УДК: 517.9

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

ABOUT SOME COMPARISON THEOREMS FOR TWO–DIMENTIONAL LINEAR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR APPLICATIONS

©Саакян Г. Г.
канд. физ.–мат. наук
Арцахский государственный университет
г. Степанакерт, Армения, ter_saak_george@mail.ru
©Sahakyan G.
Ph.D., Artsakh State University
Stepanakert, Armenia, ter_saak_george@mail.ru

Аннотация. Предполагая непрерывность, монотонность и знакопостоянство коэффициентов линейной однородной системы дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = r(t)y_1, \end{cases}$$

на конечном отрезке $[a,b]$, доказываются теоремы сравнения, позволяющие свести определение числа нулей компонент решений некоторых систем к определению числа корней определенного уравнения. В работе приводится также достаточный критерий для осцилляции и неосцилляции системы.

Abstract. Assuming continuity, monotony and sign–constancy of coefficients of the second order linear:

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = r(t)y_1, \end{cases}$$

on a finite interval $[a,b]$, are proved comparison theorems, which allow to reduce the determination of zeros of the components of the solutions of some systems for the definition of the number roots of the definite equation. There are also sufficient criteria for the oscillation and nonoscillation system in the work.

Ключевые слова: однородная линейная система дифференциальных уравнений первого порядка, теорема сравнения, нули компонент решений, осцилляция.

Keywords: linear homogeneous system of differential equations of first order, comparison theorem, zeros of components of the solutions, oscillation.

Поведение нулей компонент решений системы:

$$\begin{cases} y_1' = p(t)y_2, \\ y_2' = r(t)y_1, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $p, r \in C[a,b]$, и связанные с ним вопросы осцилляции и неосцилляции решений, до сих пор полностью не исследованы и изучаются различными математиками [1–5].

Цель настоящей работы — доказать для рассматриваемых систем теоремы сравнения, связывающие числа нулей компонент решений этих систем, а также получить достаточный критерий осцилляции и неосцилляции системы.

Определение 1.1. Нетривиальное решение $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ системы (1.1) называется осциллирующим на отрезке $[a,b]$, если каждая из его компонент обращается в нуль в некоторой точке $[a,b]$, т.е. $y_i(t_i) = 0,\ t_i \in [a,b],\ i = 1,2.$

Определение 1.2. Система (1.1) называется осциллирующей, если она имеет хотя бы одно осциллирующее решение, в противном случае называется неосциллирующей.

Для дальнейшего изложения нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 1.1 (см., например, [6, с. 128]). *Если* $p_0,\ p_0', r_0 \in C[a,b]$, *то уравнение*

$$z'' + p_0(t)z' + r_0(t)z = 0 \tag{1.2a}$$

равносильно уравнению

$$y'' + q(t)y = 0, \tag{1.2b}$$

в котором

$$q(t) = -\frac{p_0^2(t)}{4} - \frac{p_0'(t)}{2} + r_0(t), \tag{1.2c}$$

т. е. всякому решению $z(t)$ уравнения (1.2 a) соответствует одно и только одно решение $y(t)$ уравнения (1.2b), задаваемое формулой

$$y(t) = z(t)e^{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} p_0(\tau)d\tau}. \tag{1.2d}$$

Заметим, что из соотношения (1.2d) следует, что нули функций $y(t)$ и $z(t)$ на отрезке $[a,b]$ совпадают.

Теорема Штурма о сравнении (см, например, [6, с. 134]). *Пусть даны два дифференциальных уравнения*

$$y'' + q_1(t)y = 0$$

и

$$y'' + q_2(t)y = 0,$$

причем $q_2(t) \geq q_1(t)$. Тогда между двумя последовательными нулями решения первого уравнения обязательно лежит по крайней мере один нуль любого решения второго уравнения.

Теорема 1.1. (см., [7]). Если в системе (1.1) $p, r \in C[a,b]$ и $p(t) \cdot r(t) \neq 0$ на отрезке $[a,b]$, то между всякими соседними нулями любой из компонент нетривиального решения системы (1.1) находится ровно один нуль другой компоненты того же решения (нули компонент перемежаются).

