

УДК 51-7

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ МОДЕЛЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ЭКОЛОГИИ В СРЕДЕ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ANYLOGIC**

**THE STUDY OF THE SIMPLEST MODELS OF MATHEMATICAL ECOLOGY
IN THE SIMULATION SOFTWARE ANYLOGIC**

©*Осипов Г. С.*

SPIN–код: 7749-0840

*д–р техн. наук, Сахалинский государственный университет
г. Южно–Сахалинск, Россия, _Osipov@rambler.ru*

©*Osipov G.*

SPIN–code: 7749-0840

*Dr. habil., Sakhalin State University
Yuzhno–Sakhalinsk, Russia, _Osipov@rambler.ru*

Аннотация. В работе проведено качественное и количественное исследование моделей взаимодействия популяций, составляющих основу современной математической экологии. Выполнен качественный анализ простейшей модели классической модели «хищник–жертва» Вольтерры–Лотки методом ее приведения к виду, содержащему один управляемый параметр. Обоснована необходимость перехода от мальтузианских моделей к моделям с логистической функцией роста. Показано, что в данной системе имеется стационарная точка. Построена простейшая модель с учетом плотности заселения территории жертвами и функции смертности хищников в зависимости от величины популяции жертв. Предложена модель системы хищник — несколько жертв. Модель адаптирована на учет взаимодействия хищников с несколькими видами жертв с учетом того, что жертвы также оказывают давление друг на друга. Построена функция, которая позволяет задать предел «насыщения» ареала особями, в основу которой положен равновесный уровень популяций как жертв, так и хищников. Проведено исследование неклассической модели «хищник–жертва» с трофической функцией хищника, зависящей от соотношения плотностей популяций хищников и жертв.

Обоснована целесообразность использования в качестве аналитической платформы исследований системы имитационного моделирования *AnyLogic*, позволяющей задействовать все известные концепции моделирования. Проведено комплексное исследование классической модели Вольтерры–Лотки. Построены фазовые портреты системы с учетом изменения параметров системы и начальных условий. Проведен параметрический анализ влияния коэффициентов модели на численность популяций. Представлены результаты моделирования и выполнен анализ моделей с логистической функцией роста численности популяции, модели «хищник — две жертвы», модели, учитывающей влияние доступной площади. Выполнено количественное исследование неклассической модели с учетом влияния параметров, исходных данных и начальных условия на фазовый портрет системы.

Abstract. The work carried out qualitative and quantitative study of the patterns of interaction of populations that form the basis of modern mathematical ecology. A qualitative analysis of the simplest model of the classical model of the “predator–prey” Volterra–Lotka by bringing it to a form that contains a controlled setting. The necessity of transition from Malthusian model to model with the logistic growth function. It is shown that in this system there is a stationary point. It builds a simple model taking into account the population density of the territory of the victims and

predator's mortality functions, depending on the size of the prey population. A model of the predator–multiple victims. The model is adapted on account of the interaction of predators with several kinds of victims, bearing in mind that victims also put pressure on each other. Built function that allows you to set a limit of “saturation” of the range of special, which was based on the equilibrium level of the populations of both victims and predators. A study of non–classical model of the “predator–prey” with trophic predator function, which depends on the ratio of the densities of populations of predators and prey.

The expediency of using as an analytical research platform of simulation system AnyLogic, allowing use all known modeling concepts. A comprehensive study of the classical model of Volterra–Lotka. The phase portraits of the system taking into account the change system parameters and initial conditions. Parametric analysis of the influence coefficient model on populations. The results of the modeling and the analysis of models with logistic growth function of population size, model “predator–victim two” model taking into account the effect of the available space. The quantitative study of the non–classical model, taking into account the influence of the parameters of initial data and initial conditions on the phase portrait of the system.

Ключевые слова: модели математической экологии, системно–динамическое моделирование.

Keywords: models of mathematical ecology, system dynamics simulation.

Математическая экология моделирует экологические процессы, т. е. изменения в природе, которые могут произойти при изменении экологических условий. Становление математической экологии по праву связывают с разработкой модели совместного существования двух биологических видов (популяций) типа «хищник–жертва», называемой также моделью Вольтерры–Лотки [1]. Именно с этих исследований в области экологических проблем и начала формироваться математическая экология.

В настоящее время последователями исследований в области математической экологии предложены математические модели «хищник–жертва», учитывающие взаимодействие популяций на ограниченной территории и влияние антропогенного давления; принципы построения математических моделей для взаимодействующих популяций стали применять в задачах медицины и социально–экономических исследованиях [2].

Интерес к задачам математической экологии перешел на новый более высокий уровень актуальности в 60-е годы XX века, когда стали существенны и «заметны» экологические последствия деятельности человека, связанные с его техногенным воздействием на биосферу.

Классическая модель Вольтерры–Лотки явилась базой для построения и проведения широкого спектра исследований новых «неклассических» моделей, например, выполненных А. В. Нориным и М. И. Лебедевой [3].

Кроме математических моделей и математического моделирования для исследования сложных систем в настоящее время достаточно эффективно применяется имитационное моделирование, позволяющее, по сути, проводить эксперименты по определению как параметров, так и структуры модели исследуемой системы. Имитационные модели обеспечивают возможность проведения параметрического анализа и оптимизации решений по выработке управляющих воздействий с целью уменьшения последствий изменений экосистемы.

Имитационное моделирование основано на трех концепциях:

- дискретно–событийное моделирование;
- агентное моделирование;
- системная динамика.

В настоящем исследовании используется концепция моделирования простейших задач математической экологии, основанная на системной динамике, которая позволяет строить

долгосрочные стратегических модели и имеет высокий уровень абстракции. В принципе для исследований в данной предметной области можно использовать и другие концепции, а также создавать комбинированные модели. В качестве программной среды для проведения исследования выбран пакет имитационного моделирования *AnyLogic* (мат. офф. сайта The AnyLogic Company: <http://www.anylogic.ru/system-dynamics>), позволяющий оперировать моделями во всех существующих концепциях моделирования.

