

УДК 622:510.67

**БУТСТРЕП МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРА ПЕРИОДИЧНОСТИ
В МОДЕЛИ СЖАТОГО МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД**

©*Лосев А. С.*, SPIN-код: 7609-3438, канд. физ.- мат. наук
Институт прикладной математики Дальневосточного отделения РАН
г. Владивосток, Россия, A.S.Losev@yandex.ru

**BOOTSTREP METHODS OF EVALUATING THE PARAMETER OF PERIODICITY IN
THE MODEL OF A COMPRESSED MASSIF OF
MOUNTAIN ROCKS**

©*Losev A.*, SPIN-код: 7609-3438, Ph.D.,
Institute for Applied Mathematics Far-Eastern Branch of the RAS
Vladivostok, Russia, A.S.Losev@yandex.ru

Аннотация. В работе получена статистически обоснованная модель, характеризующая зависимость параметра периодичности от предела прочности породы в задаче зональной дезинтеграции горных пород, в условиях рассмотрения малой выборки данных. Методами бутстреп моделирования определен вид зависимости параметра периодичности от предела прочности породы в математической модели зональной дезинтеграции горных пород вокруг глубоких подземных выработок. Проведено численное моделирование и сравнительный анализ различных видов исследуемой зависимости. Полученные результаты показали, что использование бутстреп методов оценки различных характеристик в исследовании геомеханических явлений и процессов в массивах горных пород, имеет существенное преимущество по сравнению с традиционными подходами, позволяя добиться необходимого уровня статистической значимости, через повышение числа бутстреп реализаций и объема бутстреп выборки.

Abstract. The paper obtained a statistically valid model characterizing the dependence of the periodicity parameter on the rock strength limit in the problem of the zone disintegration of rocks under the conditions of considering a small sample of data. By methods of bootstrap modelling, the type of the dependence of the periodicity parameter on the rock strength limit is determined in the mathematical model of the zone disintegration of rocks around deep underground excavations. Numerical modelling and comparative analysis of various types of the investigated dependence are carried out. The obtained results showed that the use of bootstrap methods for estimating various characteristics in the study of geomechanical phenomena and processes in rock massifs has a significant advantage over traditional approaches, allowing to achieve the necessary level of statistical significance, by increasing the number of bootstrap implementations and the bootstrap volume of the sample.

Ключевые слова: бутстреп методы, алгоритм, зональное разрушение массива, интервальные оценки параметров, доверительный интервал.

Keywords: bootstrapping methods, algorithm, zonal massif destruction, interval parameter estimates, confidential interval.

Задача безопасной и эффективной добычи полезных ископаемых является практически значимой и актуальной, поиску ее решения посвящено множество научных исследований, обзор которых приведен в работе [1]. Особый интерес представляет выявление закономерностей деформации и разрушения массива пород, которые позволят прогнозировать поведения горных пород вокруг подземных выработок на больших глубинах.

В работе [1] рассматривается постановка краевой задачи о распределении напряжений вокруг выработки на большой глубине. Данная модель учитывает нарушения сплошности среды, что позволяет выявлять и объяснять периодичность деформирования и разрушения массива горных пород. В ходе рассмотрения данной задачи в работе [2] методами статистического анализа на основе натуральных данных построена регрессионная модель, отражающая экспоненциальную зависимость параметра периодичности от положения середины первой зоны разрушения. В работе [3] установлено, что расположение зон разрушения экспоненциально зависит от предела прочности породы. Проведен сравнительный анализ, полученных моделей с натурными данными и аналогичными моделями линейного вида, предложенными в работе [4].

Полученные результаты [2-4], основаны на предельно маленьких выборках натуральных данных, поэтому существует высокая доля вероятности, что незначительные расхождения в статистических показателях сравниваемых моделей, могут нивелировать и выдать альтернативный результат при увеличении объема выборки. Помимо этого, аналитически не исследована зависимость параметра периодичности от предела прочности породы, которая может быть выражена суперпозицией полученных моделей.

В настоящей работе, проводится статистическое обоснование и выбор модели, характеризующей вид зависимости параметра периодичности от предела прочности породы. Проблема повышения степени обоснованности выбора наиболее значимой модели, решается увеличением объема выборки методами бутстреп моделирования.