Из теоремы 1.1, в частности, следует, что, если n_i $(i=1,2)$ означает число нулей i-ой компоненты нетривиального решения системы (1.1) и $n_i \geq 1\,(i=1,2)$, то либо $n_1 = n_2$, либо $|n_1 - n_2| = 1$.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} u_1' = p(t)u_2, \\ u_2' = r(t)u_1, \end{cases} \tag{1.3}$$

предположив, что $p, r \in C^2[a,b]$. Дифференцируя по t первое уравнение системы (1.3), получим

$$u_1'' - p'(t)u_2 - p(t)u_2' = 0. \tag{1.4}$$

Далее, выразив u_2 и u_2' из уравнений системы (1.3) и затем подставив найденные значения в уравнение (1.4), получим следующее уравнение

$$u_1'' - \frac{p'(t)}{p(t)}u_1' - p(t)r(t)u_1 = 0. \tag{1.5}$$

Обозначим

$$k(t) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{p'(t)}{p(t)}\ , \tag{1.6}$$

тогда нетрудно проверить, что имеет место условие леммы 1.1, согласно которой уравнение (1.5) можно привести к следующему равносильному уравнению

$$y'' + q(t)y = 0, \tag{1.7}$$

в котором, с учетом (1.2 *c*) и (1.6), будем иметь

$$q(t) = -k^2(t) - k'(t) - p(t)r(t), \tag{1.8}$$

причем, согласно (1.2d), компонента $u_1(t)$ всякого решения системы уравнений (1.3) будет связана с решением $y(t)$ уравнения (1.7) соотношением

$$y(t) = u_1(t)e^{\int_{t_0}^{t} k(\tau)d\tau}.$$

Из последнего соотношения следует, что нули функций $u_1(t)$ и $y(t)$ на отрезке $[a,b]$ совпадают.

Рассмотрим теперь системы уравнений

$$\begin{cases} y_1' = p_1(t)y_2, \\ y_2' = r_1(t)y_1, \end{cases} \tag{1.9a}$$

и

$$\begin{cases} z_1' = p_2(t)z_2, \\ z_2' = r_2(t)z_1. \end{cases} \tag{1.9b}$$

Здесь, и всюду в дальнейшем, будем предполагать, что имеют место условия

$$p_i(t) > 0,\ r_i(t) < 0,\ \ i = 1,2.$$

Имеет место

Теорема 1.2. Пусть в системах (1.9a) и (1.9b) $p_i, r_i \in C^2[a,b]\ (i = 1,2)$, и

$$P(t) = \frac{p_2(t)}{p_1(t)}.$$

Если имеют место условия:

1. $p_i'(t) \le 0,\ r_i'(t) \ge 0, \qquad (p_i'(t) \ge 0,\ r_i'(t) \le 0),\ \ i = 1,2$,
2. $P'(t) \ge 0 \qquad (P'(t) \le 0)$,
3. $\left(\ln P(t)\right)'' \ge 0$,
4. $p_1(t) \cdot r_1(t) \equiv\ p_2(t) \cdot r_2(t)$,

$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ и $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ — соответственно нетривиальные решения систем (1.9 *a*)

и (1.9 *b*), то

a) между всякими соседними нулями $u_1(t)$ находится хотя бы один нуль $v_1(t)$,
b) между всякими соседними нулями $v_2(t)$ находится хотя бы один нуль $u_2(t)$.

Доказательство. Пусть $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ *и* $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ соответственно нетривиальные решения систем (1.9 *a*) и (1.9 *b*). Предположим, что имеют место условия:

$$p_i'(t) \le 0,\ r_i'(t) \ge 0\ \ (i = 1,2),\ \text{и}\ \ P'(t) \ge 0$$

(аналогично рассматривается и случай, записанный в скобках). Повторив вышеизложенные рассуждениями к каждой из систем (1.9 *a*) *и* (1.9 *b*), и, обозначив

$$k_i(t) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{p_i'(t)}{p_i(t)}, \tag{1.10}$$

$$q_i(t) = -k_i^2(t) - k_i' - p_i(t) r_i(t),\ \ i = 1,2, \tag{1.11}$$

получим соответствующие им уравнения:

$$y'' + q_1(t) y = 0 \tag{1.12 a}$$

и

$$z'' + q_2(t) z = 0. \tag{1.12 b}$$

Соотношения, связывающие первые компоненты решений систем (1.9, *a*) и (1.9, *b*) с решениями соответствующих им уравнений (1.12, *a*) и (1.12, *b*), будут иметь вид:

$$y(t) = u_1(t)e^{\int_{t_0}^{t} k_1(\tau)d\tau} \qquad (1.13\ a)$$

и

$$z(t) = v_1(t)e^{\int_{t_1}^{t} k_2(\tau)d\tau}. \qquad (1.13\ b)$$

Согласно предположениям и (1.10), будем иметь

$$k_i(t) \ge 0, \quad (i = 1,2). \qquad (1.14)$$

Поскольку $P'(t) \ge 0$, то, подставив вместо $P(t)$ в это неравенство $\frac{p_2(t)}{p_1(t)}$ и, упростив, получим