1. Материал и методика

Исследуем простейшие модели, применяемые в математической экологии для оценки влияния внутренних параметров среды обитания и последствий внешних управляющих воздействий на плотность популяции животных.

1.1. Классическая модель «хищник–жертва»

Рассматривается закрытый ареал, в котором обитают «жертвы» x и хищники y .

Вводятся упрощающие допущения:

– жертвы питаются только растительной пищей, доступной в неограниченном количестве;

– хищники питаются только жертвами.

Построим простейшую систему взаимодействия хищников и жертв:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_x x - q_x xy \\ \frac{dy}{dt} = k_y yx - q_y y \end{cases}, \quad (1)$$

где $x = x(t)$, $y = y(t)$ — функции изменения плотностей особей (жертв и хищников, соответственно) во времени t .

k_x , q_y — мальтузианские параметры;

q_x , k_y — коэффициенты межвидового взаимодействия.

Система нелинейных дифференциальных уравнений (1) является классической моделью «жертва–хищник» и применяется для решения целого спектра задач, связанных с конкуренцией. По сути именно с исследования моделей элементарных биологических сообществ (1) начала формироваться математическая экология.

Качественный анализ системы удобно выполнять, приведя ее к виду [2]:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = u - uv = u(1 - v) \\ \frac{dv}{d\tau} = uv - pv = v(u - p) \end{cases}, \quad (2)$$

где

$$u = \frac{k_y}{k_x} x; v = \frac{q_x}{k_x} y; \tau = \frac{t}{k_x},$$

$$p = \frac{q_y}{k_x} \text{ — параметр.}$$

Система уравнений (2) имеет стационарную точку $O(\bar{u} = p; \bar{v} = 1)$, являющуюся «центром» [4].

При малых отклонениях $u = \bar{u} + \tilde{u}$ и $v = \bar{v} + \tilde{v}$ получим:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = \bar{u} + \tilde{u} - (\bar{u} + \tilde{u})(\bar{v} + \tilde{v}) \\ \frac{dv}{d\tau} = (\bar{u} + \tilde{u})(\bar{v} + \tilde{v}) - p(\bar{v} + \tilde{v}) \end{cases}.$$

Откуда

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{u}}{d\tau} = -p\tilde{v} \\ \frac{d\tilde{v}}{d\tau} = \tilde{u} \end{cases}.$$

Значит в окрестности точки $O(\bar{u}, \bar{v})$ происходит колебание плотностей популяций по закону:

$$f(t) = A \sin(\sqrt{p}\tau + \varphi).$$

Очевидно, дифференциальное уравнение для кривой на фазовой плоскости (u, v) определится следующим образом:

$$\frac{du}{dv} = \frac{u(1-v)}{v(u-p)}.$$

В данном случае общий интеграл системы имеет вид:

$$\frac{e^{u+v}}{u^p v} = C.$$

Все фазовые траектории образуют замкнутые циклы [5] (Рисунок 1).

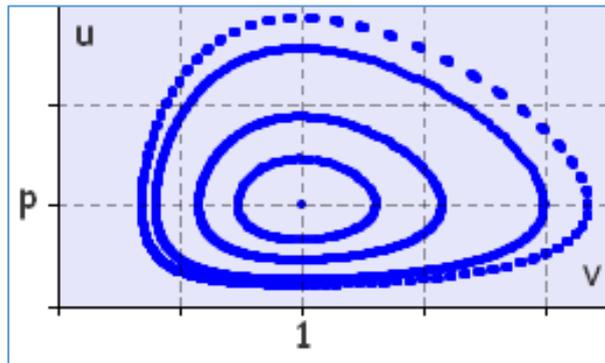


Рисунок 1. Типовой фазовый портрет системы.

Классическая модель «хищник–жертва» (1, 2) при всей ее простоте и недостатках послужила хорошим фундаментом и стимулом для дальнейшего развития теории математической экологии.

1.2. Модель с логистической функцией роста

Очевидно на плотность популяции влияет не только рождаемость и смертность, но и ограниченность пищевых и других ресурсов, тогда с учетом межвидового взаимодействия уравнение, определяющее скорость изменения популяции жертв примет вид:

$$\frac{dx}{dt} = k_x x - p_x x x - q_x x y = k_x x \left(1 - \frac{x}{m} - \frac{y}{l} \right)$$

где p_x — параметр;

$$m = \frac{k_x}{p_x}, \quad l = \frac{k_x}{q_x}$$

Данная модель позволяет перейти от модели неограниченного роста популяции жертв к модели с насыщением, обусловленным ограниченностью ресурсов (пищи) и борьбой за них между жертвами. Параметр p_x можно интерпретировать как коэффициент взаимодействия внутри популяции.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_x x - p_x x x - q_x x y \\ \frac{dy}{dt} = k_y y x - q_y y \end{cases}$$

Очевидно, в данном случае имеется стационарная точка:

$$O \left(\frac{q_y}{k_y}, \frac{k_x k_y - p_x q_y}{q_x k_y} \right)$$

1.3. Модель с учетом плотности заселения территории жертвами

Пусть $D = D(x, S) = \frac{x}{S}$ — плотность заселения территории площадью S жертвами в количестве x и $f(D) = f\left(\frac{x}{S}\right)$ — функция смертности хищников в зависимости от величины популяции жертв, тогда:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_x x - Dy \\ \frac{dy}{dt} = k_y y - f(D) \end{cases},$$

где k_x, k_y — мальтузианские параметры (коэффициенты рождаемости) для роста количества жертв и хищников, соответственно. Очевидно, что в модели (1) коэффициент q_x можно интерпретировать как величину обратную к S , т. е. $q_x = \frac{1}{S}$.

1.4. Модель «хищник — несколько жертв»

Рассмотрим модель взаимодействия хищников с несколькими видами жертв при условии, что жертвы также оказывают давление друг на друга и учитывается «насыщение» ареала как жертвами, так и хищниками.

