УДК 519.642

ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММЫ ЧИСЛОВОГО РЯДА МЕТОДОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

CALCULATING THE SUM OF A NUMBER SERIESBY THE METHOD OF INTEGRATION

©Апайчева Л. А.
канд. физ.-мат. наук,
Нижнекамский химико-технологический институт
(филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ»,
г. Нижнекамск, Россия, lubovap@mail.ru
©Apaicheva L.
Nizhnekamsk Institute Of Chemical Technology
(branch)FSFEI of HPE “KNRTU”
Nizhnekamsk, Russia, lubovap@mail.ru
©ГалеевЭ. И.
Нижнекамский химико-технологический институт
(филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ»
г. Нижнекамск, Россия, edvard_galeev@mail.ru
©Galeev E.
Nizhnekamsk Institute Of Chemical Technology
(branch) FSFEI of HPE “KNRTU”
Nizhnekamsk, Russia, edvard_galeev@mail.ru

Аннотация. Рассмотрен способ вычисления суммы числового ряда, использующий метод почленного интегрирования специально подобранного функционального ряда.

Abstract. A method for calculating the sum of a number series is considered, using the method of term-by-term integration of a specially selected functional series.

Ключевые слова: сумма ряда, метод интегрирования, рекуррентная формула.

Keywords: sum of the series, the method of integration, recurrent formula.

Ряды находят широкое применение в различных областях современной науки. В нашей работе [1] рассмотрены некоторые нестандартные подходы к решению задач по теме «Ряды». В практических задачах возникает также необходимость в вычислении суммы ряда, что в ряде случаев представляет особую сложность, так как решение таких задач требует изобретательности, догадки, творческого подхода.

Одной из важных целей данной работы является: дать возможность студентам более глубоко изучить курс математического анализа, способствовать развитию их интереса к математике, развитию творческого мышления, способностей применять теоретические знания в практической деятельности. Достижению этих целей помогает решение специально подобранных задач. Широкий выбор задач повышенной сложности имеется, например, в классическом сборнике задач [2].

В некоторых случаях удается подобрать функциональный ряд с известной суммой, почленное интегрирование которого приводит к нахождению суммы исходного ряда.

Рассмотрим пример: Вычислить сумму ряда

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)(2n-3)}{2\cdot 4\ldots(2n-2)(2n)}$$

Решение. Сначала докажем соотношение

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^{2n}xdx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\ldots\ 4\cdot 2}. \qquad (1)$$

Вычислим интеграл (1):

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^{2n}xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^{2n-2}x\,cos^2xdx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^{2n-2}x(1-sin^2x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^{2n-2}xdx-I_1. \qquad (2)$$

Интеграл I_1 будем вычислять по частям:

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^{2n-2}x\cdot sinx\cdot sinxdx=\left|\begin{matrix}u=sinx, & du=cosxdx\\ dv=cos^{2n-2}x\cdot sinxdx & \\ v=-\dfrac{1}{2n-1}cos^{2n-1}x & \end{matrix}\right|==-\frac{sinx}{2n-1}cos^{2n-1}x\left|{}_0^{\frac{\pi}{2}}\right.$$

$$+\frac{1}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^{2n}xdx==\frac{1}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^{2n}xdx. \qquad (3)$$

Из соотношений (2) - (3) получаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^{2n}xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^{2n-2}xdx-\frac{1}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^{2n}xdx$$

Отсюда выводим рекуррентную формулу

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n}xdx = \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n-2}xdx = \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n-4}xdx = \dots$$
$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\dots(2n-1)(2n-3)}{2\cdot 4\dots(2n-2)\cdot 2n}. \qquad (4)$$

Воспользуемся последней формулой для вычисления искомой суммы ряда. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\dots(2n-1)(2n-3)}{2\cdot 4\dots(2n-2)\cdot 2n} =$$
$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n}xdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} cos^{2n}xdx. \qquad (5)$$

Вычислим интеграл в правой части равенства (5):

$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^2x - cos^4x + cos^6x - cos^8x + \cdots + (-1)^{n+1}cos^{2n}x + \cdots)dx$.

Подынтегральной функцией является геометрическая прогрессия со знаменателем

$q = \; cos^2x\ (cos^2x < 1)$ и суммой $\frac{cos^2x}{1+cos^2x}$.

Следовательно,

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{cos^2x}{1+cos^2x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \frac{1}{1+cos^2x}\right)dx. \qquad (6)$$

Вычислим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+cos^2x} = \left|\begin{matrix} t = tgx, x = arctgt \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}, cos^2x = \dfrac{1}{1+t^2}\end{matrix}\right| = \int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{1}{1+t^2}\right)} =$$
$$= \int_0^{\infty}\frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Учитывая соотношения (5) - (6), находим искомую сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\dots(2n-1)(2n-3)}{2\cdot 4\dots(2n-2)(2n)} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Решение задач не примитивных – на применение формул, а требующих от студентов не только прочных знаний по программе, но и творческого подхода, побуждает студентов развивать свою математическую интуицию, логическое мышление, помогает подготовке к математическим олимпиадам.

Список литературы:

1. Апайчева Л. А., Шувалова Л. Е. Некоторые способы решения нестандартных задач по теме «Ряды» // Инновация наука. 2017. Т. 4. №4. С. 8-11.
2. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука. 1967. 444 с.

Reference:

1. Apaicheva, L. A., & Shuvalova, L. Ye. (2017). Some ways of solving non-standard problems on the topic Rows. *Innovatsionnaya nauka,* 4, (4), 8-11
2. Berman, G. N. (1967). Collection of problems on the course of mathematical analysis. Moscow, Nauka, 444

Работа поступила в редакцию 07.10.2017 г.

Принята к публикации 11.10.2017 г.

Ссылка для цитирования:

Апайчева Л. А., Галеев Э. И. Вычисление суммы числового ряда методом интегрирования // Бюллетень науки и практики. Электрон. журн. 2017. №11 (24). С. 12-15. Режим доступа: http://www.bulletennauki.com/apaicheva (дата обращения 15.11.2017).

Cite as (APA):

Apaicheva, L., & Galeev, E. (2017). Calculating the sum of a number series by the method of integration. *Bulletin of Science and Practice,* (11), 12-15