$$\frac{p_1'(t)}{p_1(t)} \le \frac{p_2'(t)}{p_2(t)}. \qquad (1.15)$$

Учитывая (1.10), (1.14) и (1.15), получим, что для любого $t \in [a,b]$

$$k_1(t) \ge k_2(t) \ge 0. \qquad (1.16)$$

Следовательно, для любого $t \in [a,b]$ будет верно неравенство

$$k_1^2(t) \ge k_2^2(t). \qquad (1.17a)$$

Далее, так как в силу условий теоремы $(\ln P(t))'' \ge 0$, то найдем, что

$$\left(\frac{P'(t)}{P(t)}\right)' \ge 0.$$

Подставив вместо $P(t)$ в это неравенство $\frac{p_2(t)}{p_1(t)}$ и, упростив, получим, что

$$\left(\frac{p_2'(t)}{p_2(t)} - \frac{p_1'(t)}{p_1(t)}\right)' \ge 0,$$

или, с учетом (1.10)

$$k_1'(t) \ge k_2'(t). \qquad (1.17b)$$

И, наконец, так как по условию теоремы $p_1(t)\cdot r_1(t) \equiv p_2(t)\cdot r_2(t)$ при $t \in [a,b]$, то учитывая неравенства (1.17a) и (1.17b), получим

$$q_2(t) - q_1(t) = \left(k_1^2(t) - k_2^2(t)\right) + \left(k_1'(t) - k_2'(t)\right) + p_1(t)r_1(t) - p_2(t)r_2(t) \ge 0$$

или

$$q_2(t) \ge q_1(t).$$

Из условий теоремы и обозначений (1.11) будет также следовать, что $q_1, q_2 \in C[a,b]$. Таким образом, для уравнений (1.12, *a*) и (1.12, *b*) имеют место условия теоремы сравнения Штурма, согласно которой *между соседними нулями всякого нетривиального решения* $y(t)$

уравнения (1.12, *a*)*, а значит, согласно* (1.13 *a*)*, и* $u_1(t)$*, найдется хотя бы один нуль для всякого нетривиального решения* $z(t)$ *уравнения* (12 *b*)*, а значит, согласно* (1.13*, b*)*, и* $v_1(t)$.

Для доказательства утверждения b) достаточно повторить вышепроведенные рассуждения применительно к системам:

$$\begin{cases}(-z_2)' = -r_2(t)z_1, \\ z_1' = -p_2(t)(-z_2).\end{cases}$$

и

$$\begin{cases}(-y_2)' = -r_1(t)y_1, \\ y_1' = -p_1(t)(-y_2).\end{cases}$$

Теорема доказана.

Основные результаты

Обозначим через n_i — число нулей i-ой компоненты нетривиального решения системы (1.9 *a*), а через m_i $(i=1,2)$ — число нулей i-ой компоненты нетривиального решения системы (1.9 *b*).

Теорема 2.1. Пусть в системах (1.9 *a*) и (1.9 *b*) $p_i, r_i \in C^2[a,b]$ $(i=1,2)$,

$$P(t) = \frac{p_2(t)}{p_1(t)},$$

а также имеют место условия:

1. $p_i'(t) \le 0,\ r_i'(t) \ge 0,$ $\quad (p_i'(t) \ge 0,\ r_i'(t) \le 0),\ i=1,2$,
2. $P'(t) \ge 0$ $\quad (P'(t) \le 0)$,
3. $(\ln P(t))'' \ge 0$,
4. $p_1(t) \cdot r_1(t) \equiv p_2(t) \cdot r_2(t)$,

Тогда, если компоненты нетривиального решения системы (1.9 *a*) имеют нули, причем $n_1 = n_2 + 1$, то их число совпадет с числом нулей соответствующей компоненты любого нетривиального решения системы (1.9 *b*) или будет отличаться на единицу ($m_i = n_i$ или $|m_i - n_i| = 1,\ i=1,2$).

Доказательство. По условию теоремы $n_i > 0$ $(i=1,2)$. Из теоремы 1.2 будет следовать, что при выполнении условий теоремы 2.1 имеют место неравенства

$$m_1 \ge n_1 - 1,\ n_2 \ge m_2 - 1. \tag{2.1}$$

Предположим теперь, что $n_1 = n_2 + 1$. Согласно теореме 1.1, будут верны следующие условия:

$$m_1 = m_2 \ \textit{или}\ |m_1 - m_2| = 1.$$

Если $m_1 = m_2$, то с учетом (2.1) будем иметь

$$n_1 = n_2 + 1 \ge m_2 = m_1,$$

откуда и из (2.1) будет следовать, что

$$n_1 - 1 \le m_1 \le n_1,\ n_2 \le m_2 \le n_2 + 1. \qquad (2.2a)$$

Если $m_1 - m_2 = 1$, то легко найти, что в этом случае будем иметь

$$n_1 - 1 \le m_1 \le n_1 + 1,\ n_2 - 1 \le m_2 \le n_2 + 1. \qquad (2.2b)$$

И, наконец, в случае $m_2 - m_1 = 1$ найдем, что

$$m_1 = n_1 - 1,\ \ m_2 = n_2 + 1. \qquad (2.2c)$$

Из соотношений (2.2 *a*)–(2.2 *c*) и будет следовать утверждение теоремы. Теорема доказана.