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = k_i x_i - q_i x_i y - x_i \sum_{j=1}^m a_{ji} x_j - f(x_i, H_i) + R_i; (i = \overline{1, m}); \\ \frac{dy}{dt} = k_y y + y \sum_{j=1}^m p_j g_j x_j - q_y y - F(y, H_y). \end{cases} \quad (3)$$

Здесь введены следующие обозначения для «жертв»:

$x_i (i = \overline{1, m})$ — количество особей i -го вида;

k_i — коэффициенты рождаемости;

q_i — давление хищника;

a_{ji} — коэффициент давления на особи i -го вида со стороны особей j -го вида;

R_i — рефугиум особей i -го вида;

H_i — равновесный уровень видов (максимальная численность, обусловленная емкостью среды);

$f(x_i, H_i)$ — неубывающая функция первого аргумента и невозрастающая второго.

Для хищника:

y — число хищников;

k_y — коэффициент рождаемости;

q_y — коэффициент смертности;

p_j — давление на особи j -го вида;

g_j — коэффициент усиления давление при возрастании количества жертв;

H_y — равновесный уровень;

$F(y, H_y)$ — неубывающая функция первого аргумента и невозрастающая второго.

1.5. Неклассическая модель «хищник–жертва»

Исследуем модель [3] с трофической функцией вида:

$$\frac{cxy}{1+dx} \cdot \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy - k_x x \\ \frac{dy}{dt} = \frac{cxy}{1+dx} - k_y y \end{cases}$$

Так как $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{cxy}{1+dx} = \frac{c}{d} y$ и $\frac{c}{d} > k_y$, то при таком условии будет экспоненциальный рост численности популяции хищника.

Очевидно
$$\bar{x} = \frac{k_y}{c - dk_y}; \bar{y} = \frac{a - k_x}{b}$$

При внесении малых возмущений

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt} = a(\bar{x} + \tilde{x}) - b(\bar{x} + \tilde{x})(\bar{y} + \tilde{y}) - k_x(\bar{x} + \tilde{x}) \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} = \frac{c(\bar{x} + \tilde{x})(\bar{y} + \tilde{y})}{1 + d(\bar{x} + \tilde{x})} - k_y(\bar{y} + \tilde{y}) \end{cases}$$

В работе [3] показано, что система преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}}{dt} = (a - b\bar{y} - k_x)\tilde{x} - b\bar{x}\tilde{y} \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} = \left(\frac{cd\bar{x}}{d(1+d\bar{x})} - k_y \right)\tilde{y} + \frac{c\bar{y}}{(1+d\bar{x})^2} \end{cases}$$

и особой точкой системы является центр.

2. Результаты и их обсуждение

Приведем основные результаты экспериментов по моделированию численности популяций в среде имитационного моделирования *AnyLogic*.

2.1. Классическая модель «хищник–жертва»

На Рисунке 2 представлена системно–динамическая модель в среде *AnyLogic*.

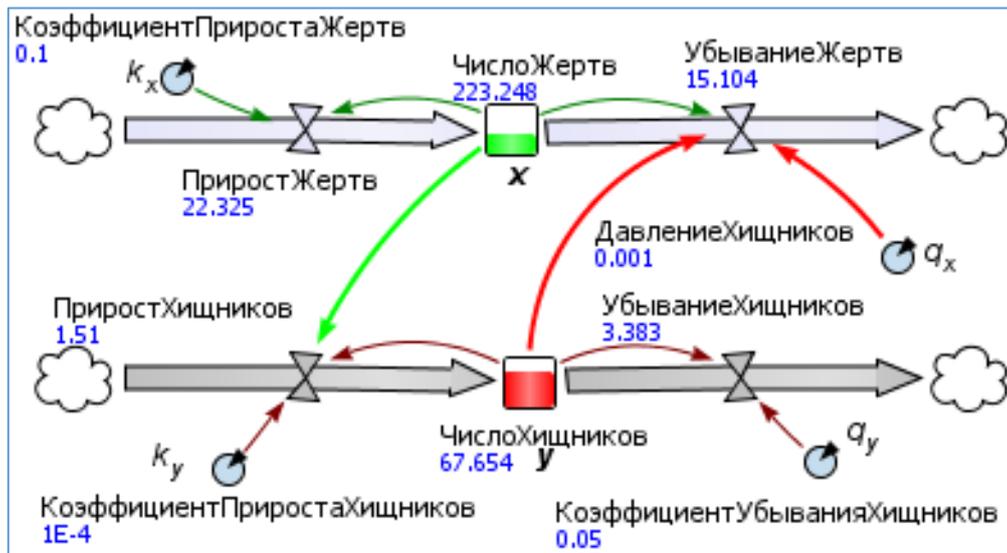


Рисунок 2. Принципиальная схема моделирования.

Оценим основные результаты моделирования при следующих исходных данных, представленных в Таблице 1:

Таблица 1.

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ

k_x	k_y	q_x	q_y	x_0	y_0
0,1	0,0001	0,001	0,05	500	50

Очевидно, в данном случае $\bar{x} = 500$; $\bar{y} = 100$.

На Рисунке 3 представлен фазовый портрет моделируемой системы, а также временной график изменения численности популяций жертв и хищников. Перемещение точек по фазовой траектории происходит против часовой стрелки.

