Journal homepage: http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM/index

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
Vol. 04(01): 25-29 (2017)

Cocientes de variedades por acciones de grupos reductivos

Ratio of varieties by actions of reductive groups

NÉLIDA MEDINA GARCÍA*

Received, Jan. 25, 2017 *Accepted, Jun. 10, 2017*

Resumen

Consideramos el anillo de polinomios $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ en las variables $x_1, \ldots, x_n$ y coeficientes complejos. El grupo de permutaciones de $1, \ldots, n$ actúa sore R permutando las variables. El conjunto de invariantes por esta acción forma un anillo generado por los polinomios simétricos elementales. Emmy Noether prueba que si un grupo finito de matrices inversibles $G \subset GL(n;k)$ actúa sobre R, entonces el anillo de invariantes es generado por un número finito de invariantes homogéneos y define un operador en G para obtener polinomios invariantes. Existen relaciones algebraicas entre los generadores del anillo de invariantes y las órbitas de C^n/G. En 1963, Masayoshi Nagata demostró que el anillo de los invariantes de los grupos geométricamente reductivos es finitamente generado. Analizamos la existencia de una variedad cociente X/G donde G es un grupo algebraico actuando sobre una variedad algebraica X.

Palabras clave. variedades, grupos reducidos

Abstract

We consider the ring of polynomials $R = K[x_1, \ dots, x_n]$ in the variables $x_1, \ dots, x_n$ and complex coefficients. The permutation group of $1, \ dots, n$ acts sore R by permuting the variables. The set of invariants by this action forms a ring generated by elementary symmetric polynomials. Emmy Noether proves that if a finite group of inverse matrices $G \ subset GL(n;k)$ acts on R, then the ring of invariants is generated by a finite number of invariant homogeneous and defines an operator in G to obtain invariant polynomials. There are algebraic relationships between the generators of the invariant ring and the orbits of C^n/G. In 1963, Masayoshi Nagata demonstrated that the ring of the invariants of geomagically reductive groups is finitely generated. We analice the existence of a quotient variety X/G where G is an algebraic group acting on an algebraic variety X.

Keywords. Varieties, small groups

1. Introducción. Consideremos el álgebra de los polinomios en las indeterminadas $X_1, \ldots, X_n$ y coeficientes complejos, $C[X_1, \ldots, X_n]$. El grupo de permutaciones de $1, \ldots, n$, $\sum_n$, actúa sobre $C[X_1, \ldots, X_n]$ "permutando" $X_1, \ldots, X_n$,

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_n \times C[X_1, \ldots, X_n] &\to C[X_1, \ldots, X_n] \\ (\sigma, f(X_1, \ldots, X_n)) &\to f(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}). \end{aligned}$$

Esta acción preserva la homogeneidad y el grado de los polinomios. Un polinomio es homogéneo si todos sus términos no nulos tienen igual grado. Los polinomios f que no cambian por la acción de $\sum_n$, es decir son invariantes por la acción de $\sum_n$, se denominan funciones simétricas.

Ejemplos de funciones simétricas son las funciones simétricas elementales,

* Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú. Corresponding author *nmedina@pucp.pe.*

 DOI: http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2017.01.03

$$
\begin{aligned}
f_1(X_1,\dots,X_n) &= X_1+\dots+X_n\\
f_2(X_1,\dots,X_n) &= \sum_{1\le i<j\le n} X_iX_j\\
&\vdots\\
f_n(X_1,\dots,X_n) &= X_1\dots X_n,
\end{aligned}
$$

El conjunto de invariantes por la acción de $\sum_n$ es un subanillo de $C[X_1,\dots,X_n]$ llamado anillo de funciones simétricas.

Cualquier función simétrica se puede expresar como combinación lineal de productos de funciones simétricas elementales.

Ejemplo, $f(x,y)=x^4+x^2y^2+y^4=f_1^4(x,y)-4f_1^2(x,y)f_2(x,y)+3f_2^2(x,y)$.

Teorema 1 (Teorema fundamental de polinomios simétricos). *Todo polinomio simétrico $f\in C[X_1,\dots,X_n]$ puede ser escrito de modo único como un polinomio en las funciones simétricas elementales $f_1,\dots,f_n$.*

Este teorema afirma: el anillo de funciones simétricas es finitamente generado, $C[X_1,\dots,X_n]^{\Sigma_n}=C[f_1,\dots,f_n]$. Fue probado por Gauss (1876). Su demostración proporciona un algoritmo para expresar un polinomio simétrico en términos de las funciones simétricas elementales.