Замечание. Аналогично проведенным в теореме рассуждениям, можно показать, что в случае, когда имеют место условия теоремы 2.1 и $n_1 = n_2$, то возможны следующие случаи:

1. $m_1 = n_1,\ m_2 = n_2$.
2. $m_1 = n_1,\ m_2 = n_2 - 1\ \ (m_1 = n_1 - 1,\ m_2 = n_2)$
3. $m_1 = n_1,\ m_2 = n_2 + 1\ \ (m_1 = n_1 + 1,\ m_2 = n_2)$
4. $m_1 = n_1 - 1,\ m_2 = n_2 - 1$.
5. $m_1 = n_1 + 1,\ m_2 = n_2 + 1$.
6. $m_1 = n_1 - 1,\ m_2 = n_2 - 2$.

Проиллюстрируем применение теоремы 2.1 на следующем примере. Рассматривается задача на определение числа нулей компонент нетривиальных решений системы

$$\begin{cases} y_1' = t y_2, \\ y_2' = -t^3 y_1, \end{cases} \qquad (2.3)$$

на отрезке $\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$. Параллельно с системой (2.4) рассмотрим систему

$$\begin{cases} z_1' = t^2 z, \\ z_2' = -t^2 z_1. \end{cases} \qquad (2.4)$$

В данном случае примем

$$p_1(t) = t^2,\ r_1(t) = -t^2,\ p_2(t) = t,\ r_2(t) = -t^3.$$

Заметим, что для $t \in \left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$

$$p_i(t) > 0,\ \ r_i(t) < 0,\ \ (i = 1{,}2).$$

Имеют место условия теоремы 2.1, а именно

1. $p_i'(t) > 0,\ \ r_i'(t) < 0\ \ \ (i = 1{,}2)$,
2. $(P(t))' = \left(\frac{p_2(t)}{p_1(t)}\right)' = \left(\frac{1}{t}\right)' = -\frac{1}{t^2} < 0$,
3. $p_1(t) \cdot r_1(t) \equiv\ p_2(t) \cdot r_2(t)$.
4. $(\ln P(t))'' = \frac{1}{t^2} \ge 0$.

Непосредственным вычислением нетрудно проверить, что частным решением системы (2.4) будет $z_1(t)=\sin\left(\frac{t^3}{3}\right)$, $z_2(t)=\cos\left(\frac{t^3}{3}\right)$.

Для определения нулей первой компоненты $z_1(t)$ будем иметь

$$\frac{t^3}{3}=\pi k,\ k\in Z,$$

откуда найдем формулу для определения t

$$t=\sqrt[3]{3\pi k},\kappa\in Z.$$

Учитывая условие $\frac{\pi}{2}\le t\le\pi$, найдем

$$\frac{\pi^2}{24}\le\kappa\le\frac{\pi^2}{3}.$$

Отсюда получим, что количество значений k, удовлетворяющих этому неравенству, а значит, n_1-число нулей первой компоненты решения системы (2.4) будет равно 3-м. Аналогично можно найти, что n_2— число нулей второй компоненты, также будет равно 3-м. Таким образом, $n_1=n_2$ и, согласно замечанию, количество нулей компонент решений системы (2.3) будет определяться одним из указанных в замечании соотношением. Ниже, на рисунках 1 *a* и 1 *b*, приводятся графики решений соответственно для систем (2.4) и (2.3) в среде Mathcad на отрезке $[\pi/2,\pi]$ с начальными условиями $y_1(\pi/2)=z_1(\pi/2)=-1$, $y_2(\pi/2)=z_2(\pi/2)=1$. В данном случае, как видно из рисунков 1 *a* и 1 *b*, $n_1=n_2=3$, $m_1=4$, $m_2=3$ (первой компоненте на рисунке соответствует $y0$, а второй — $y1$). Имеет место указанный в замечании 3-ий случай, записанный в скобках.