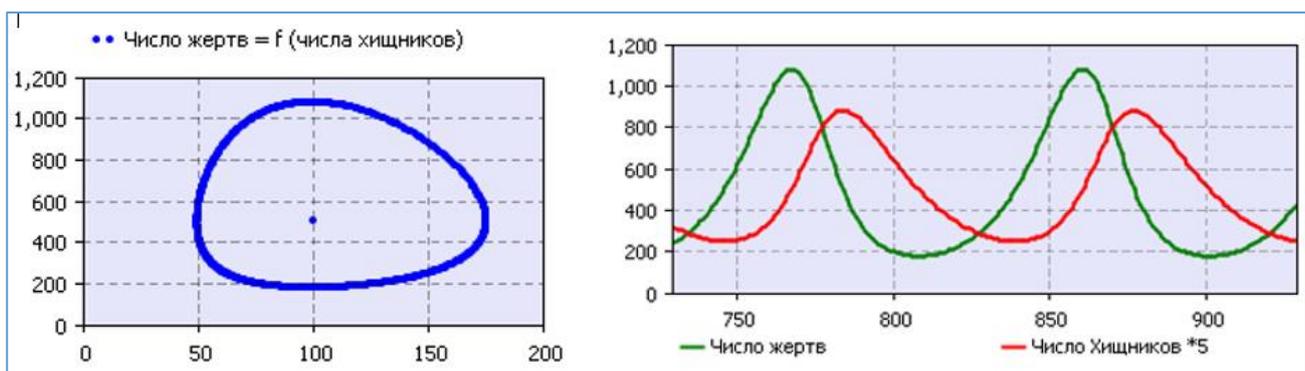


Рисунок 3. Основные результаты моделирования классической системы.

В данном случае доля численности хищников в стационарном режиме, очевидно, будет равна:

$$\frac{\bar{y}}{\bar{x} + \bar{y}} = \frac{1}{6}.$$

Изменение этого показателя во времени представлено на Рисунке 4.

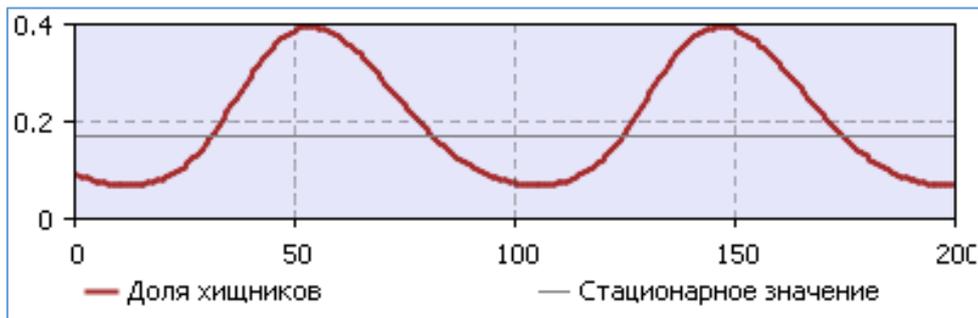


Рисунок 4. Доля хищников в общем числе животных.

Эффект увеличения числа хищников приводит к переходу на внешнюю орбиту на фазовой диаграмме (Рисунок 5).

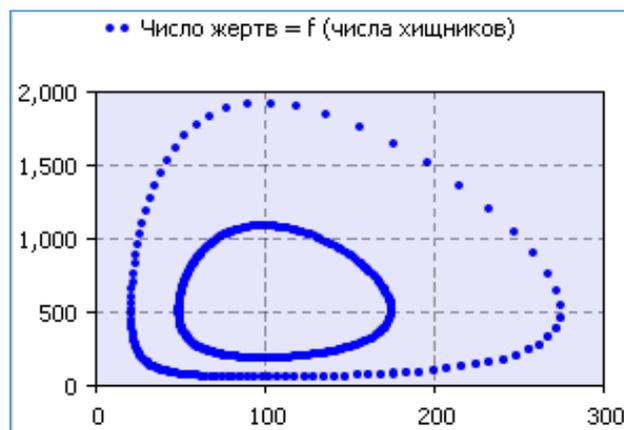


Рисунок 5. Влияние увеличения числа хищников.

На Рисунке 6 видно, что в данной ситуации после увеличения числа особей в популяции хищников система переходит на новый установившийся режим с большим значением плотности особей обоих видов.

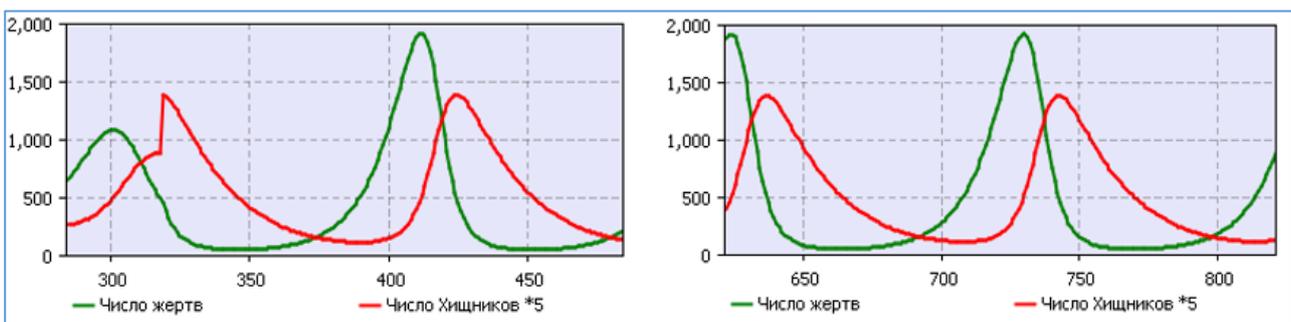


Рисунок 6. Переход на новый режим при увеличении числа хищников.

Возможности среды *AnyLogic* позволяют производить не только имитационные эксперименты, но и осуществлять параметрический анализ и оптимизацию решения по заданной целевой функции. На Рисунке 7 представлен фрагмент итогового отчета о влиянии коэффициента прироста жертв на плотность их популяции $x = x(k_x, t)$.