Обратимся к задаче о распределении поля напряжений вокруг выработки круглого сечения [1], которая рассматривается как плоская и стационарная, в условиях несжимаемости и гидростатичности нагружения на бесконечности:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0.$$

Бигармоническое уравнение для функции дефектности определено как

$$\Delta^2 R - \gamma^2 R = 0,$$

и граничные условия

$$R|_{r=r_0} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial r}|_{r=r_0} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} R(r) = 0,$$

где σ_{rr} — нормальное радиальное напряжение, $\sigma_{\varphi\varphi}$ — нормальное тангенциальное напряжение, Δ — оператор Лапласа, γ — параметр периодичности модели. Решение для расстояния от центра выработки до точки массива, определено в виде:

$$R(r) = aJ_0(\sqrt{\gamma r}) + bN_0(\sqrt{\gamma r}) + cK_0(\sqrt{\gamma r}),$$

где J_0, N_0, K_0 — функции Бесселя, Неймана и Макдональда нулевого порядка [1].

В работе [2] по данной задаче, получены и статистически обоснованы две модели зависимости параметра периодичности модели — γ от положения середины первой зоны разрушения — r линейного вида:

$$\gamma = f_1(r) = -10r + 23,$$

и нелинейного вида:

$$\gamma = f_2(r) = 50,381 \exp(-1,3669r).$$

В работе [3] исследованы модели зависимости положения середины первой зоны разрушения — r от предела прочности породы на одноосное сжатие — σ линейного вида:

$$r = g_1(\sigma) = 0,008\sigma + 0,757,$$

и нелинейного вида:

$$r = g_2(\sigma) = 0,8133 \exp(0,0061\sigma).$$

Таким образом, зависимость параметра периодичности от предела прочности породы, может быть выражена одной из суперпозиций $\gamma = f_1(g_1(\sigma)), \gamma = f_1(g_2(\sigma)), \gamma = f_2(g_1(\sigma)), \gamma = f_2(g_2(\sigma))$.

Выбор наиболее оптимальной и статистически обоснованной модели проведем на основе сравнительного анализа доверительных интервалов коэффициента детерминации — \tilde{R}^* , построение которых проведем традиционными методами (1) и бутстреп методами.

$$\left(\sqrt{\tilde{R}^*} - t_\alpha \sqrt{\frac{1 - \tilde{R}^*}{n - 2}} \right)^2 \leq \tilde{R}^* \leq \left(\sqrt{\tilde{R}^*} + t_\alpha \sqrt{\frac{1 - \tilde{R}^*}{n - 2}} \right)^2, \quad (1)$$

где t_α — табличное значение t -критерием Стьюдента при заданном уровне значимости [5].

Обозначим данные о параметре периодичности и пределе прочности породы, через множество $Z = \{z_i | z_i = (\gamma_i, \sigma_i)\}, i = 1, \dots, m$. Бутстреп алгоритм построения доверительного интервала коэффициента детерминации разработан ранее [6] и выглядит следующим образом:

1. Генератором случайных чисел построим бутстреп выборку, объемом n элементов, вытягивая на каждом шаге элементы из множества Z с повторением, случайным образом, и формируя из них выборку вида:

$$\{z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*\}_1 \text{ где } z_j^* \in Z, j = 1, \dots, n.$$

2. Рассчитаем для полученной выборки бутстреп оценку коэффициента детерминации \tilde{R}_1^* .

3. Повторим предыдущие шаги B -раз, сформировав в результате набор коэффициента детерминации $\tilde{R}_1^*, \tilde{R}_2^*, \dots, \tilde{R}_B^*$.

4. Отсортируем набор коэффициента детерминации $\tilde{R}_1^*, \tilde{R}_2^*, \dots, \tilde{R}_B^*$ в порядке возрастания.

5. Определим доверительный интервал бутстреп распределения по формуле

$$\tilde{R}_{B \cdot \frac{\alpha}{2}}^* \leq \tilde{R}^*(n, \alpha) \leq \tilde{R}_{B \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}^*.$$

Технология бутстреп моделирования напрямую зависит от B — число бутстреп реализаций и n — объема бутстреп выборки. Ранее в работе [6], было получено, что в нашем случае достаточным будет положить $B = 10^5$ и $n = 200$ при уровне значимости $\alpha=0,1$.

Предварительный анализ данных показал, что суперпозиции $\gamma = f_1(g_2(\sigma))$ и $\gamma = f_2(g_1(\sigma))$ демонстрируют практически одинаковую оценку зависимости рассматриваемых параметров. Поэтому далее, будем рассматривать три вида суперпозиции: 1) $\gamma = f_1(g_1(\sigma))$; 2) $\gamma = f_1(g_2(\sigma))$; 3) $\gamma = f_2(g_2(\sigma))$.