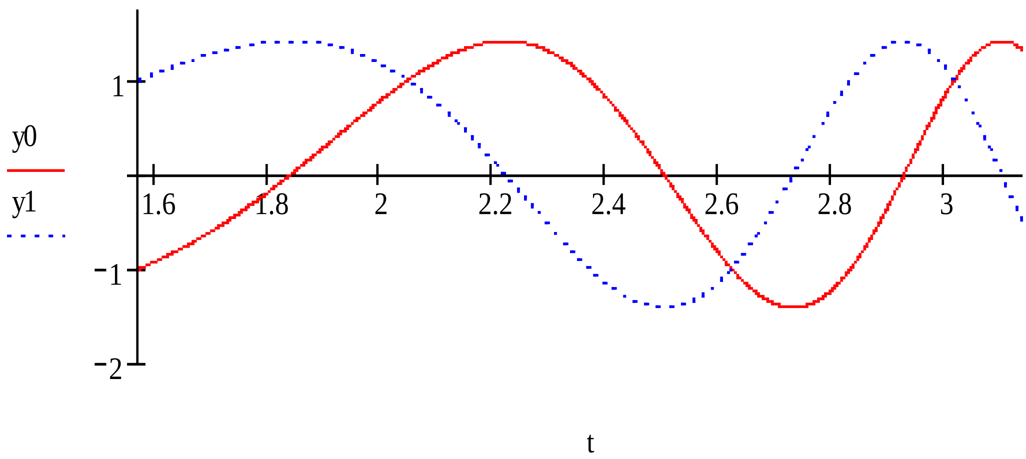

Рисунок 1 *a*.

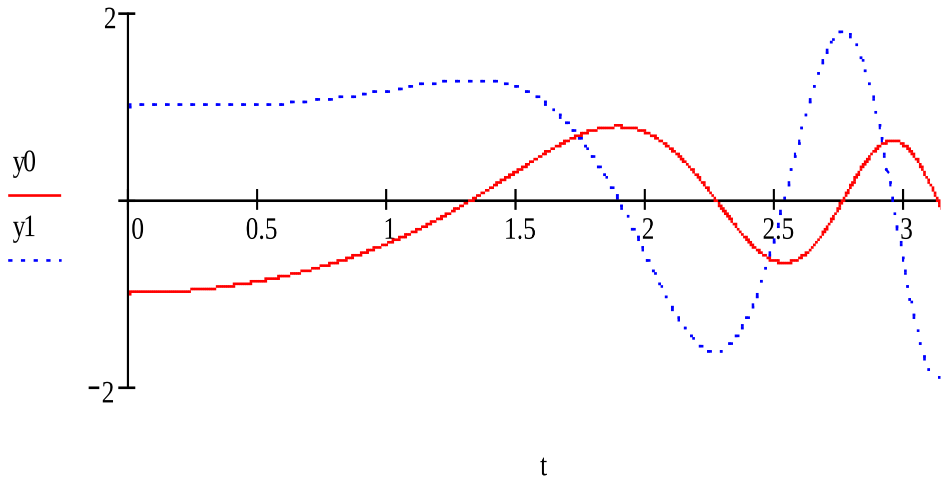

Рисунок 1 *b*.

Теорема 2. 2. Пусть в системе (1.1) $p, r \in C^2[a,b]$,

$$P(t) = \sqrt{-\frac{p(t)}{r(t)}},$$

1. $p'(t) \le 0,\ r'(t) \ge 0,$ $\quad (p'(t) \ge 0,\ r'(t) \le 0),$
2. $P'(t) \ge 0$ $\quad (P'(t) \le 0),$
3. $(\ln P(t))'' \ge 0$.

Тогда, если уравнения

$$\int_a^t \sqrt{-p(\tau)r(\tau)}d\tau = \pi k,\ k \in Z \tag{2.5a}$$

и

$$\int_a^t \sqrt{-p(\tau)r(\tau)}d\tau = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z \tag{2.5b}$$

имеют корни на отрезке $[a,b]$, причем $n_1 = n_2 + 1$, где n_1 — число корней уравнения (2.5 *a*), а n_2 – уравнения (2.5 *b*), то число нулей первой (второй) компоненты всякого нетривиального решения системы (1.1) на $[a,b]$ совпадет с числом корней уравнения (2.5 *a*) ((2.5 *b*)) или будет отличаться на единицу.

Доказательство. Примем $p_1(t) = \sqrt{-p(t)r(t)},\ r_1(t) = -p_2(t),\ p_2(t) = p(t),\ r_2(t) = r(t)$. Заметим, что $p_i(t) > 0,\ r_i(t) < 0,\ (i = 1,2)$. Непосредственными вычислениями можно убедиться в том, что имеют место все условия теоремы 2.1, согласно которой *число нулей компонент решений системы* (1.1) *совпадет с числом нулей соответствующих компонент решений системы*

$$\begin{cases} z_1' = \sqrt{-p(t)r(t)}z_2, \\ z_2' = -\sqrt{-p(t)r(t)}z_1, \end{cases}$$

или будет отличаться на единицу. Нетрудно найти, что частным решением этой системы будет

$$z_1(t) = \sin\left(\int_a^t \sqrt{-p(\tau)r(\tau)}d\tau\right),\ z_2(t) = \cos\left(\int_a^t \sqrt{-p(\tau)r(\tau)}d\tau\right).$$

Тогда число нулей компоненты $y_1(t)$ $(y_2(t))$ решения системы (1.1), согласно теореме 2.1, будет равно или числу корней уравнения (2.5 *a*) ((2.5 *b*)) или отличаться на единицу, что и требовалось доказать.