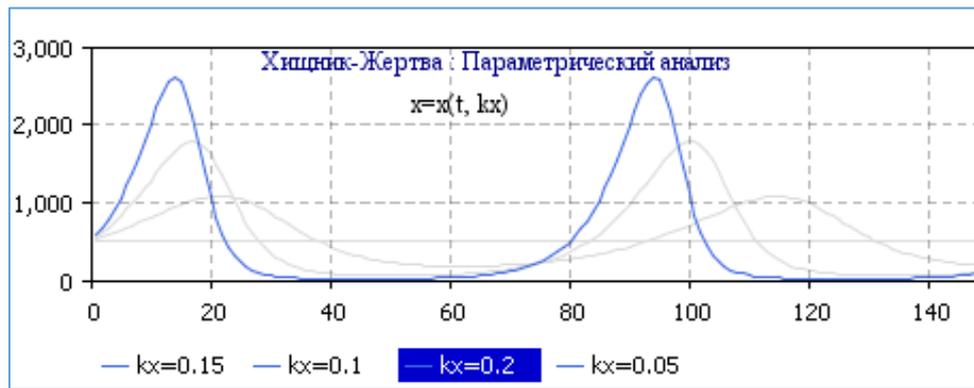


Рисунок 7. Влияние коэффициента прироста на число жертв.

2.2. Модель с логистической функцией роста

Реализуем в AnyLogic модель с логистической функцией роста числа жертв по исходным данным, представленным в Таблице 2.

Таблица 2.

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ

k_x	k_y	q_x	q_y	p_x	x_0	y_0
0,1	0,0001	0,001	0,05	0,001	500	50

В данном случае фазовая кривая (Рисунок 8) имеет вид спирали, закручивающейся по часовой стрелке от исходной точки к стационарной $O(500; 95)$; колебания плотности популяций затухают.

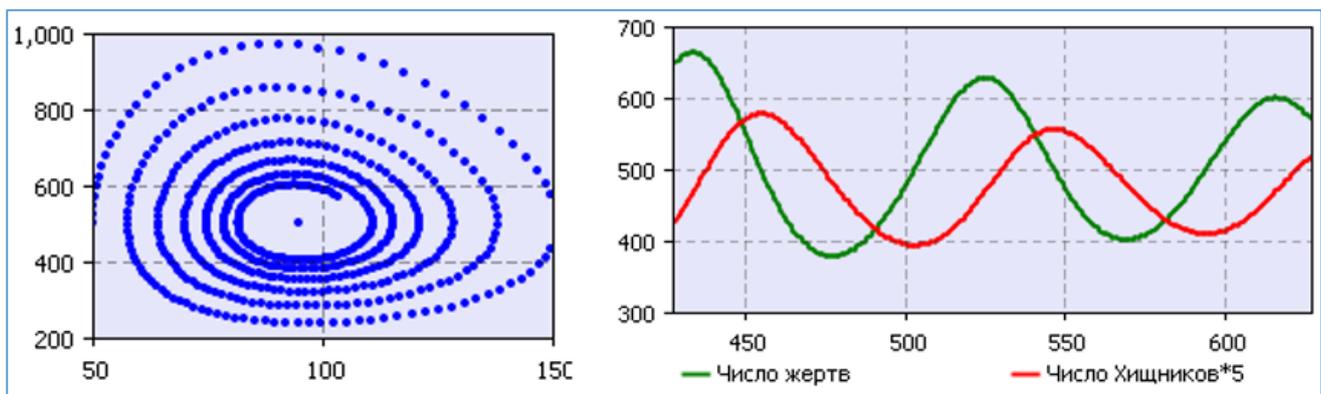


Рисунок 8. Фазовый портрет системы и временной график.

2.3. Модель с учетом плотности заселения территории жертвами

Рассмотрим простейшую реализацию в среде AnyLogic модели с учетом плотности жертв со следующими исходными данными, представленными в Таблице 3.

Таблица 3.

ДАННЫЕ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ МОДЕЛИ

k_x	k_y	S	x_0	y_0
1,25	0,25	10	600	17

Функция смертности хищников в зависимости от плотности жертв задана таблично (Таблица 4).

Таблица 4.

ТАБЛИЧНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ СМЕРТНОСТИ ХИЩНИКОВ

D	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$f(D)$	0,5	0,45	0,4	0,35	0,3	0,25	0,2	0,15	0,1	0,05	0,005

В AnyLogic предусмотрены различные варианты интерполирования, например, с помощью сплайнов, а если аргумент выходит за границы заданного диапазона, то можно использовать экстраполяцию.

На Рисунке 9 представлена принципиальная схема модели.

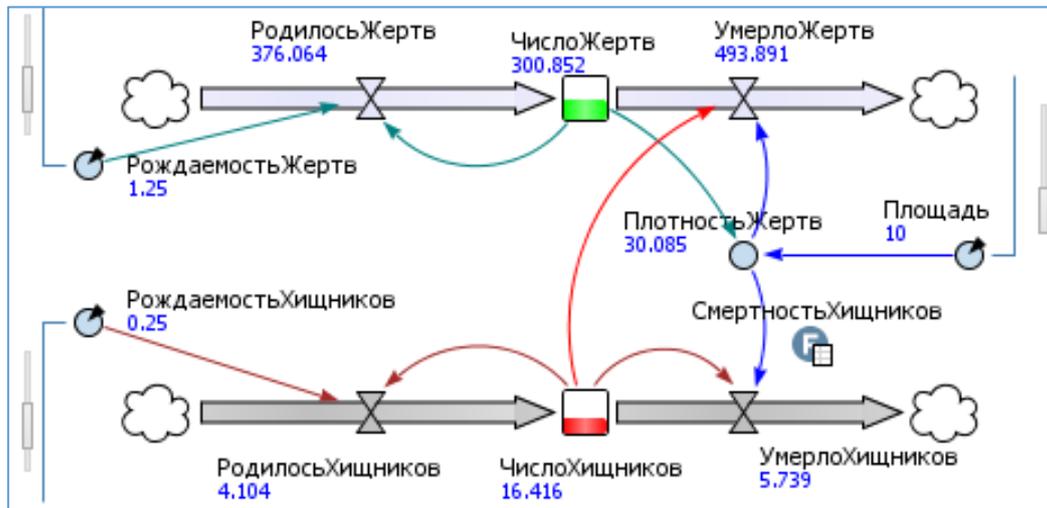


Рисунок 9. Графическое представление имитационной модели.

