Artigo Original DOI:10.5902/2179460X12251

Ciência e Natura, Santa Maria,v. 36 n. 1 jan-abr. 2014, p.030-038
Revista do Centro do Ciências Naturais e Exatas - UFSM
ISSN impressa: 0100-8307 ISSN on-line: 2179-460X

Existência, Decomposição Ortogonal e Comportamento Assintótico das Soluções de um Sistema em Eletromagnetismo

Existence, Orthogonal Decomposition and Asymptotic Behavior of Solutions of a System in Electromagnetism

Graciele de Borba Gomes Arend[1]; Marcio Violante Ferreira[2]

[1] Instituto Federal Farroupilha- Santa Maria, RS, Brasil
[2] Universidade Federal de Santa Maria - Santa Maria, RS, Brasil

Resumo

Consideramos, neste trabalho, um sistema de equações de Maxwell, que modela a propagação de ondas eletromagnéticas numa região limitada do espaço $\mathbb{R}^3$. Inicialmente provamos a existência e unicidade de solução de tal sistema utilizando, para isso, a Teoria de Semigrupos de Operadores Lineares. Obtemos, após isso, uma decomposição ortogonal do campo eletromagnético. Finalmente, utilizando a decomposição ortogonal e escolhendo um multiplicador adequado, mostramos que a energia total do sistema decai exponencialmente a zero quando $t \to \infty$. O método que apresentamos neste artigo é diferente daqueles que aparecem na literatura relacionada ao assunto estudado.

Palavras-chave: *Equações de Maxwell, decomposição ortogonal, decaimento exponencial.*

Abstract

In this paper we consider a system of Maxwell's equations, which models the propagation of electromagnetic waves in a bounded region of the space $\mathbb{R}^3$. First we prove the existence and uniqueness of solution of such a system using, for this, Semigroup of Linear Operators Theory. We obtain, after this, the orthogonal decomposition of the electromagnetic field. Finally, using that orthogonal decomposition and choosing an appropriate multiplier, we show that the total energy of the system decays exponentially to zero as $t \to \infty$. The method presented in this paper is quite different from those that appear in the literature related to this subject.

Keywords: *Maxwell's equations, orthogonal decomposition, exponential decay.*

Recebido em: 04.12.13, Aceito em: 22.01.14

1 Introdução

Consideramos neste trabalho o sistema de equações de Maxwell

$$\epsilon E_t - \nabla \times H + \sigma(x)E = 0 \text{ em } \Omega \times (0,+\infty), \quad (1)$$
$$\mu H_t + \nabla \times E = 0 \text{ em } \Omega \times (0,+\infty), \quad (2)$$
$$\nabla \cdot H = 0 \text{ em } \Omega \times (0,+\infty) \quad (3)$$

complementado pelas condições iniciais

$$E(x,0) = E_0(x) \text{ e } H(x,0) = H_0(x) \text{ em } \Omega, \quad (4)$$

e condições de fronteira

$$\eta \times E = 0 \text{ e } \eta \cdot H = 0 \text{ em } \Gamma \times (0,+\infty). \quad (5)$$

Como pode ser visto em Landau e Lifshitz (1960), este sistema descreve a propagação de ondas eletromagnéticas num domínio espacial $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ perfeitamente condutor. Suporemos, ao longo de todo o trabalho, que Ω é um conjunto aberto, limitado e simplemente conexo com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ suficientemente regular. As funções $E(x,t) = (E_1(x,t), E_2(x,t), E_3(x,t))$ e $H(x,t) = (H_1(x,t), H_2(x,t), H_3(x,t))$ representam os campos elétrico e magnético, respectivamente, os quais dependem do tempo $t \geq 0$ e da variável espacial $x \in \Omega$. Em (5), $\eta(x)$ denota o vetor normal exterior a Ω em $x \in \Gamma$. ϵ e μ, que neste trabalho suporemos constantes (positivas), denotam a permissividade dielétrica e a permeabilidade magnética do meio, respectivamente. Além disso, $\sigma = \sigma(x)$ é uma função real não-negativa representando a condutividade elétrica (conforme Landau e Lifshitz (1960)), relacionada com a Lei de Ohm , satisfazendo a hipótese

$$\sigma \in L^\infty(\Omega) \text{ e } \sigma_0 \leq \sigma(x) \leq \sigma_1, \text{ q.s. em } \Omega, \quad (6)$$

onde σ_0 e σ_1 são constantes positivas.

A Energia Total do sistema (1)-(5) é dada por

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\epsilon|E|^2 + \mu|H|^2\right) dx,$$

onde $|E|^2 = \sum_{j=1}^{3} E_j^2$ e $|H|^2 = \sum_{j=1}^{3} H_j^2$. Um cálculo direto nos dá, pelo menos formalmente,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = -\int_\Omega \sigma(x)|E|^2 dx \leq 0,$$

o que mostra o caráter dissipativo do sistema. O objetivo principal do nosso trabalho é mostrar que $\mathcal{E}(t) \to 0$ exponencialmente quando $t \to +\infty$.