Графическое представление (рис. 1) бутстреп интервалов рассмотренных моделей позволяет установить, что скорость сходимости бутстреп интервалов рассматриваемых моделей различается в разы, особенно при больших n . А именно, в случае $n=25$ длины бутстреп интервалов рассмотренных по порядку моделей равны: 0,0414, 0,0037, 0,0022. Соответственно отношение бутстреп интервалов модели № 1 и № 2 равно — 11,19, модели № 1 и № 3 — 19,02, модели № 2 и № 3 — 1,68. В предельном случае при $n=200$, отношение бутстреп интервалов модели № 1 и № 2 равно — 13,78, модели № 1 и № 3 — 22,78, модели № 2 и № 3 — 1,65.

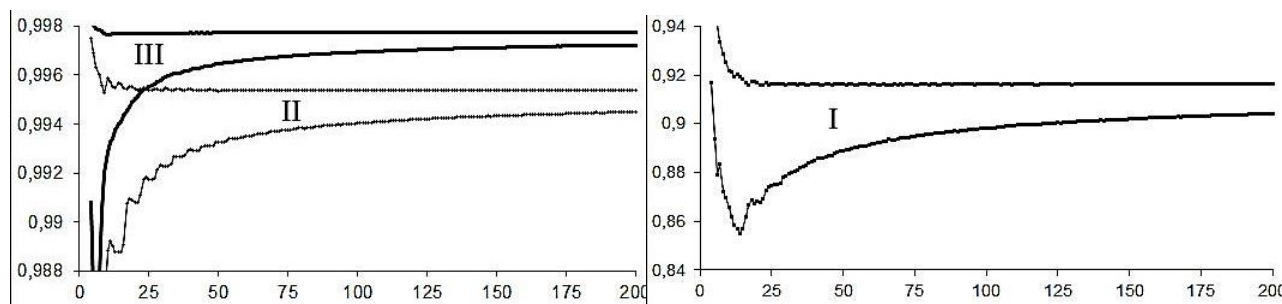


Рисунок 1. Бутстреп интервалы коэффициента детерминации при $\alpha=0,1$ (I — модель №1, II — модель №2, III — модель №3)

Сравнительный анализ доверительных интервалов (Таблица 1), полученных традиционным способом (1) и бутстреп интервалов также подтверждает медленную сходимость в модели № 1, так при $n=200$ длина бутстреп интервала меньше доверительного в 43,3 раза, в то время как в моделях № 2 и № 3 они меньше в 82 и 79 раза соответственно.

Таблица

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ТАБЛИЦА ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ И БУТСТРЕП ИНТЕРВАЛОВ

№ модели	Доверительный интервал	n	Бутстреп интервал	Отношение длин интервалов
1. $\gamma = f_1(g_1(\sigma))$	[0,478; 1]	50	[0,889; 0,916]	19,3
		100	[0,898; 0,916]	29,0
		150	[0,902; 0,916]	37,3
		200	[0,904; 0,916]	43,3
2. $\gamma = f_1(g_2(\sigma))$	[0,918; 1]	50	[0,993; 0,995]	41,0
		100	[0,994; 0,995]	82,0
		150	[0,994; 0,995]	82,0
3. $\gamma = f_2(g_2(\sigma))$	[0,921; 1]	50	[0,996; 0,998]	39,5
		100	[0,997; 0,998]	79,0
		150	[0,997; 0,998]	79,0
		200	[0,997; 0,998]	79,0

Анализ данных выраженных в процентном соотношении бутстреп полуинтервала от его середины (Рисунок 2), показал, что отклонение коэффициента детерминации в модели № 2 и № 3 стабильно не превышает 0,5% при $n \geq 10$, в то время как в модели № 1 данный результат не достигается и при $n=200$.

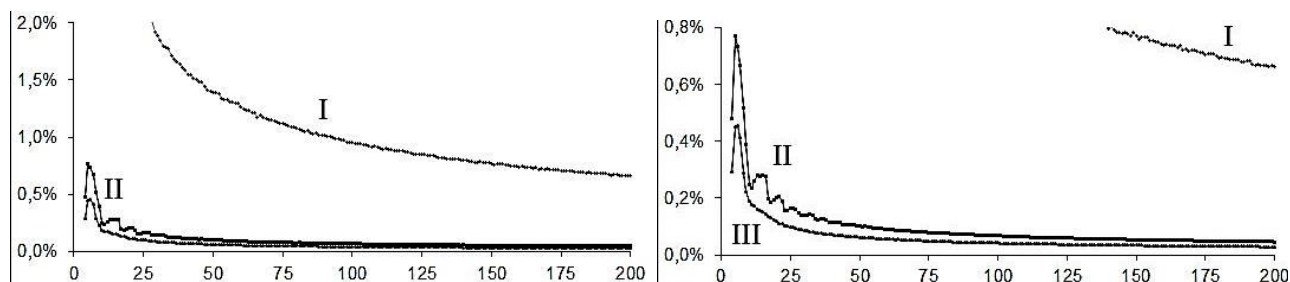


Рисунок 2. Отклонение оценки коэффициента детерминации от границ бутстреп интервала в зависимости от размерности бутстреп выборки (I — модель №1, II — модель №2, III — модель №3)

