Бюллетень науки и практики — Bulletin of Science and Practice
научный журнал (scientific journal) *№3 2017 г.*
http://www.bulletennauki.com

УДК 51(075.8)

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ГЛАДКО ВЫПУКЛЫХ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ И СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНОСТИ

THE LIMITING VALUES OF SMOOTHLY–CONVEX MONOTONIC FUNCTIONS AND PROPERTIES OF INFINITY

©Панёв А. С.
Томский государственный университет
г. Томск, Россия, allan_mor@mail.ru
©Panev A.
Tomsk state university
Tomsk, Russia, allan_mor@mail.ru
©Сухотин А. М.
канд. физ.–мат. наук
Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Томск, Россия, asukhotin@yandex.ru
©Sukhotin A.
Ph.D., National research Tomsk polytechnic university
Tomsk, Russia, asukhotin@yandex.ru

Аннотация. Введение содержит краткое методологическое соглашение о символах и о терминах, о понятиях и о математических текстах. Прежде всего, мы установили границу между конечными и бесконечными подмножествами линейно упорядоченного множества. По определению каждое подмножество конечного множества (кроме тривиальных) имеет два граничных элемента, бесконечным называется множество, если хотя бы одно его подмножество имеет менее двух крайних элементов. Далее мы рассматриваем гладко выпуклые монотонные функции. В частности, гладко выпуклые монотонные функции имеют не отрицательную первую производную и они не ограничены. В заключении отмечено, что класс биекций состоит из кусочно линейных функций с единичным угловым коэффициентом.

Abstract. An introduction contains the short methodological agreement on symbols and on terms, on concepts and on mathematical texts. Then we have find the border between a finite and an infinite subset of the linearly ordered set. By definition each subset of the final set (except trivial) has two boundary points. The set is called as an infinite set if there [{exits}] its subset, which has less two boundary points. Further we have established some facts of the theory of smoothly convex monotonous functions. In particular, smoothly convex monotonous functions have the nonnegative first derivative and they are not limited. In item 3 we formulate the alternative extension of the real numbers set. In the conclusion we note that the class of bijections on the real numbers set consists of sectionally linear functions with single slope.

Ключевые слова: конечное и бесконечное множества, гладко выпуклые монотонные функции, бесконечно большие числа, расширения множества действительных чисел.

Keywords: a finite and an infinite sets, a smoothly convex monotonous functions, infinite large numbers, the extension of the real numbers set.

Введение — краткое соглашение о символах и о терминах, о понятиях и о математических текстах

Всякая математическая теория или некоторая ее часть, называемая нами математической дисциплиной, является письменной дисциплиной. При записи текстов дисциплины используются два *алфавита* и, соответственно, две *грамматики*, то есть правил записей текстов. Каждая пара (алфавит, грамматика) образуют *язык*, первый язык мы называем *математическим*, второй — *метаязыком*. Мы будем *элементы алфавита* называть *знаками*, *буквами*, *символами* и т. д. Первый алфавит в каждом из названных выше языков состоял из двух букв: *штрих* (черта) и *пробел*. Буква *штрих* сохранилась до сих пор в виде римской цифры один. А символ *пробел* десятки тысяч лет (или более) существовал «по умолчанию» пустым местом в тексте и только на рубеже XIX и XX веков этот символ получил свой знак. Мы будем использовать известные математические символы, термины и понятия, кроме некоторых, не стоящих внимания. Наше отношение к математическим текстам будет таким же.

1.1. Каждое множество определяется своими элементами (даже и при аксиоматизации теории), а элементы определяются своими свойствами, но мы не пойдём дальше … к алфавиту из двух букв. Как и в каждом Алфавите в любом множестве нет равных элементов, по умолчанию. Нестрогие неравенства $\leq$, $\geq$ и нестрогие включения $\subseteq, \supseteq$ содержат, по крайней мере, с одной стороны *переменные элементы.* Переменная есть по определению упорядоченная [{пара (t, A)}], где t – символ переменной и A некоторое множество, элементы которого можно ставить (вставлять) в некоторый математический текст, содержащий букву t.

Вопрос к Читателю: $(t \in A)$ или $(t \notin A)$?

Начальные буквы алфавитов используются, по умолчанию, для обозначения *постоянных*, или *параметров,* или *констант*, или *начальных данных* и так далее. Подробности можно найти в [1:1.3–1.5, 3.7.7].