É indiscutível o interesse em se compreender o comportamento de modelos de natureza eletromagnética, haja vista sua aplicabilidade na indústria em geral. A literatura que trata dos aspectos matemáticos deste assunto é bastante vasta. Pode-se citar, por exemplo, os trabalhos de Nicaise (2000) e Nicaise e Pignotti (2005) que tratam da controlabilidade exata e da estabilização interna das equações de Maxwell num meio heterogêneo. Em Yin (1999), o autor considera um sistema de equações de Maxwell não-linear e faz a análise do limite singular.

Outros trabalhos interessantes envolvendo efeitos eletromagnéticos também podem ser citados. Utilizando multiplicadores adequados, Ferreira e Menzala (2007) obtiveram a estabilização da solução de um sistema elasto-eletromagnético não-linear em domínios exteriores. Já Yin (2006) prova a existência de solução fraca de um sistema de equações de Maxwell com efeitos térmicos. É importante ressaltar que poucos resultados existem sobre o decaimento da energia desse modelo, limitando-se ao caso unidimensional. Daí a importância de se conhecer o comportamento do campo eletromagnético bem como uma decomposição ortogonal adequada.

O problema (1)-(5) foi estudado anteriormente por Phung (2000), onde o autor demonstra que a energia total do sistema decai exponencialmente. No nosso caso, obtemos a mesma estimativa de decaimento, porém com uma técnica distinta da usada nesse trabalho. Além disso, em Phung (2000) o autor se limita ao caso em que a condutividade elétrica σ é constante.

Nosso trabalho está estruturado da seguinte froma: Na próxima seção, mostramos a existência e unicidade de solução de (1)-(5) utilizando a Teoria de Semigrupos. Para isso, fazemos um breve estudo sobre espaços funcionais que intervem na teoria matemática do eletromagnetismo. Na seção 3, apresentamos uma decomposição ortogonal da solução obtida. Finalmente, na seção 4, utilizando um multiplicador adequado, provamos a estabilização da energia total do sistema.

2 Existência e unicidade de solução

Faremos uma breve exposição sobre os espaços funcionais clássicos utilizados no estudo das equações de Maxwell. As notações utilizadas ao longo do texto são aquelas encontradas em Adams (1975), Dautray e Lions (1990) e Girault e Raviart (1986). As demonstrações detalhadas de alguns fatos que apresentaremos aqui podem ser encontradas em Alves (2012) e Arend (2012).

O produto interno nos espaços $L^2(\Omega)$ e $[L^2(\Omega)]^3 = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ será denotado, indistintamente, por (,), o que não gera confusão. Assim,

$$(u,v) = \int_\Omega uv\, dx,$$

se $u, v \in L^2(\Omega)$ e

$$(u,v) = \int_\Omega u \cdot v \, dx = \sum_{j=1}^{3} \int_\Omega u_j v_j \, dx,$$

se $u = (u_1,u_2,u_3), v = (v_1,v_2,v_3) \in [L^2(\Omega)]^3$.

Também, a norma nestes espaços será denotada $||\cdot||$, ou seja,

$$||v|| = \left(\int_\Omega |v|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

se $v \in L^2(\Omega)$ e

$$||v|| = \left(\sum_{j=1}^{3} \int_\Omega |v_j|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

se $v = (v_1,v_2,v_3) \in [L^2(\Omega)]^3$.

Para indicar a norma do espaço $L^\infty(\Omega)$, usaremos a notação $||\cdot||_\infty$, ou seja,

$$||f||_\infty = \inf\{K;\ |f(x)| \le K \ \texttt{q.s em}\ \Omega\}.$$

O espaço vetorial real das funções $v \in [L^2(\Omega)]^3$ tais que $\nabla \cdot v \in L^2(\Omega)$ é denotado por $H(div,\Omega)$, isto é,

$$H(div,\Omega) = \{v \in [L^2(\Omega)]^3;\ \nabla \cdot v \in L^2(\Omega)\}.$$

Já o espaço vetorial real das funções $v \in [L^2(\Omega)]^3$ tais que $\nabla \times v \in [L^2(\Omega)]^3$ será denotado por $H(rot,\Omega)$, ou seja,

$$H(rot,\Omega) = \{v \in [L^2(\Omega)]^3;\ \nabla \times v \in [L^2(\Omega)]^3\},$$

sendo o mesmo um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u,v)_{H(rot,\Omega)} = (u,v) + (\nabla \times u, \nabla \times v).$$