Рассмотрим применение теоремы 2.2 на конкретном примере. Предположим, что требуется оценить количество нулей компонент решения системы

$$\begin{cases} y_1' = t(t+1)y_2, \\ y_2' = -\dfrac{t}{t+1}y_1. \end{cases}$$

на отрезке $[2\pi, 3\pi]$. Непосредственными вычислениями нетрудно убедиться в том, что имеют место условия 1–4 теоремы 2.2. Уравнения (2.5 *a*) и (2.5 *b*) соответственно примут вид

$$\int_{2\pi}^t \tau d\tau = \frac{t^2 - 4\pi^2}{2} = \pi k,\ k \in Z,$$

и

$$\frac{t^2 - 4\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$$

Учитывая принадлежность корней отрезку $[2\pi, 3\pi]$, будем иметь

$$2\pi \le t = \sqrt{2\pi k + 4\pi^2} \le 3\pi,\ \ k \in Z.$$

и

$$2\pi \le t = \sqrt{\pi + 2\pi n + 4\pi^2} \le 3\pi,\ \ n \in Z.$$

Для определения числа корней n_1 получим неравенство

$$0 \le k \le \frac{5\pi}{2} \approx 7.85,\ k \in Z,$$

а для n_2

$$-\frac{1}{2} \le n \le \frac{5\pi - 1}{2} \approx 7.35,\ k \in Z,$$

откуда найдем

$$n_1 = n_2 = 8.$$

Согласно замечанию 2, возможны случаи:

1. $m_1 = m_2 = 8$,
2. $m_1 = 8,\ m_2 = 7,\ (m_1 = 7,\ m_2 = 8)$,
3. $m_1 = 8,\ m_2 = 9,\ (m_1 = 9,\ m_2 = 8)$.

4. $m_1 = 7,\ m_2 = 7.$
5. $m_1 = 9,\ m_2 = 9.$
6. $m_1 = 7,\ m_2 = 6.$

Из теоремы 2.2 вытекает

Следствие 1. Если система (1.1) удовлетворяет условиям теоремы 2.2, и уравнения (2.5 a) и (2.5 b) имеют на отрезке $[a, b]$ более одного корня, то компоненты всякого нетривиального решения системы (1.1) имеют нули на этом же отрезке.

Действительно, из условия следствия следует, что $n_1 \geq 2,\ n_2 \geq 2$. Тогда, согласно теореме 2.2, будем иметь $m_1 \geq 1,\ m_2 \geq 1$.

Рассмотрим применение следствия 1 на следующем примере. Требуется выяснить — имеют ли компоненты системы

$$\begin{cases} z_1' = \sqrt{t} \cdot z_2, \\ z_2' = -t\sqrt{t} \cdot z_1, \end{cases} \tag{2.6}$$

нули на отрезке $[\pi, 3\pi/2]$. В данном случае $P(t) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{t}}{t\sqrt{t}}} = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Нетрудно проверить, что имеют место условия 1–4 теоремы 2.2. При этом уравнения (2.5 a) и (2.5 b) примут вид

$$t^2 = \pi^2 + 2\pi k,\ k \in Z,$$

и

$$t^2 = \pi + \pi^2 + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Учитывая, что $t \in [\pi, 3\pi/2]$, нетрудно найти, что

$$0 \leq k \leq \frac{5\pi}{8} \approx 1.96 \quad и \quad 0 \leq n \leq \frac{5\pi}{8} - \frac{1}{2} \approx 1.46,$$

откуда число корней соответствующих уравнений (2.5 a) и (2.5 b) будут равны

$$n_1 = n_2 = 2.$$

Согласно следствию 1, компоненты всякого нетривиального решения системы (1.1) будут иметь нули на этом же отрезке. Ниже, на Рисунке 2, приводится график частного решения системы (2.6) на отрезке $[\pi, 3\pi/2]$ при начальном условии $y_1(0) = -1,\ y_2(0) = 1$ (на рисунке $y0$ соответствует компоненте y_1, а $y1$ соответствует компоненте y_2), построенная в среде Mathcad. В данном случае $m_1 = m_2 = n_1 = n_2 = 2$.