Временные графики изменения численности популяций и фазовый портрет системы изображены на Рисунке 10.

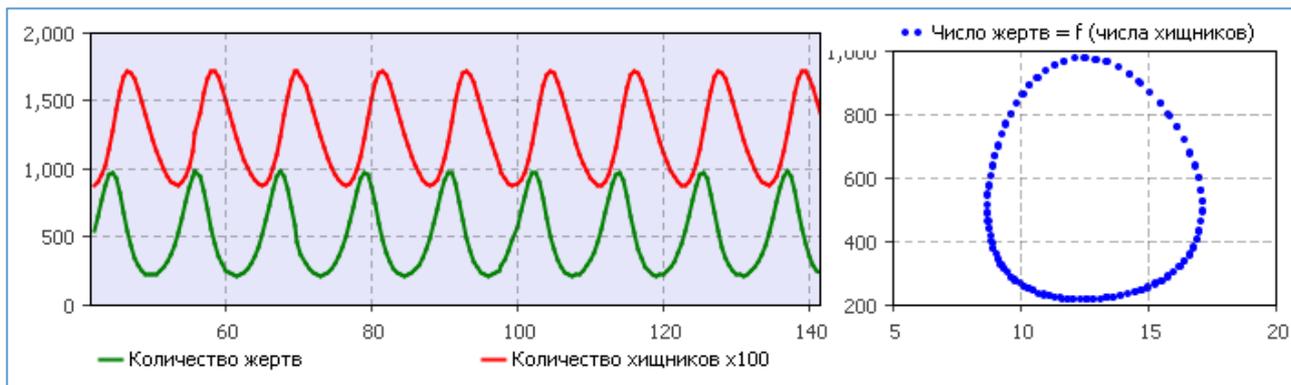


Рисунок 10. Основные показатели функционирования системы.

Можно проводить параметрический анализ и оптимизационные эксперименты для обеспечения требуемых уровней величин популяций. На Рисунке 11 приведены результаты эксперимента по увеличению доступной площади проживания — система вышла на новую орбиту (траекторию).

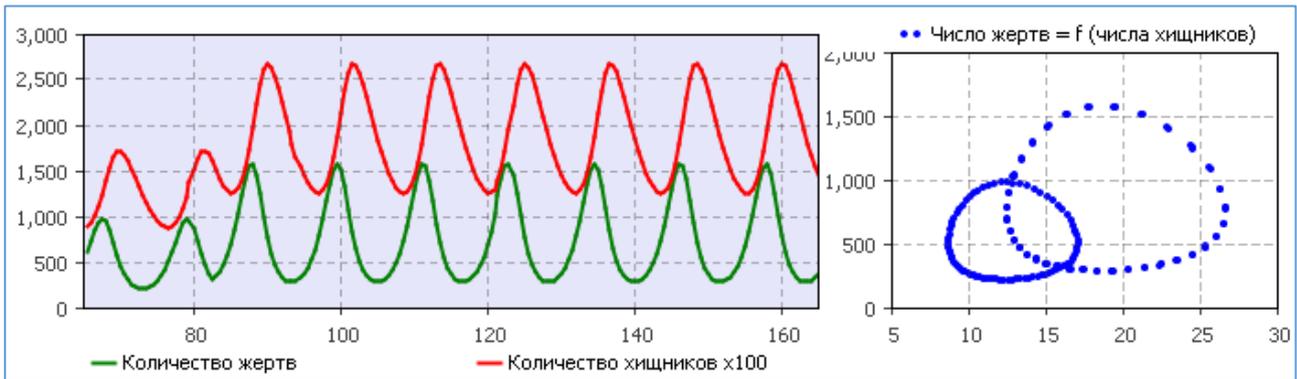


Рисунок 11. Влияние доступной площади проживания.

Увеличение числа жертв приводит к переводу системы на внутреннюю орбиту (Рисунок 12).

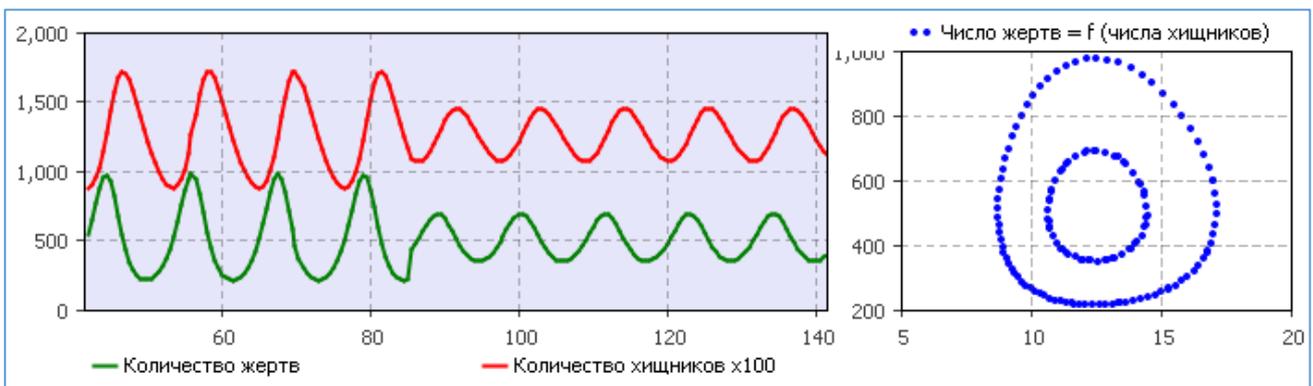


Рисунок 12. Варьирование числа жертв.