Está bem definida, em $H(div,\Omega)$, a aplicação Traço

$$\gamma_\eta : v \mapsto v \cdot \eta|_\Gamma,$$

e seu núcleo é o espaço $H_0(div,\Omega) = \overline{[\mathcal{D}(\Omega)]^3}^{H(div,\Omega)}$. Em símbolos,

$$H_0(div,\Omega) = \{v \in H(div,\Omega); v \cdot \eta = 0 \ \texttt{em}\ \Gamma\}.$$

Também está bem definida, em $H(rot,\Omega)$, a aplicação traço

$$\gamma_\tau : v \mapsto v \times \eta|_\Gamma,$$

sendo seu núcleo o espaço $H_0(rot,\Omega) = \overline{[\mathcal{D}(\Omega)]^3}^{H(rot,\Omega)}$, ou seja,

$$H_0(rot,\Omega) = \{v \in H(rot,\Omega); v \times \eta = 0 \ \texttt{em}\ \Gamma\}.$$

Utilizarems também o subespaço fechado de $[L^2(\Omega)]^3$

$$H_0(div\ 0,\Omega) = \{u \in [L^2(\Omega)]^3;\ \nabla \cdot u = 0 \text{ e } \eta \cdot u|_\Gamma = 0\}.$$

$H_0(div\ 0,\Omega)$ é, pois, um espaço de Hilbert com o produto interno $(\ ,\ )$ de $[L^2(\Omega)]^3$.

Observação 2.1. *Conforme Arend (2012), pg. 29, o espaço $H_0(div\ 0,\Omega) \cap H(rot,\Omega)$ é denso em $H_0(div\ 0,\Omega)$.*

A existência e unicidade de solução do sistema (1)-(5) será estabelecida via Teoria de Semigrupos. Para isso, introduzimos o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = [L^2(\Omega)]^3 \times H_0(div\ 0,\Omega)$$

com produto interno

$$((E,H),(E_1,H_1))_\mathcal{H} = \epsilon(E,E_1) + \mu(H,H_1) = \\ = \int_\Omega (\epsilon E \cdot E_1 + \mu H \cdot H_1) \, dx,$$

para todos $(E,H),(E_1,H_1) \in \mathcal{H}$, e o operador linear não-limitado $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ com domínio

$$D(\mathcal{A}) = H_0(rot,\Omega) \times (H_0(div\ 0,\Omega) \cap H(rot,\Omega))$$

e definido por

$$\mathcal{A}(E,H) = (-\epsilon^{-1}\sigma E + \epsilon^{-1}\nabla \times H, -\mu^{-1}\nabla \times E),$$

para todo $(E,H) \in D(\mathcal{A})$. O sistema (1)-(5) pode ser reescrito, então, na forma

$$\frac{dU(t)}{dt} = \mathcal{A}U(t) \tag{7}$$

$$U(0) = U_0, \tag{8}$$

em que $U(t) = (E(t),H(t))$ e $U_0 = (E_0,H_0)$.

Proposição 2.2. *$D(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{H}$.*

Demonstração Segue diretamente da cadeia de inclusões

$$[\mathcal{D}(\Omega)]^3 \times (H_0(div\ 0,\Omega) \cap H(rot,\Omega)) \subset D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$$

e das densidades de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ e de $H_0(div\ 0,\Omega) \cap H(rot,\Omega)$ em $H_0(div\ 0,\Omega)$. ■

Proposição 2.3. *$\mathcal{A}$ é um operador dissipativo, ou seja,*

$$(\mathcal{A}(E,H),(E,H))_\mathcal{H} \le 0, \ \forall (E,H) \in D(\mathcal{A}).$$

Demonstração Da definição de $\mathcal{A}$ obtemos

$$(\mathcal{A}(E,H),(E,H))_\mathcal{H} = \epsilon(-\epsilon^{-1}\sigma E + \epsilon^{-1}\nabla \times H, E) + \\ + \mu(-\mu^{-1}\nabla \times E, H) = \int_\Omega \nabla \cdot (E \times H) \ dx - \\ - \int_\Omega \sigma(x)\,|E|^2 \ dx,$$

onde usamos a identidade vetorial

$$(\nabla \times H) \cdot E - (\nabla \times E) \cdot H = \nabla \cdot (H \times E).$$

Mas, pela identidade de Green,

$$\int_\Omega \nabla \cdot (H \times E) \ dx = \int_\Gamma (H \times E) \cdot \eta \ d\Gamma =$$

$$= \int_\Gamma (E \times \eta) \cdot H \, d\Gamma = 0,$$

pois $E \in H_0(rot,\Omega)$. Portanto,

$$(\mathcal{A}(E,H),(E,H))_\mathcal{H} = -\int_\Omega \sigma(x) \, |E|^2 \, dx \leq 0.$$