El grupo de las matrices inversibles $n\times n$ y entradas en un cuerpo k, $GL(n,k)$. se llama grupo lineal general

2. Acciones de grupos reductivos. Definición 1. *Un subconjunto finito $G\subset GL(n,k)$ es llamado grupo finito de matrices si G es no vacío y cerrado bajo la multiplicación de matrices. El número de elementos de G se denomina orden de G y se denota $|G|$.*

Los grupos finitos de matrices tienen la propiedad: Si $A\in G$, entonces $A^m=I^n$ para algún entero positivo m. I_n es la matriz identidad $n\times n$.

Recordemos que todo grupo finito es subgrupo de algún grupo de permutaciones $\sum_n$.

Ejemplo. En el plano, la rotación de 90 grados y la simetría respecto al eje Y se representan por las matrices

$$\sigma=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad \tau=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Las matrices $I_2,\sigma,\sigma^2,\sigma^3,\tau,\sigma\tau,\sigma^2\tau,\sigma^3\tau$ son distintas, satisfacen las relaciones $\sigma^4=\tau^2=I_2$. Este grupo de ocho matrices es generado por σ y τ.

Representamos por x el vector columna en las variables $X_1,\dots,X_n$. La acción de un grupo finito de matrices G sobre el anillo de polinomios $C[X_1,\dots,X_n]$ se define por

$$
\begin{aligned}
G\times C[X_1,\dots,X_n] &\to C[X_1,\dots,X_n]\\
(A,f(X_1,\dots,X_n)) &\to f(A.x).
\end{aligned}
$$

Definición 2. *Sea $G\subset GL(n,C)$ un grupo finito de matrices. Un polinomio $f\in C[X_1,\dots,X_n]$ es invariante bajo G si*

$$f(x)=f(A.x),\ \ \forall A\in G.$$

El conjunto de todos los polinomios invariantes bajo la acción del grupo G se representa por $C[X_1,\dots,X_n]^G$.

Teorema 2. *Sea $G\subset GL(n,C)$ un grupo finito de matrices. Entonces, el conjunto $C[X_1,\dots,X_n]^G$ es un subanillo de $C[X_1,\dots,X_n]$.*

Un polinomio $f\in C[X_1,\dots,X_n]$ es invariante bajo la acción de G si y sólo si las componentes homogeneas de f lo son.

Dados los polinomios $f1,\dots,f_m\in C[x_1,...,x_n]$, el conjunto de las expresiones polinomiales en $f_1,\dots,f_m$ y coeficientes en C, $C[f_1,\dots,f_m]$, es cerrado bajo la adición, multiplicación y contiene las constantes, por tanto es un subanillo de $C[X_1,\dots,X_n]$. Diremos que $C[f_1,\dots,f_m]$ es generado por $f_1,\dots,f_m$.

Definición 3. *Dado un grupo finito de matrices $G \subset GL(n,C)$ el operador de Reynolds de G es la aplicación $R_G : C[X_1,\dots,X_n] \to C[X_1,\dots,X_n]$ definida por*

$$R_G(f)(x) = \frac{1}{|G|}\sum_{A\in G} f(A.x).$$

Teorema 3. *Sea $G \subset GL(n,C)$ un grupo finito de matrices. Se cumplen:*
1. *R_G es lineal.*
2. *Si $f \in C[X_1,\dots,X_n]$, entonces $R_G(f) \in C[X_1,\dots,X_n]^G$.*

El teorema de Emmy Noether prueba que es posible encontrar un número finito de polinomios homogéneos de grado menor o igual que $|G|$, invariantes, generadores del anillo invariante $C[X_1,\dots,X_n]^G$.

Teorema 4. *Dado un grupo finito de matrices $G \subset GL(n,C)$, tenemos*

$$C[X_1,\dots,X_n]^G = C[R_G(x^\beta) : |\beta| \le |G|].$$

En particular, $C[X_1,\dots,X_n]^G$ es generado por un número finito de polinomios homogéneos invariantes.