2.4. «Модель хищник — две жертвы»

Исследуем модель «хищник — несколько жертв» для наглядности взяв два вида жертв (3) с учетом их давления друг на друга и насыщения ареала жертвами и хищниками:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = k_1 x_1 - q_1 x_1 y - a_1 x_2 x_1 - \frac{k_1 x_1^2}{H_1} \\ \frac{dx_2}{dt} = k_2 x_2 - q_2 x_2 y - a_2 x_1 x_2 - \frac{k_2 x_2^2}{H_2} \\ \frac{dy}{dt} = k_y y + p_1 x_1 g_1 y + p_2 x_2 g_2 y - q_y y - 4 \frac{k_y y^2}{H_y} \end{cases},$$

т. е. функции насыщения представлены в виде:

$$f(x_i, H_i) = \frac{k_i x_i^2}{H_i} (i = 1, 2); F(y, H_y) = \frac{k_y y^2}{H_y}.$$

На Рисунке 13 приведена принципиальная схема модели.

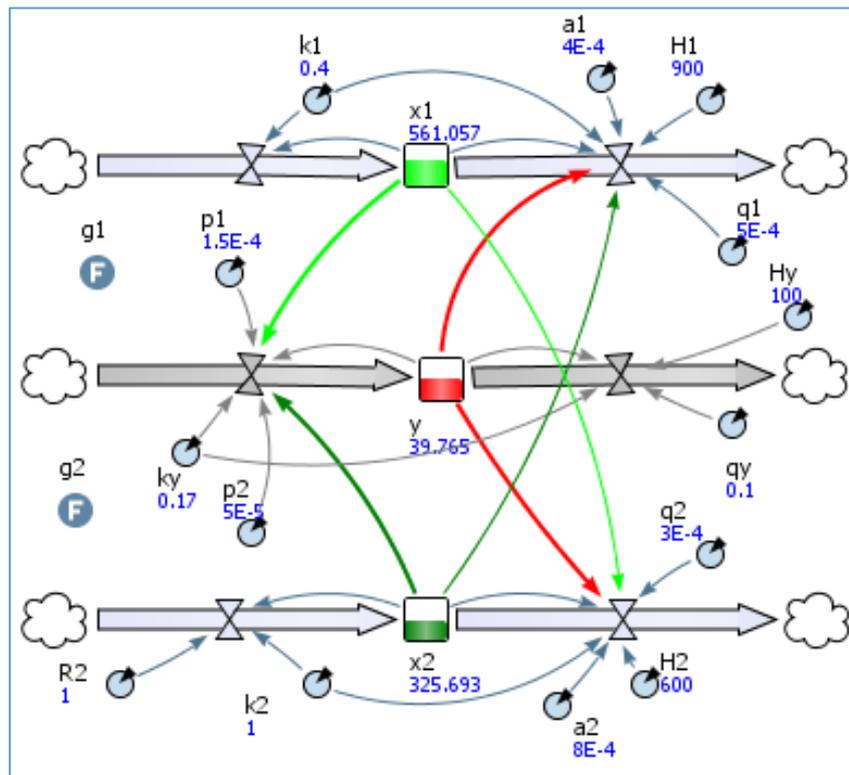


Рисунок 13. Схема модели хищник — две жертвы.

На Рисунке 14. приведены временные зависимости численности популяций жертв (выделены зеленым цветом) и хищников. Система из начального состояния переходит в режим с постоянными плотностями.

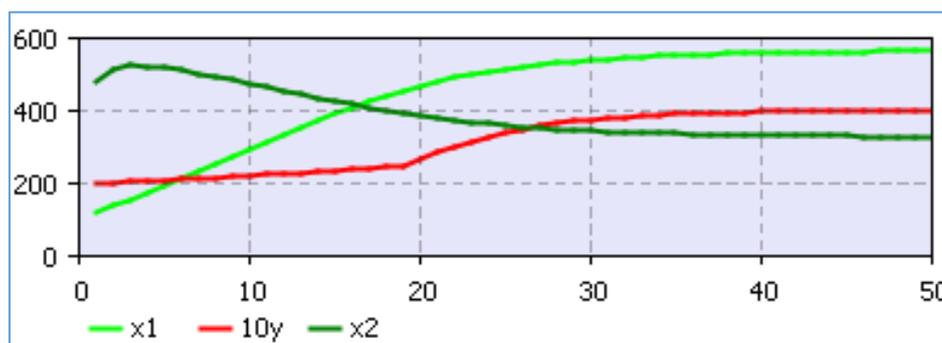


Рисунок 14. График переходного процесса.

2.5. Неклассическая модель «хищник–жертва»

Исследуем неклассическую модель [3]. На Рисунке 15 представлена система уравнений модели и ее принципиальная схема в среде AnyLogic.

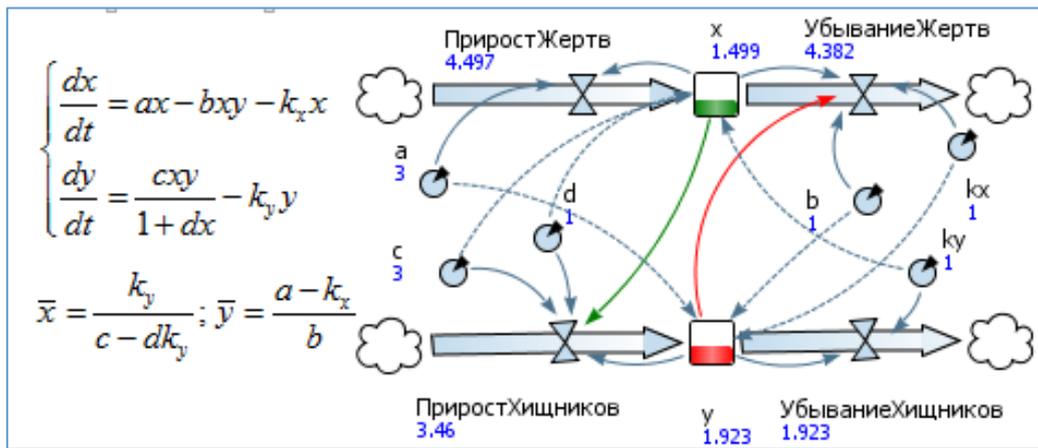


Рисунок 15. Неклассическая модель и исходные данные для моделирования.