■

Proposição 2.4. *$I - \mathcal{A}$ (I denota o operador identidade) é um operador sobrejetivo, isto é,*

$$\mathcal{R}\,(I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}.$$

Demonstração Devemos provar que para todo $(f,g) \in \mathcal{H}$ existe $(E,H) \in D(\mathcal{A})$ tal que

$$(I - \mathcal{A})\,(E,H) = (f,g),$$

isto é,

$$\begin{cases} E + \epsilon^{-1}\sigma(x)E - \epsilon^{-1}\nabla \times H = f \\ \mu^{-1}\nabla \times E + H = g. \end{cases} \tag{9}$$

Sendo $H = g - \mu^{-1}\nabla \times E$, o sistema (9) se resume a encontrar $E \in H_0(rot,\Omega)$ tal que

$$E + \epsilon^{-1}\sigma(x)E + \epsilon^{-1}\mu^{-1}\nabla \times (\nabla \times E) = f + \epsilon^{-1}\nabla \times g, \tag{10}$$

onde $f \in [L^2(\Omega)]^3$ e $g \in H_0(div\ 0,\Omega)$ são funções dadas. Com o intuito de resolver o problema (10), consideremos a forma bilinear

$$a : H_0(rot,\Omega) \times H_0(rot,\Omega) \to \mathbb{R}$$

definida por

$$\begin{aligned} a(E,W) = \int_\Omega E \cdot W \, dx + \epsilon^{-1} \int_\Omega \sigma(x) E \cdot W \, dx + \\ + \epsilon^{-1}\mu^{-1} \int_\Omega (\nabla \times E) \cdot (\nabla \times W) \, dx, \end{aligned}$$

para todos $E,W \in H_0(rot,\Omega)$, e a forma linear

$$F : H_0(rot,\Omega) \to \mathbb{R}$$

dada por

$$F(W) = \int_\Omega \left[f \cdot W + \epsilon^{-1} g \cdot \nabla \times W \right] \, dx,$$

$\forall\, W \in H_0(rot,\Omega)$. Utilizando a Desigualdade de Holder e a hipótese (6), obtemos

$$\begin{aligned} |a(E,W)| &\leq ||E||||W|| + \epsilon^{-1}\sigma_1 ||E||||W|| + \\ &+ \epsilon^{-1}\mu^{-1}||\nabla \times E||||\nabla \times W|| \leq \\ &\leq C_1 \left(||E||||W|| + ||\nabla \times E||||\nabla \times W|| \right) \leq \\ &\leq 2C_1 ||E||_{H_0(rot,\Omega)} ||W||_{H_0(rot,\Omega)}, \end{aligned}$$

onde $C_1 = \max\{\left(1 + \epsilon^{-1}\sigma_1\right)\ ,\ \epsilon^{-1}\mu^{-1}\}$, o que mostra que a é contínua. Além disso,

$$\begin{aligned} a(E,E) &= ||E||^2 + \epsilon^{-1}||\sigma^{\frac{1}{2}}E||^2 + \epsilon^{-1}\mu^{-1}||\nabla \times E||^2 \geq \\ &\geq ||E||^2 + \epsilon^{-1}\mu^{-1}||\nabla \times E||^2 \geq C_2 ||E||^2_{H_0(rot,\Omega)}, \end{aligned}$$

onde $C_2 = \min\{\ 1\ ,\ \epsilon^{-1}\mu^{-1}\}$, o que significa que a é coerciva. Por fim, observemos que F é contínua, já que

$$\begin{aligned} |F(W)| &\leq ||f||||W|| + \epsilon^{-1}||g||||\nabla \times W|| \leq \\ &\leq 2C_3 ||W||_{H_0(rot,\Omega)}, \end{aligned}$$

onde $C_3 = \max\{||f||\ ,\ \epsilon^{-1}||g||\}$. Segue, do Teorema de Lax-Milgram (Brezis, 2010), que existe único $E \in H_0(rot,\Omega)$ tal que

$$a(E,W) = F(W), \quad \forall\, W \in H_0(rot,\Omega). \tag{11}$$

Seja

$$H = g - \mu^{-1}\nabla \times E.$$

Note-se, de imediato, que

$$\mu^{-1}\nabla \times E + H = g.$$

Além disso, sendo $E \in H_0(rot,\Omega)$ obtem-se, conforme Girault e Raviart (1986), pg. 35, que $\nabla \times E \in H_0(div\ 0,\Omega)$ e, portanto, $H \in H_0(div\ 0,\Omega)$.