1.2. Здесь мы введем понятие *функция* аксиоматически [1: 3.6.1–3.6.4, 3.7.4]: Для любой пары множеств (A, B) существует пара $(F,\ G)$ множеств всех функций, заданных на A и B, соответственно, таких, что

$$\forall f \in F \exists \left(A \xrightarrow{f} B\right): D(f) \subseteq A \& E(f) \subseteq B, \qquad (1.1)$$

$$\forall g \in G \exists \left(B \xrightarrow{g} A\right): D(g) \subseteq B \& E(g) \subseteq A. \qquad (1.2)$$

В традиционной математике уже почти двести лет используется некорректное понятие «*взаимно однозначная функция*», при котором правые части равенств (1.1) и (1.2) считаются выполненными «по умолчанию», что приводить к ложным выводам, как например, в [2: I, II, 2] эквивалентность $[0,1] \triangleq E \sim E \times E$ доказана в такой методологии, когда $f(n) \triangleq n/2 \triangleq k,\ n \in \{m|\ m \triangleq 2p,\ p \in J \subset N\}$. Следовательно, $D(f) = \{m|\ m \triangleq 2p, p \in J \subset N\}$ и $E(f) = \{k\} = \{p\} = J \subset N$. Однако авторы предполагали , конечно, не «по умолчанию» а, возможно «по не ведению», что $D(f) = E(f) = N$. Впрочем, такими ошибками переполнены все учебники почти без исключения.

1.3. При создании теории разрывных функций Р. Бэр использовал [3] минимум необходимых структур на множестве *R*, а именно, *ряды непрерывных функций*. Мы найдем границу между понятиями *конечное* и *бесконечное* с помощью такой же методологии [4: 3.5], используя понятие *линейный порядок*. Теперь мы вводим *структуру линейного порядка* ρ на множестве M так, что для каждого двухэлементного подмножества $\{a, b\} \in M$ будет либо $(a, b) \in \rho$, либо $(b, a) \in \rho$. Мы будем писать $a(\prec \rho)b$ вместо $(a, b) \in \rho$ или еще короче так: $a \prec b$, если речь идет об одном порядке, и будем говорить, что a меньше b или b больше a относительно порядка ρ. Каждая пара (a, b), где $a \prec b$, определяет в M подмножество $O\ (a, b)$ таких x, что $a \prec x$ и $x \prec b$. Множество $O\ (a, b)$ называется (a, b) — *окрестностью* каждой его точки x или (a, b) — *интервалом*. Для подмножества $A \triangleq [a,b] \triangleq \{a, b\} \cup O(a, b)$ элементы, a и b мы назовем *крайними*: a — *наименьшим*, b — *наибольшим* в A и будем писать, что $a \triangleq \inf A, b \triangleq \sup A$. Множество M называется *вполне упорядоченным*, если каждое его непустое подмножество имеет наименьший элемент. Подмножество $D \subset M$ мы назовем *дискретным*, если для каждого элемента d из D, кроме крайних в D, найдётся пара $(a, b) \in M \times M$ такая, что $O(a, b) = \{d\}$.

Определение 1.1. Мы называем линейно упорядоченное множество Fin конечным, если оно или пусто, или одноэлементно, или каждое его подмножество кроме тривиальных имеет два крайних элемента: наименьший и наибольший. Мы называем линейно упорядоченное множество Inf бесконечным, если хотя бы одно его подмножество имеет менее двух крайних элементов.

Определение 1.1 подчеркивает приоритетность *атрибута порядка* относительно *атрибута конечное–бесконечное.* При сравнении скорости роста функций, как правило, исследовались обратимые функции, скорости роста которых обратно пропорциональны и растут обратные к рассматриваемым в задачах роста функции медленнее многих (почти всех) линейных. Этим свойством выпуклых функций мы воспользуемся ниже.

2. Гладко выпуклые монотонные функции

Далее мы будем рассматривать множество

$$\boldsymbol{In}(f, A, B) \triangleq \{f \mid \left(A \xrightarrow{f} B\right) : D(f) \subseteq A \subseteq \boldsymbol{R}, E(f) \subseteq B \subseteq \boldsymbol{R}\}$$

инъективных функций f, где для переменной q $f(a) = f(q) \Rightarrow q = a$ (инъективность функции *f*). Каждая функция $f \in \boldsymbol{In}(f, A, B)$ является *обратимой*, то есть

$$\forall f \in \boldsymbol{In}(f, A, B)\ (\exists g \in \boldsymbol{In}(g, B, A)) : g\big(f(A)\big) = A \text{ и } f\big(g(B)\big) = B. \qquad (2.1)$$

Функции f и g в (2. 1 являются либо обе непрерывными, либо обе разрывными.