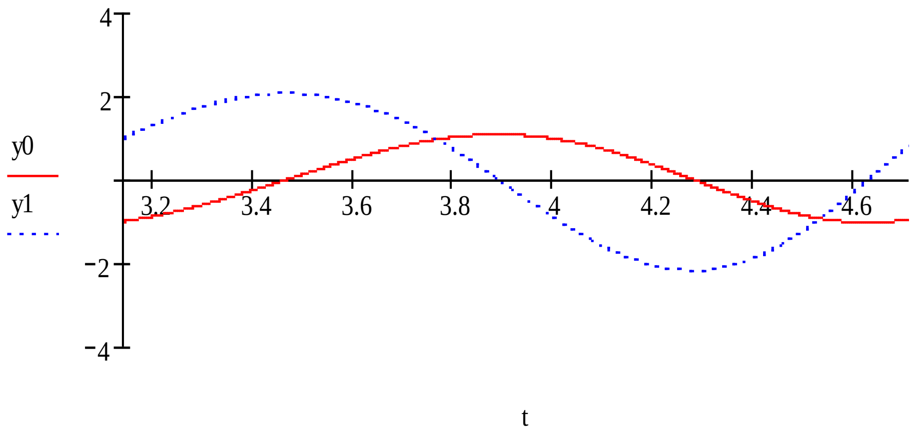

Рисунок 2.

Следствие 2. Пусть система (1.1) удовлетворяет условиям теоремы 2.2, и

$$M=\int_a^b q(\tau)d\tau \ge \frac{3\pi}{2}, \qquad (2.7)$$

где $q(t)=\sqrt{-p(t)r(t)}$. Тогда, компоненты всякого нетривиального решения системы (1.1) имеют нули на отрезке $[a,b]$.

Доказательство. Имеют место условия теоремы 2.2, согласно которой число нулей первой (второй) компоненты нетривиального решения системы (1.1) совпадет с числом корней уравнения (2.5 *a*) ((2.5 *b*)) или будет отличаться на единицу. Поскольку $q(t)=\sqrt{-p(t)r(t)}>0,$ то множество значений $k\in Z$, удовлетворяющих уравнению (2.5 *a*) определится из неравенства

$$0\le \kappa \le \frac{M}{\pi},$$

а множество значений $n\in Z$, удовлетворяющих уравнению (2.5 *b*), из неравенства

$$0\le n\le \frac{M}{\pi}-\frac{1}{2}.$$

Отсюда найдем, что число корней уравнения (2.5 *a*) будет равно

$$n_1=\left[\frac{M}{\pi}\right]+1, \qquad (2.8a)$$

а число корней уравнения (2.5 *b*)

$$n_2=\left[\frac{M}{\pi}-\frac{1}{2}\right]+1. \qquad (2.8b)$$

При $M\ge\frac{3\pi}{2}$ будем иметь $n_1\ge 2,\ n_2\ge 2$. Согласно теореме 2.2 в этом случае мы получим, что $m_1\ge 1,\ m_2\ge 1$, откуда и будет следовать утверждение следствия.

Замечание. Учитывая соотношения (2.8 *a*) и (2.8 *b*), нетрудно показать, что равенство $n_1=n_2+1$ будет иметь место при выполнении условия

$$\frac{M}{\pi}<\left[\frac{M}{\pi}\right]+0{,}5. \qquad (2.9)$$

Учитывая вышеизложенное, получим, что имеют место

Теорема 2.3. Пусть имеют место условия (1)–(4) теоремы 2.2, а также (2.7) и (2.9). Тогда число нулей первой (второй) компоненты всякого нетривиального решения системы (1.1) на $[a,b]$ совпадет с числом корней уравнения (2.5 a) ((2.5 b)) или будет отличаться на единицу.

Теорема 2.4. Пусть имеют место условия теоремы 2.2. Тогда,

1. *если имеют место условия* (2.7) *и* (2.9), *то система* (1.1) *на отрезке* $[a,b]$ *осциллирует,*
2. *если* $M<\frac{\pi}{2}$, *то система* (1.1) *на отрезке* $[a,b]$ *не осциллирует.*

Рассмотрим на примере применение теоремы 2.4. Требуется определить — осциллирует ли система

$$\begin{cases} y_1' = t^{-n}\cdot y_2, \\ y_2' = \sin^m t\cdot y_1, \end{cases} \qquad (2.10)$$

где $m=2k+1,\ \kappa,n\in Z_+$ на отрезках $\left[\pi+2\pi k+\varepsilon;\ \frac{3}{2}\pi+2\pi k\right]$, $k\in Z_+$, где ε — произвольное, достаточно малое положительное число. Покажем сначала, что имеют место условия теоремы 2.4. Имеем

1) $p,r\in C^2\left[\pi+2\pi k+\varepsilon;\ \frac{3}{2}\pi+2\pi k\right],\ k\in Z_+,\ p(t)>0,\ r(t)<0,$