Agora, de (11) obtemos, no sentido das distribuições,

$$\left\langle \left(1 + \epsilon^{-1}\sigma(x)\right) E - \epsilon^{-1}\nabla \times H\ ,\ \varphi \right\rangle = \langle f\ ,\ \varphi \rangle,$$

$\forall\, \varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^3$ e, portanto,

$$\left(1 + \epsilon^{-1}\sigma\right) E - \epsilon^{-1}\nabla \times H = f, \ \ \texttt{em}\ [\mathcal{D}'(\Omega)]^3.$$

Ora, mas $E,f \in [L^2(\Omega)]^3$ e $\sigma \in L^\infty(\Omega)$, donde conclui-se que $H \in H(rot,\Omega)$. Assim, $(E,H) \in D(\mathcal{A})$ e

$$\begin{cases} E + \epsilon^{-1}\sigma E - \epsilon^{-1}\nabla \times H = f \\ \mu^{-1}\nabla \times E + H = g, \end{cases}$$

o que encerra a demonstração da proposição. ■

Vimos até aqui que $\mathcal{A}$ é um operador maximal dissipativo com domínio $D(\mathcal{A})$ denso em $\mathcal{H}$. Portanto, pelo Teorema de Lumer-Phillips (Pazy, 1983), $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações $T(t)$, ou seja,

$$\frac{dT(t)}{dt} = \mathcal{A}T(t).$$

Temos, portanto, o seguinte resultado de existência de solução para o problema (7)-(8) e, consequentemente, para o sistema (1)-(5):

Teorema 2.5. *Suponhamos que σ satisfaz a hipótese* (6). *Então, dado $(E_0, H_0) \in \mathcal{H}$, o sistema* (1)-(5) *tem uma única solução fraca $(E, H) \in C\left([0,\infty)\,;\,\mathcal{H}\right)$ dada por*

$$(E(t), H(t)) = T(t)(E_0, H_0).$$

Se for $(E_0,H_0) \in D(\mathcal{A})$, então o sistema tem única solução forte $(E, H) \in C\left([0,\infty)\,;\mathcal{D}(\mathcal{A})\right) \cap C^1\left([0,\infty)\,;\,\mathcal{H}\right)$.

Nos interessa agora obter solução de (1)-(5) ainda mais regular que a do teorema anterior. Como veremos, é suficiente restringir o espaço onde se toma os dados iniciais. Essa solução mais regular será usada na próxima seção, quando faremos uma análise sobre a decomposição ortogonal dos campos E e H. Introduziremos, pois, os espaços

$$\mathbb{H}_1(\Omega) = H(rot\ 0,\Omega) \cap H_0(div\ 0,\Omega),$$

onde

$$H(rot\ 0,\Omega) = \{v \in [L^2(\Omega)]^3;\ \nabla \times v = 0\}$$

e

$$M_H = \mathbb{H}_1(\Omega)^{\perp},$$

o complemento ortogonal de $\mathbb{H}_1(\Omega)$ em $[L^2(\Omega)]^3$. Vamos denotar

$$\mathbb{V} = [L^2(\Omega)]^3 \times M_H.$$

Teorema 2.6. *Se $(E_0, H_0) \in D(\mathcal{A}) \cap \mathbb{V}$, então existe um único (E, H), solução de* (1)-(5)*, tal que $(E(t), H(t)) \in D(\mathcal{A}) \cap \mathbb{V}$, $\forall\ t > 0$.*

Demonstração Sendo $(E(t),H(t)) \in D(\mathcal{A})$ (isto pelo teorema anterior), é suficiente provar que $H \in M_H$. Considerando $h_1 \in \mathbb{H}_1(\Omega)$ qualquer e utilizando a equação (2), obtemos

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\mu H, h_1) = (\nabla \times E, h_1) = \int_\Omega E \cdot (\nabla \times h_1)\ dx + \\ + \int_\Gamma (E \times \eta) \cdot h_1\ d\Gamma = 0,$$

$\forall\ t > 0$, já que $h_1 \in \mathbb{H}_1(\Omega)$ e $E \in H_0(rot,\Omega)$. Portanto,

$$\mu\left(H(t), h_1\right) = \mu\left(H_0, h_1\right) = 0, \quad \forall\ t > 0,$$

posto que $H_0 \in M_H$. Vimos assim que

$$(H(t), h_1) = 0, \quad \forall\ h_1 \in \mathbb{H}_1(\Omega)\ \text{ e }\ \forall\ t > 0,$$

provando que $H \in M_H$. ■

3 Decomposição ortogonal da solução

Nesta seção apresentaremos um resultado sobre a decomposição ortogonal dos campos elétrio e magnético E e H soluções do sistema (1)-(5). É desta decomposição que obteremos um multiplicador adequado para a prova do decaimento da energia do sistema, o que será feito na próxima seção.

Faremos, primeiramente, uma breve exposição sobre resultados relacionados com a decomposição do espaço $[L^2(\Omega)]^3$. As notações utilizadas, bem como a prova detalhada dos fatos que aqui enunciaremos, podem ser encontradas em Dautray e Lions (1990).