Пусть каждая функция $f \in \boldsymbol{In}(f, A, B)$ будет также монотонной и гладко выпуклой ($f \in C^2$ и $\forall a \in A\ f''(a) \leq 0$). Без доказательства мы запишем, что 1) функция $f'(t)$ убывает на множестве A и $\forall a \in A\ f'(a) \geq 0$ и 2) каждая функция $f \in \boldsymbol{In}(f, A, B)$ является, в силу условия 1), неограниченной конечным числом при $x \to \infty$. Например,

$$f_1(x) \triangleq ln(x), f_2(x) \triangleq \sqrt{x},\ f_3(x) \triangleq kx + b,\ 0 \leq k \leq 1. \qquad (2.2)$$

2.1. Мы выделим два подмножества введённого множества $\boldsymbol{In}(f, A, B)$:

1) $\boldsymbol{In_0}(f)$, когда $lim_{t\to\infty} f'(t) = +0$,

2) $\boldsymbol{In_k}(f)$, когда $lim_{t\to\infty} f'(t) = k$, $0<k \leq 1$.

Во второй класс попадут кроме линейных функций $f_3\,(x, k, b) \triangleq kx + b,\ 0 \leq k \leq 1$, из (2.2) гладко выпуклые монотонные разрывные функции $f_*(x), (f_*)'(x^\circ) = k$, совпадающие в точках разрыва $x = x^\circ$с соответствующим значением соответствующей функции $f_3(x^\circ, k, b)$. Исследование таких функций мы отложим до другого раза.

3. Расширения множества действительных чисел

3.1. Добавление множества $\{-\infty, +\infty\}$ ко множеству R действительных чисел превращает R во множество $\bar{R} \triangleq \{R \cup \{-\infty, +\infty\}\}$, называемое в анализе расширенным множеством действительных чисел. Мы пишем, для краткости, $\bar{R} \triangleq R \cup \{\pm\infty\}$. При этом символ бесконечность ∞ имеет *по определению* необычные алгебраические свойства:

$$a + \infty = \infty,\ a \cdot \infty = \infty,\ \infty + \infty = \infty,\ \ \infty \cdot \infty = \infty, \infty^\infty = \infty. \qquad (3.\,1)$$

Равенства (3.1) и подобные им свойства упрощают решения многих задач анализа. Но такой большой *объем понятия бесконечность* лишает это понятие всякой определенности и структуры, мешает его изучению и увеличивает риск появления ошибок при доказательствах *утверждений с бесконечностью*. Мы покажем ниже, в конце п. 3, например, что последнее из равенств $\infty = \sum(n)^n = \sum(n) = \ \sum(1)^n\ = \sum(n)^{-1}$ не совсем корректно, хотя преподающие анализ относят это равенство к «*математическому фольклору*» уже седьмой век.

3.2. Теперь мы излагаем *Альтернативное расширение* множества действительных чисел, начиная с определения *бесконечно больших чисел*.

Определение 3.1. Мы называем предельное значение функции $f \in In_0(f)$ при $x \to \infty$, бесконечно большим числом (*ББЧ*), и обозначаем его символом $\Omega(f)$. Для линейных функций мы вводим, соответственно, $\lim_{x\to\infty} f_3(x, k, b) \triangleq \lim\limits_{x\to\infty}(kx + b) \triangleq \omega_k$. И для k=1 мы принимаем привычное $\omega_{k|k=1} = \omega_1 \triangleq \omega$.

С логической точки зрения теперь оправдано отождествление двух символов бесконечности ω и ∞ или, более общее, $\omega_k \equiv \infty_k$, оставляя при этом за символами $\omega_1 \triangleq \omega$ и $\infty_1 \equiv \infty$ максимальное значение, вкладываемое традиционно в понятие и в символ бесконечности ∞. Если мы обозначим мощность множества натуральных чисел символом $\omega_1 \equiv \infty_1 \triangleq \&_0$, тогда равные мощности множеств четных и нечетных будут обозначены соответственно, например, символом $\omega_{0,5}$. Отметим здесь еще, что, например, линейная функции $f(x) \triangleq hx, 1 < h,$ будет определена при $x < \omega_{1/h}$. Как показывают наши исследования, в самом анализе и в его приложениях нет необходимости рассматривать переменные со значениями большими (по модулю) предельных значений линейных функций $f(x) \triangleq kx,\ k = 1.$ Или, если говорить кратко, расширенное множество действительных чисел не расширяемо.

3.3. О последовательностях Коши**.** Если есть *ББЧ*, то должны быть и числовые последовательности, сходящиеся к этим *ББЧ*. Действительно, в начале XXI века мы нашли характеристическое, то есть необходимое и достаточное условие, определяющее множество всех последовательностей Коши [4: 7.1, 7.2]. Это условие имеет краткую, тем не менее, корректную формулировку:

$$lim_{n\to\infty}\{a_{n+1}-a_n\}=0. \qquad (3.2)$$

В энциклопедии [5] введено более пространное, но и менее корректное равенство

$$lim_{min(n,\ m)\to\infty}\{a_m-a_n\}=0. \qquad (3.3)$$

Две традиционные формы записи соответствующего Условия последовательностей Коши $\lim_{p\in N,n\to\infty}\left(a_{n+p}-a_n\right)=0$, $\lim_{m,n\to\infty}(a_m-a_n)=0$ еще менее корректны, чем равенство (3.3), и исключают *ББЧ* из *множества сходимости* последовательностей Коши.