Ejemplo. Dado el grupo de matrices $G = \{A_1, A_2\}$, donde

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = I_2,$$

escribimos (x, y) como un vector columna. Obtenemos $A_1.(x,y) = (?x, ?y)$,

$$R_G(x) = R_G(y) = \frac{1}{2}(A_1(x,y) + A_2(x,y)) = 0.$$

Un polinomio $f(x,y) = \sum a_{ij}x^iy^j$ es invariante por la acción de G si

$$A_1.f(x,y) = \sum a_{ij}x^{-i}y^{-j}$$
$$\sum(-1)^{i+j}a_{ij}x^iy^j = f(x,y).$$

Entonces, $i + j$ es un número par. Luego, $C[x,y]^G = C[x^2, xy, y^2]$.

Damos la definición de grupo reductivo como un tipo particular de grupo algebraico lineal.

Definición 4.

i) Dado un conjunto de polinomios $S \subset C[X_1,\dots,X_n]$, el conjunto de ceros comunes en C^n,

$$\nu(S) = \{x \in C^n : f(x) = 0, \forall f \in S\},$$

llama conjunto algebraico afín.

ii) Dado un conjunto no vacío $X \subset C^n$, el conjunto de polinomios

$$I(X) = \{f \in C[X_1,\dots,X_n] : f(x) = 0, \forall x \in X\}$$

es llamado el ideal ó anulador de X.

Por ejemplo, $\nu(C[X_1,\dots,X_n]) = \varphi, \nu(0) = C^n$.

Es claro que $I(X)$ es un ideal. Observamos que si I es el ideal generado por S, $I = \langle S\rangle$, entonces $\nu(S) = \nu(I)$. Por el teorema de la base de Hilbert, $C[X_1,\dots,X_n]$ es noetheriano y por tanto todos sus ideales son finitamente generados. El conjunto $\nu(S)$ es cerrado en la topología de Zariski.

Una variedad algebraica afín es un subconjunto algebraico irreducible de algún C^n.

Definición 5. *Sean $X \subset C^n$ una variedad afín y $U \subset X$ un entorno abierto de un punto $x \in X$. Una función $\phi : U \to C$ se dice función regular en x cuando existen polinomios $g, h \in C[X_1,\dots,X_n], h(x) \ne 0$ y otro entorno abierto $V \subseteq U$ tales que $\phi = gh^{-1}$ en V. Se dice que ϕ es regular en U, cuando ϕ es regular en todos los puntos de U.*

El conjunto de funciones regulares $X \to C$ es un álgebra y se denota $A(X)$.

Definición 6. *Sean X e Y variedades algebraicas afines y $\phi : X \to Y$ una función continua. Decimos que ϕ es un morfismo de variedades si para cada $V \subseteq Y$ abierto y para cada función regular $f : V \to C$, la función $f\circ\phi : \phi^{-1}(V) \to C$ es regular.*

Una función biyectiva ϕ es un isomorfismo si es regular y su inversa es regular.

Por ejemplo, $X = \nu(y - x^2)$ e $Y = R$ son isomorfos. Un isomorfismo es $\phi(t) = (t, t^2), t \in R$.

Definición 7. *Un grupo algebraico G es una variedad algebraica con una estructura de grupo abstracto tal que las aplicaciones de multiplicación e inversa*

$$G \times G \to G, \quad (g, g') \to gg'$$
$$G \to G, \quad g \to g^{-1}.$$

son morfismos de variedades.

Ejemplos de grupos algebraicos:

1. Los grupos finitos.
2. El grupo multiplicativo $C^* = C \backslash \{0\}$.
3. El grupo lineal general complejo $GL(n, C)$, de matrices $n \times n$, con determinante distinto de cero y entradas complejas.
   Algunos subgrupos importantes del grupo lineal son: $SL(n, C) = \{A \in GL(n, C) : \det(A) = 1\}$, $O(n, C)$, $SO(n, C)$.
4. El grupo $GL(V)$ de las transformaciones lineales inversibles de un espacio vectorial V.

Un grupo algebraico que es isomorfo a un subgrupo cerrado de $GL(n, C)$ se denomina grupo algebraico lineal.