Como, por hipótese, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto aberto, limitado e simplemente conexo com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ regular, então

$$\mathbb{H}_1(\Omega) \subset H^1_{v0}(\Omega)^3 := \{v \in [H^1(\Omega)]^3\ ;\ v \cdot \eta = 0\ \texttt{em}\ \Gamma\}.$$

Além disso, é conhecida a decomposição ortogonal do espaço $[L^2(\Omega)]^3$:

$$[L^2(\Omega)]^3 = grad\ H^1(\Omega) \oplus \mathbb{H}_1(\Omega) \oplus rot\ H^1_{\tau 0}(\Omega)^3 = \\ = grad\ H^1(\Omega) \oplus H_0(div\ 0,\Omega),$$

onde

$$grad\ H^1(\Omega) = \{\nabla p\ ;\ p \in H^1(\Omega)\}$$

e

$$rot\ H^1_{\tau 0}(\Omega)^3 = \\ = \{\nabla \times v\ ;\ v \in [H^1(\Omega)]^3\ \texttt{ e }\ \eta \times v = 0\ \texttt{em}\ \Gamma\}.$$

Tem-se, portanto,

$$(H_0(div\ 0,\Omega))^{\perp} = grad\ H^1(\Omega) \subset H(rot\ 0,\Omega)$$

e

$$\left(rot\ H^1_{\tau 0}(\Omega)^3\right)^{\perp} = grad\ H^1(\Omega) \oplus \mathbb{H}_1(\Omega) = \\ = H(rot\ 0,\Omega).$$

Vale, também, a decomposição

$$[L^2(\Omega)]^3 = grad\ H^1_0(\Omega) \oplus H(div\ 0,\Omega), \tag{12}$$

onde

$$grad\ H^1_0(\Omega) = \{\nabla p\ ;\ p \in H^1_0(\Omega)\}$$

e

$$H(div\ 0,\Omega) = \{v \in [L^2(\Omega)]^3;\ \nabla \cdot v = 0\}.$$

Por fim, recordemos que (com as hipóteses impostas a Ω, é bom lembrar) cada elemento $u \in [L^2(\Omega)]^3$ tem decomposição da forma

$$u = \nabla p + h_1 + \nabla \times w, \tag{13}$$

com $w \in [H^1(\Omega)]^3 \cap H(div\, 0,\Omega) \cap H_0(rot,\Omega)$, $p \in H^1(\Omega)$, $h_1 \in \mathbb{H}_1(\Omega)$ e

$$\int_\Gamma w \cdot \eta \, d\Gamma = 0. \tag{14}$$

Só mais uma notação antes de apresentarmos o principal resultado desta seção. Denotaremos

$$\mathbb{H}_2(\Omega) = H_0(rot,\Omega) \cap H(rot\, 0,\Omega) \cap H(div\, 0,\Omega).$$

Conforme Dautray e Lions (1990), vale a identificação

$$\mathbb{H}_2(\Omega) = \{v = \nabla\varphi \; ; \; \varphi \in H^1(\Omega) \; , \; \Delta\varphi = 0 \; \texttt{e} \; \varphi\,|_\Gamma = \texttt{constante}\}.$$

Teorema 3.1. *Se* $(E_0, H_0) \in D(\mathcal{A}) \cap \mathbb{V}$*, então existem* p*,* h_2 *e* A*, com* $(p(t), h_2(t), A(t)) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbb{H}_2(\Omega) \times \left([H^1(\Omega)]^3 \cap H(div\, 0,\Omega) \cap H_0(rot,\Omega)\right)$ *e* $\int_\Gamma A \cdot \eta \, d\Gamma = 0$*,* $\forall\, t > 0$*, tal que a solução* (E, H) *do sistema* (1)-(5) *satisfaz*

$$E = -\nabla p - \frac{\partial A}{\partial t} + h_2, \tag{15}$$

$$\mu H = \nabla \times A \;\; \texttt{e} \tag{16}$$

$$||E||^2 = ||\nabla p||^2 + ||\frac{\partial A}{\partial t}||^2 + ||h_2||^2. \tag{17}$$

Demonstração A prova que apresentaremos é inspirada no trabalho de Phung (2000). Como $H \in [L^2(\Omega)]^3$ então, pela decomposição (13),

$$\mu H = \nabla q + h_1 + \nabla \times A,$$

com $A \in [H^1(\Omega)]^3 \cap H(div\, 0,\Omega) \cap H_0(rot,\Omega)$, $q \in H^1(\Omega)$, $h_1 \in \mathbb{H}_1(\Omega)$ e $\int_\Gamma A \cdot \eta \, d\Gamma = 0$. Do fato de ser $H \in H_0(div\, 0,\Omega)$, obtemos

$$0 = \nabla \cdot (\mu H) = \nabla \cdot (\nabla q) + \nabla \cdot h_1 + \nabla \cdot (\nabla \times A) = \triangle q, \tag{18}$$

posto que $h_1 \in \mathbb{H}_1(\Omega)$ e $\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$. Por outro lado, observemos que, em Γ,