Следующая теорема устанавливает связь между последовательностями Коши и числовыми функциями $f(x)$:

Теорема 3.1. Неограниченная функция f(x) сходится к соответствующему *ББЧ*, тогда и только тогда, когда $f'(\infty)=0$.

В частности, к *ББЧ* сходятся две первые функции из (2.2):

$$f_1(\infty)=ln(\infty)\triangleq\Omega(ln),\ f_2(\infty)=\sqrt{\infty}\triangleq\Omega\left(\sqrt{\infty}\right).$$

Так как $\sum_{k=1}^{n}k^{-1}=\ln(n)+C_e+\gamma_n$, где константа Эйлера C_e=0,59… и limγ_n=0, то гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(k)^{-1}$, как и функция $f_1(x)=\ln(x)$, сходится к $\Omega(\Gamma)\triangleq\Omega(\ln)+C_e$.

4. Заключение

Отметим следующие нетрадиционные факты математического анализа:

1. Область определения функции $f(x)\triangleq e^x$– $D(e^x)=\{\boldsymbol{x}|(-\infty,\Omega(\ln)]\}$,
2. Область определения функции $f(x)\triangleq x^2$– $D(x^2)$=$\{\boldsymbol{x}|\ 0\leq|x|\leq\Omega(\sqrt{\infty})\}$,
3. Класс$Bi(f,A,A{:}\,A\subseteq\bar{R})$ биекций *f*(*x*) ограничен кусочно линейными функциями *f*(*x*)≜*kx*+*b* с коэффициентами k, (|k|=1), и с соответствующими свободными членами,
4. Также (|*k*|=1) устроен класс *Bi*(*f*,*A*, *B*: *A*,*B*⊆$\bar{R}$) биекций *f*(*x*, *k*, *b*) {*f*: *A*→ *B*}.

Список литературы:

1. Сухотин А. М. Начало высшей математики. Томск: Изд. ТПУ, 1997. 104 с.
2. Начало математики для магистров: Научные основы высшей математики / Томск. Политехн. ун–т. Томск, 1996. 87 с. Деп. в ВИНИТИ 18.06.96. №2010–В96.
3. Бэр Р. Теория разрывных функций. Л.: ГИТ–ТЛ, 1936. 104 с.
4. Пизо Ш., Заманский М. Курс математики: алгебра и анализ. М.: Наука, 1971. 656 с.
5. Сухотин А. М. Начало высшей математики. 2-е изд. Томск: Изд–воТПУ, 2004. 164 с.
6. Weistein E. W. CRC Concise Encyclopedia of Mathematics. London–New–York: Chapman & Hall / CRC, 2002. 3450 p.

References:

1. Sukhotin, A. M. (1997). Nachalo vysshei matematiki. Tomsk, Izd. TPU, 104. (In Russian).
2. Nachalo matematiki dlya magistrov: Nauchnye osnovy vysshei matematiki. Tomsk. Politekhn. un–t. Tomsk, 1996, 87. Dep. v VINITI 18.06.96. no. 2010–V96. (In Russian).
3. Ber, R. (1936). Teoriya razryvnykh funktsii. Leningrad, GIT-TL, 104. (In Russian).
4. Pizo, Sh., & Zamanskii, M. (1971). Kurs matematiki: algebra i analiz. Moscow, Nauka,1971, 656. (In Russian).
5. Sukhotin, A. M. (2004). Nachalo vysshei matematiki. 2-e izd. Tomsk, Izd–voTPU, 164.

6. Weistein, E. W. (2002). CRC Concise Encyclopedia of Mathematics. London–New–York, Chapman & Hall / CRC, 3450.

Работа поступила в редакцию 20.02.2017 г.

Принята к публикации 25.02.2017г.

Ссылка для цитирования:

Панев А. С., Сухотин А. М. Предельные значения гладко выпуклых монотонных функций и свойства бесконечности // Бюллетень науки и практики. Электрон. журн. 2017. №3 (16). С. 8–13. Режим доступа: http://www.bulletennauki.com/panev-sukhoti (дата обращения 15.03.2017).

Cite as (APA):

Panev, A., & Sukhotin, A. (2017). The limiting values of smoothly–convex monotonic functions and properties of infinity. *Bulletin of Science and Practice*, (3), 8–13. Available at: http://www.bulletennauki.com/panev-sukhoti, accessed 15.03.2017. (In Russian).