В результате проведенного бутстреп анализа получается, что наиболее статистически значимой моделью зависимости параметра периодичности от предела прочности породы с помощью показателя коэффициента детерминации является суперпозиция вида:

$$\gamma = f_2(g_2(\sigma)) = 50,381 \exp(-1,1117e^{0,0061\sigma})$$

Таким образом, можно утверждать, что экспоненциальная модель, характеризующая зависимость параметра периодичности от предела прочности породы наиболее значима и статистически обоснована из числа рассмотренных. Использование бутстреп методов оценки различных характеристик в исследовании геомеханических явлений и процессов в массивах горных пород, имеет существенное преимущество по сравнению с традиционными подходами, позволяя добиться необходимого уровня статистической значимости, через повышение числа бутстреп реализаций и объема бутстреп выборки. Аналогичным образом могут быть получены другие статистические оценки, необходимые при описании геомеханических явлений.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда № 14-11-00079.

Список литературы:

1. Гузев М. А., Макаров В. В. Деформирование и разрушение сильно сжатых горных пород вокруг выработок. Владивосток: Дальнаука, 2007. 232 с.
2. Лосев А. С. Статистическая оценка параметра периодичности модели зональной дезинтеграции горных пород // Бюллетень науки и практики. 2017. №7 (20). С. 78-82.
3. Лосев А. С. Зависимость зоны разрушения массива вокруг горной выработки от предела прочности породы // Горные науки и технологии. 2017. № 2. С. 43-49.
4. Ксендзенко Л. С., Макаров В. В., Опанасюк В. Н., Голосов А. М. Закономерности деформирования и разрушения сильно сжатых горных пород и массивов. Владивосток: ДВФУ, 2014. 192 с.
5. Носко В. П. Эконометрика. М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2011. 576 с.

6. Лосев А. С. Бутстреп методы построения доверительных интервалов оценки параметров модели зональной дезинтеграции горных пород вокруг подземной выработки // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2017. № 44(4). С. 114-121.

References:

1. Guzev, M. A., & Makarov, V. V. (2007). Deformirovanie i razrushenie sil'no szhatyh gornyh porod vokrug vyrabotok. Vladivostok: Dal'nauka, 232.

2. Losev, A. (2017). Statisticheskaja ocenka parametra periodichnosti modeli zonal'noj dezintegracii gornyh porod [Statistical evaluation of the periodicity parameter the model of zonal disintegration rocks]. *Bjulleten' nauki i praktiki [Bulletin of Science and Practice]*. 7 (20). 78-82.

3. Losev, A. S. (2017). Zavisimost' zony razrusheniya massiva vokrug gornoj vyrabotki ot predela prochnosti porody [Dependence of the zone destruction the massive around mine workings from the limit strength of the breed]. *Gornye nauki i tehnologii [Mining science and technology]*. (2). 43-49. (In Russ.)

4. Ksendzenko, L. S., Makarov, V. V., Opanasjuk, V. N., & Golosov, A. M. (2014). Zakonomernosti deformirovaniya i razrusheniya sil'no szhatyh gornyh porod i massivov. Vladivostok: DVFU, 192.

5. Nosko, V. P. (2011). Jekonometrika. Moskva: Izdatel'skij dom Delo RANHiGS, 576.

6. Losev, A. S. (2017). Butstrep metody postroeniya doveritel'nyh intervalov ocenki parametrov modeli zonal'noj dezintegracii gornyh porod vokrug podzemnoj vyrabotki [Bootstrapping methods for constructing confidence intervals for the estimation of model parameters of the zonal disintegration of rocks around underground excavations]. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta. Tehničeskie nauki. [Herald of Dagestan State Technical University. Technical Sciences]*. 44(4). 114-121. (In Russ.)

*Работа поступила
в редакцию 20.10.2018 г.*

*Принята к публикации
24.10.2018 г.*

Ссылка для цитирования:

Лосев А. С. Бутстреп методы оценки параметра периодичности в модели сжатого массива горных пород // Бюллетень науки и практики. 2018. Т. 4. №11. С. 228-233. Режим доступа: <http://www.bulletennauki.com/losev-a> (дата обращения 15.11.2018).

Cite as (APA):

Losev, A. (2018). Bootstrep methods of evaluating the parameter of periodicity in the model of a compressed massif of mountain rocks. *Bulletin of Science and Practice*, 4(11), 228-233. (in Russian).