При выбранных исходных данных стационарной точкой будет точка с координатами $\bar{y} = 2$; $\bar{x} = 0,5$.

Типичный вид фазовых портретов (с центром) представлен на Рисунке 16.

На Рисунке 16 слева представлены две фазовые траектории. Одна — при выбранных исходных данных и начальных условиях, вторая — после увеличения числа жертв. Влияние, например, увеличения коэффициента c 3 до 4 представлено на рисунке справа. Очевидно, в данном случае $\bar{y} = 2$; $\bar{x} < 0,5$.

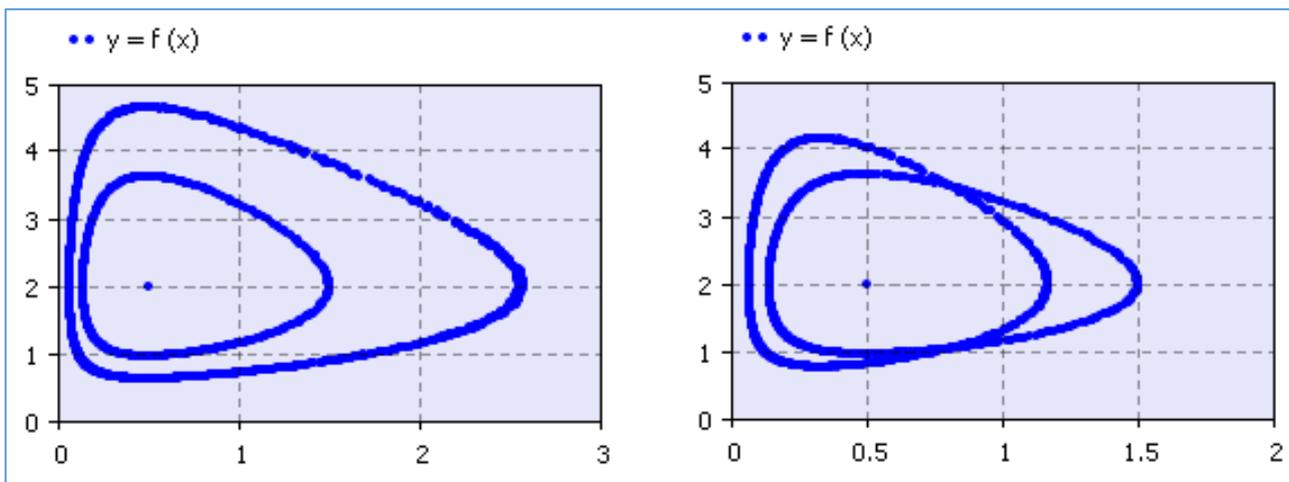


Рисунок 16. Фазовые портреты системы.

3. Выводы

Проведенное качественное и количественное исследование простейших моделей математической экологии позволяет связать воедино математический аналитический аппарат исследований и возможности современных идеологий имитационного моделирования. Практической базой для проведения моделирования явился метод системной динамики, позволяющий строить стратегические имитационные модели необходимые для принятия управленческих решений в области сокращения и исключения возможных негативных воздействий на экосистему.

Разработка может служить основой для исследования более сложных систем, а также для использования принципов агентного и комбинированного моделирования биосистем.

Список литературы:

1. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. Москва–Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2004. 288 с.
2. Колпак Е. П., Горыня Е. В., Селицкая Е. А. О моделях А. Д. Базыкина «хищник–жертва» // Молодой ученый. 2016. №2. С. 12–20.
3. Лебедева М. И., Норин А. В. Неклассическая модель хищник–жертва // Математические структуры и моделирование. 2016. №1 (37). С. 30–35.
4. Александров А. Ю., Платонов А. В. О предельной ограниченности и перманентности решений одного класса дискретных моделей динамики популяций с переключениями // Вестник Санкт–Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. №1. С. 5–16.
5. Базыкин А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Москва–Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003. 368 с.

References:

1. Voltaire V. Mathematical theory of fight for existence. Moscow–Izhevsk: Institute of computer technologies, 2004. 288 p. (In Russian).
2. Kolpak E. P. Gorynya E. V., Selitskaya E. A. About A. D. Bazykin’s models “a predator–prey”. Molodoi uchenyi, 2016, no. 2, pp. 12–20. (In Russian).
3. Lebedeva M. I., Norin A. V. Non-classical model of predator–prey. Mathematical structure and modeling, 2016, no. 1 (37), pp. 30–35. (In Russian).
4. Aleksandrov A., Platonov A. V. About limiting boundedness and permanence of solutions of a class of discrete models of population dynamics with switching. Bulletin of St. Petersburg State University. Series 10: Applied Mathematics. Computer science. Management processes, 2014, no. 1, pp. 5–16. (In Russian).
5. Bazykin A. D. Nonlinear dynamics of interacting populations. Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Technology, 2003, 368 p. (In Russian).

*Работа поступила
в редакцию 21.01.2017г.*

*Принята к публикации
24.01.2017 г.*

Ссылка для цитирования:

Осипов Г. С. Исследование простейших моделей математической экологии в среде имитационного моделирования *AnyLogic* // Бюллетень науки и практики. Электрон. журн. 2017. №2 (15). С. 8–22. Режим доступа: <http://www.bulletennauki.com/osipov-1> (дата обращения 15.02.2017).

Cite as (APA):

Osipov, G. (2017). The study of the simplest models of mathematical ecology in the simulation software AnyLogic. *Bulletin of Science and Practice*, (2), 8–22. Available at: <http://www.bulletennauki.com/osipov-1>, accessed 15.02.2017. (In Russian).