2) $p'(t)=-nt^{-n-1}<0,\ -r'(t)=-m\sin^{m-1}t\cos t<0,$

3) $\left(-\frac{p(t)}{r(t)}\right)'=-\left(t^{-n}\sin^{-m}t\right)'=t^{-n-1}\sin^{-m-1}t(n\sin t+tm\cos t)\le 0$, а значит и $P'(t)\le 0$,

4) $\left(\ln P(t)\right)''=\left(\ln\left(-t^{-n}\sin^{-m}t\right)\right)''=\left(-n\ln t-m\ln(-\sin t)\right)''=\frac{n}{t^2}+\frac{m}{\sin^2 t}>0$.

Далее, при $k,n\in Z_+$ будем иметь

$$M=\int_{\pi+2\pi k+\varepsilon}^{\frac{3}{2}\pi+2\pi k}\sqrt{\frac{-\sin^m t}{t^n}}dt<\int_{\pi+2\pi k+\varepsilon}^{\frac{3}{2}\pi+2\pi k}\sqrt{\frac{1}{t^n}}dt<\int_{\pi+2\pi kk+\varepsilon}^{\frac{3}{2}\pi+2\pi k}t^{\frac{-n}{2}}dt<\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)^{-\frac{n}{2}}\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)<\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)<\frac{\pi}{2}.$$

Согласно утверждению теоремы 2.4, система (2.10) на указанных отрезках не будет осциллировать.

Список литературы:

1. Схаляхо Ч. А. О нулях решений одной двумерной дифференциальной системы на конечном промежутке // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24. №6. С. 1080–1083.
2. Chantladze T., Kandelaki N., Lomtatidze A. Oscillation and nonoscillation criteria for second order linear differential equation // Georgian Math. J. 1999. V. 6. №5. P. 401–414.
3. Chuaqui M., Duren P., Osgood B., Stowe D. Oscillation of solutions of linear differential equations // Bull. Anst. Math. Soc. 2009. №79. P. 161–169.

4. Lomtatidze A., Partsvania N. Oscillation and nonoscillation criteria two–dimentional systems of first linear ordinary differential equations // Georgian Math. J. 1999. V. 6. №3, P. 285–298.
5. Polak L. Oscillation and nonoscillation criteria for two–dimentional systems of linear ordinary differential equations // Georgian Math. J. 2004. V. 11. №1. P. 137–154.
6. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. Москва: Едиториал, УРСС, 2007.
7. Саакян Г. Г. О некоторых свойствах решений канонической системы Дирака // Ученые записки ЕрГУ. 2007. №2. С. 3–11.

References:

1. Skhaliakho, Ch. A. (1988). O nuljakh odnoj differentsialnoj sistemy na konechnom promegutke. *Differentsialnye uravneniya*, 24 (6), 1080–1083.
2. Chantladze, T., Kandelaki, N., & Lomtatidze, A. (1999). Oscillation and nonoscillation criteria for second order linear differential equation. *Georgian Math. J.*, 6 (5), 401–414.
3. Chuaqui, M., Duren, P., Osgood, B., & Stowe, D. (2009). Oscillation of solutions of linear differential equations. *Bull. Anst. Math. Soc.*, (79), 161–169.
4. Lomtatidze, A., & Partsvania, N. (1999). Oscillation and nonoscillation criteria two–dimentional systems of first linear ordinary differential equations. Georgian Math. J., 6 (3), 285–298.
5. Polak, L. (2004). Oscillation and nonoscillation criteria for two–dimentional systems of linear ordinary differential equations. *Georgian Math. J.*, 11 (1), 137–154.
6. Trikomi, F. (2007). Differentsialnye uravneniya. Moscow, Editorial URSS.
7. Sahakyan, G. G. (2007). O nekotorykh svojstvakh reshenij kanonicheskoj sistemy Diraka. *Uchenye Zapiski ESU*, (2), 3–11.

Работа поступила в редакцию 17.02.2017 г.

Принята к публикации 21.03.2017 г.

Ссылка для цитирования:

Саакян Г. Г. О некоторых теоремах сравнения для двумерных линейных систем дифференциальных уравнений и их приложениях // Бюллетень науки и практики. Электрон. журн. 2017. №3 (16). С. 14–27. Режим доступа: http://www.bulletennauki.com/sahakyan (дата обращения 15.03.2017).

Cite as (APA):

Sahakyan, G. (2017). About some comparison theorems for two–dimentional linear systems of differential equations and their applications. *Bulletin of Science and Practice*, (3), 14–27. Available at: http://www.bulletennauki.com/sahakyan, accessed 15.03.2017. (In Russian).