$$0 = \mu H \cdot \eta = \nabla q \cdot \eta + h_1 \cdot \eta + \nabla \times A \cdot \eta = \frac{\partial q}{\partial \eta}, \tag{19}$$

pois H, h_1, $\nabla \times A \in H_0(div\, 0,\Omega)$. De (18)-(19) obtemos

$$\nabla q = 0,$$

pois

$$0 = -\int_\Omega q \triangle q \, dx = -\int_\Gamma q \frac{\partial q}{\partial \eta} \, d\Gamma + \int_\Omega \nabla q \cdot \nabla q \, dx = $$

$$= ||\nabla q||^2.$$

É fácil concluir também que

$$h_1 = 0,$$

já que $H \in M_H = \mathbb{H}_1(\Omega)^\perp$ e $h_1 \in \mathbb{H}_1(\Omega)$. Vemos, então, que

$$\mu H = \nabla \times A,$$

o que prova a identidade (16). Agora utilizamos a decomposição (12) para analisar o campo elétrico E. De fato, sendo $E \in [L^2(\Omega)]^3$, podemos escrever

$$E = -\nabla p + w,$$

com $p \in H_0^1(\Omega)$ e $w \in H(div\, 0,\Omega)$. Substituindo (16) na equação (2) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times A) + \nabla \times E = 0,$$

ou ainda,

$$\nabla \times (A_t + \nabla p + E) = 0, \tag{20}$$

já que $\nabla \times (\nabla p) = 0$. Além disso,

$$\nabla \cdot (A_t + \nabla p + E) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot A) + \nabla \cdot (\nabla p + E) = $$
$$= \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot A) + \nabla \cdot w = 0,$$

o que nos garante que

$$(A_t + \nabla p + E) \in H(div\, 0,\Omega). \tag{21}$$

Observemos agora que como $p \in H_0^1(\Omega)$ então $\nabla p \in H_0(rot,\Omega)$ (veja Arend (2012) ou Girault e Raviart (1986)). Como também temos $E, A_t \in H_0(rot,\Omega)$, obtemos

$$(A_t + \nabla p + E) \in H_0(rot,\Omega). \tag{22}$$

De (20)-(22) concluimos que $(A_t + \nabla p + E) \in \mathbb{H}_2(\Omega)$ e, portanto,

$$A_t + \nabla p + E = h_2, \;\; \texttt{com} \;\; h_2 \in \mathbb{H}_2(\Omega).$$

Isto prova a identidade (15). Para provar a identidade (17) é suficiente mostrar que A_t, ∇p e h_2 são campos dois a dois ortogonais em $[L^2(\Omega)]^3$. É o que passamos a fazer. Temos

$$(\nabla p, A_t) = \int_\Omega \nabla p \cdot A_t \, dx = -\int_\Omega p \nabla \cdot A_t \, dx +$$
$$+ \int_\Gamma p A_t \cdot \eta \, d\Gamma = -\int_\Omega p \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot A) \; dx = 0,$$

já que $p \in H_0^1(\Omega)$ e $A \in H(div\, 0,\Omega)$. Também, pela identidade de Green,

$$(\nabla p, h_2) = -\int_\Omega p \nabla \cdot h_2 \, dx + \int_\Gamma p \,(h_2 \cdot \eta) \; d\Gamma = 0.$$

Por último, levando em conta que $h_2 \in \mathbb{H}_2(\Omega)$, podemos escrever $h_2 = \nabla\varphi$ com $\varphi \in H^1(\Omega)$, $\Delta\varphi = 0$ e $\varphi\mid_\Gamma = K$, onde K é uma constante. Portanto,

$$(A_t, h_2) = -\int_\Omega \varphi \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot A)\ dx + K\int_\Gamma A_t \cdot \eta\ d\Gamma = 0,$$

pois $\int_\Gamma A \cdot \eta\ d\Gamma = 0$. Segue então a identidade (17) e a conclusão da demonstração. ■

Finalizamos esta seção com uma importante desigualdade válida para funções de $H(div\ 0,\Omega) \cap H_0(rot,\Omega)$. Com efeito, conforme Lema 3.4 de Girault e Raviart (1986), existe constante $C_0 > 0$ tal que

$$||v|| \leq C_0||\nabla \times v||, \quad \forall\ v \in H(div\ 0,\Omega) \cap H_0(rot,\Omega).$$

Teremos então, graças à identidade (16),

$$||A|| \leq C_0||\nabla \times A|| = C_0||\mu H||, \qquad (23)$$

já que $A \in H(div\ 0,\Omega) \cap H_0(rot,\Omega)$.

4 Comportamento assintótico

Passamos agora ao estudo do comportamento assintótico da solução (E,H) do sistema (1)-(5). O método utilizado consiste em perturbar a energia do sistema por um funcional escolhido adequadamente.