Definición 8. *Sean G un grupo algebraico y X una variedad algebraica.*

i) Una acción de G sobre X es un morfismo

$$\phi : G \times X \to X$$
$$(g, x) \to \phi(g, x) = g.x$$

tal que:
$e.x = x$, donde e es el elemento identidad de G, y $x \in X$.
$(gg').x = g.(g'.x)$ para todo $g, g' \in G$, $x \in X$.
Decimos que G actúa sobre X, y X es llamado G-conjunto.

ii) Para un punto dado $x \in X$, la órbita de x es el conjunto

$$O(x) = G.x = \{g.x : g \in G\}.$$

y el estabilizador ó grupo de isotropía de x es el subgrupo cerrado

$$Est(x) = \{g \in G : g.x = x\}.$$

Ejemplo. El grupo $SO(2, C)$ actúa sobre R^2 mediante la rotación de un punto alrededor del origen. La órbita del origen por esta acción es el origen. La órbita de cualquier otro punto es una circunferencia con centro el origen.

Para cada variedad algebraica afín X existe el álgebra de las funciones regulares $A(X)$. La acción de un grupo algebraico G sobre X induce una acción de G sobre A(X).

El problema 14 propuesto por David Hilbert en el Congreso Internacional de Matemáticas (París, 1900) está relacionado a la generación finita del anillo de invariantes $A(X)G$. En 1963, Masayoshi Nagata demostró la generación finita del anillo de invariantes para los grupos geométricamente reductivos.

Definición 9. *Sea G un grupo algebraico lineal.*

i) G se llama unipotente si todos sus elementos son unipotentes, es decir si para cada $g \in G$ existe un entero r tal que $(g - I)^r = 0$, donde I es la matriz identidad de G.

ii) El radical unipotente $R_U(G)$ de G es el único subgrupo maximal, cerrado, conexo, normal, unipotente de G.

iii) G es reductivo si $R_U(G)$ es trivial.

Ejemplo. Los grupos $GL(nC)$, $SL(n, C)$, $PGL(n, C)$, los subgrupos finitos de $GL(n, C)$ son reductivos.

Ejemplo. Ningún grupo unipotente, conexo, no trivial es reductivo.

El siguiente teorema fue demostrado, originalmente para grupos geométricamente reductivos, por Nagata en 1964.

Teorema 5. *Sea G un grupo reductivo actuando racionalmente en un C-álgebra finitamente generada A. Entonces $A_G = \{f \in A : fg = f, \forall g \in G\}$ es finitamente generada como C-álgebra.*

Sea G actuando racionalmente sobre una variedad X. Puede suceder que el conjunto de órbitas no tenga una estructura de variedad.

Definición 10. *Sea G un grupo algebraico actuando sobre una variedad algebraica X. Un cociente categórico de X por G es un par (Y, ϕ) donde Y es una variedad algebraica y $\phi : X \to Y$ es un morfismo G-invariante tal que para toda variedad algebraica Z, si $\psi : X \to Z$ es un morfismo G-invariante, entonces existe un único morfismo $\eta : Y \to Z$ tal que $\eta \circ \phi = \psi$. Supongamos que X es una variedad afín. Entonces $A(X)$ es el anillo coordenado de X.*

Teorema 6. *Sea G un grupo reductivo actuando sobre una variedad afín X. Entonces un buen cociente de X por G existe y $X//G$ es afín. Es decir, Existe una variedad Y y un morfismo $\phi : X \to Y$ tal que:*

i) *ϕ es constante en las órbitas.*

ii) *ϕ es sobreyectiva.*

iii) *Si $U \subset Y$ es un subconjunto abierto, el homomorfismo inducido $\phi^+ A(U) \to A(\phi_1(U))^G$ es un isomorfismo.*

iv) *Si W es un subconjunto cerrado G-invariante de X, entonces $\phi(V)$ es cerrado en Y.*

v) *Si W_1 y W_2 son subconjuntos cerrados de X, $W1$ y $W2$ son disjuntos entonces $\phi(W_1)$ y $\phi(W_2)$ son disjuntos.*

Referencias

[1] Cox David, Little Jhon & O'shea Donald., *Ideals, Varieties, and Algorithms*, Tercera edición, Springer Science-Business Media, USA.2007.

[2] Fléischmann Peter., *On Invariant Theory of Finite Groups*, Institut of Mathematics and Statistics. University of Kent at Canterbury. 2006.

[3] Reynoso Claudia., *Introducción a la Teoría de Invariantes Geométricos*, Departamento de Guanajuato, Guanajuato, México. 2010.