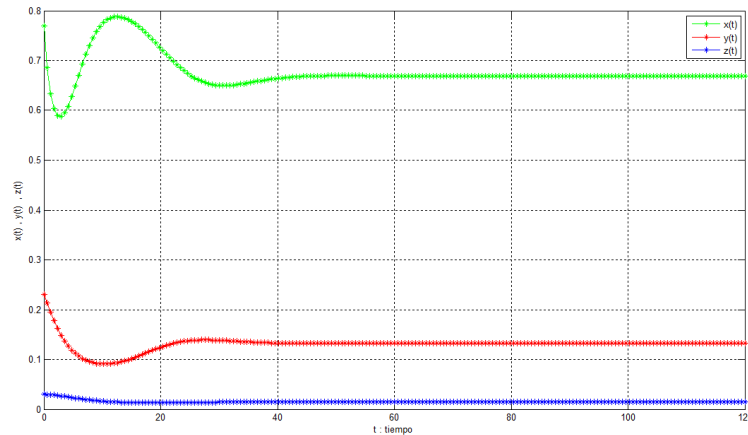


FIGURA 5.3. Estabilidad asintótica en  $E_c = (0,649351, 0,138051, 0,0138051)$

**6. Conclusiones.** Con este modelo matemático lo que se busca es que el control biológico aplicado a dicho sistema sirva para controlar cualquier tipo de plaga, en consecuencia tener una población que sobrevive a la propagación de la misma y así minimizar el impacto al medio ambiente.

Lo esencial de este trabajo es demostrar bajo que condiciones la plaga desaparece; si esta muere el control biológico también lo hará por considerarse un modelo de cadena alimenticia. La pregunta a resolver sería: ¿Es posible que las tres especies coexistan y se pueda evitar el daño de la población de plantas?. En el Lema 3 podemos observar que bajo ciertas condiciones, la presa (planta), depredador intermedio (plaga) y el depredador superior (control biológico) especies coexisten en estado de equilibrio.

Sabemos que en un modelo de cadena alimenticia se cumple el efecto domino (Proposición 3), lo cual fue demostrado en la tesis; esto nos dice que si se extingue un nivel trófico de la cadena alimenticia, entonces también lo harán todos los niveles trófico superiores a él. Notemos que el éxito del control biológico significa que la plaga se extingue y luego por el efecto domino también se extingue el controlador biológico; esto significa que solo persiste la presa (es decir el controlador biológico no representa una amenaza potencial).

El uso de la técnica del control biológico es una solución natural y no es contaminante, por eso que es de suma importancia conocer las condiciones bajo las cuales el control biológico será efectivo. Sabemos del Teorema 2, que bajo las siguientes condiciones:

- $m_2 > d_2$ .

- $0 < A \leq 1$ .
- $c_1 < 1$ .

este control es contundente en pocas palabras acaba con la plaga.

#### Referencias

- [1] BURDEN, R. L., AND FAIRES, J. D. *Numerical Analysis*. Brooks/Cole Cenage learning, USA, 2010.
- [2] HSU, S. B., HWANG, T. W., AND KUANG, Y. A Ratio-Dependent Food Chain Model and Its Applications to Biological Control. *Mathematical Biosciences* 181 (2003), 55–83.
- [3] LÓPEZ, R. *Structured SI epidemic models with applications to HIV edipemic*. PhD thesis, Arizona State University, Arizona - USA, 2006.
- [4] NICHOLIS, C. I. *Control biológico de insectos: un enfoque agroecológico*. Editorial Universidad de Antioquia, 2008.
- [5] PÉREZ, J. R. *Dinámica del Control Biológico Basado en un Modelo de Cadena Alimenticia Con Tres Niveles Tróficos*, Tesis de licenciatura, UNMSM, Lima Perú, 2014.
- [6] SNSA. Control Biológico, SENASA Perú, Recuperado el 12 de marzo del 2017, de: <http://www.senasa.gob.pe/senasa/control-biologico-2/>.
- [7] USDA. 20th Century Insect Control. Recuperado el 18 de marzo del 2014, de: <http://www.ars.usda.gov/is/timeline/insect.htm>, 1992.
- [8] VAN DEN BOSCH, R., GUTIERREZ, A. P., AND MESSENGER, P. S. *An introduction to biologicalcontrol*. Plenum Press, 1982.