Seja (E,H) a solução de (1)-(5). Tomando o produto interno (em $\mathbb{R}^3$) de ambos os membros da equação (1) por E e de ambos os membros da equação (2) por H, obtemos

$$\epsilon E_t \cdot E - (\nabla \times H) \cdot E + \sigma E \cdot E = 0$$

e

$$\mu H_t \cdot H + (\nabla \times E) \cdot H = 0.$$

Somando ambas as expressões e integrando em Ω segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(\epsilon|E|^2 + \mu|H|^2\right)\ dx + \int_\Omega \sigma(x)|E|^2\ dx + \\ + \int_\Omega [(\nabla \times E) \cdot H - (\nabla \times H) \cdot E]\ dx = 0,$$

onde $|E|^2 = \sum_{j=1}^{3} E_j^2$ e $|H|^2 = \sum_{j=1}^{3} H_j^2$. Mas, da identidade de Green e da condição de contorno (5), obtemos

$$\int_\Omega [(\nabla \times E) \cdot H - (\nabla \times H) \cdot E]\ dx = \\ = -\int_\Omega \nabla \cdot (H \times E)\ dx = -\int_\Gamma (E \times \eta) \cdot H\ d\Gamma = 0.$$

Logo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(\epsilon|E|^2 + \mu|H|^2\right)\ dx = -\int_\Omega \sigma(x)|E|^2\ dx. \qquad (24)$$

A expressão

$$\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\epsilon|E|^2 + \mu|H|^2\right)\ dx \qquad (25)$$

é chamada *Energia Eletromagnética*. Vemos então, de (24), que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) = -\int_\Omega \sigma(x)|E|^2 dx \leq 0, \qquad (26)$$

o que mostra que a energia $\mathcal{E}(t)$ é decrescente.

O principal resultado deste artigo é apresentado a seguir e mostra que $\mathcal{E}(t) \to 0$, exponencialmente, quando $t \to \infty$.

Teorema 4.1. *Seja* $(E_0, H_0) \in D(\mathcal{A}) \cap \mathbb{V}$ *e* (E,H) *a solução de* (1)-(5) *correspondente. Então existem constantes positivas* α *e* β *tais que,*

$$\mathcal{E}(t) \leq \alpha\mathcal{E}(0)\exp(-\beta t), \quad \forall\ t > 0, \qquad (27)$$

onde $\mathcal{E}(t)$ *é a energia do sistema, definida pela identidade* (25).

Demonstração Sabemos, do Teorema (3.1), que a solução (E,H) se decompõe na forma

$$E = -\nabla p - A_t + h_2, \qquad (28)$$

$$\mu H = \nabla \times A \qquad (29)$$

com $p(t) \in H_0^1(\Omega)$, $h_2(t) \in \mathbb{H}_2(\Omega)$, $A(t) \in [H^1(\Omega)]^3 \cap H(div\ 0,\Omega) \cap H_0(rot,\Omega)$ e $\int_\Gamma A \cdot \eta\ d\Gamma = 0$, $\forall\ t > 0$. Além do mais,

$$||E||^2 = ||\nabla p||^2 + ||A_t||^2 + ||h_2||^2. \qquad (30)$$

Consideremos o funcional

$$F(t) := \epsilon\int_\Omega E \cdot A\ dx. \qquad (31)$$

Temos, da equação (1) e da decomposição (28), que

$$\frac{dF(t)}{dt} = \epsilon\int_\Omega E \cdot A_t\ dx + \epsilon\int_\Omega E_t \cdot A\ dx = \\ = \epsilon\int_\Omega (-\nabla p - A_t + h_2) \cdot A_t\ dx + \\ + \int_\Omega (\nabla \times H) \cdot A\ dx - \int_\Omega \sigma(x)E \cdot A\ dx = \\ = -\epsilon\int_\Omega A_t^2\ dx + \int_\Omega (\nabla \times H) \cdot A\ dx - \\ - \int_\Omega \sigma(x)E \cdot A\ dx,$$

pois, como já vimos anteriormente, A_t, ∇p e h_2 são campos dois a dois ortogonais em $[L^2(\Omega)]^3$. Como $A \in H_0(rot,\Omega)$ então, pela identidade de Green,

$$\int_\Omega (\nabla \times H) \cdot A\ dx = \int_\Omega H \cdot (\nabla \times A)\ dx = \int_\Omega \mu|H|^2\ dx.$$

Portanto,

$$\frac{dF(t)}{dt} = -\epsilon||A_t||^2 + \mu||H||^2 - \int_\Omega \sigma(x)E \cdot A\ dx. \quad (32)$$

Definimos agora a *Energia Perturbada*

$$G(t) := \mathcal{E}(t) - \delta F(t), \quad (33)$$

onde $F(t)$ é dada em (31) e δ é um parâmetro positivo a ser fixado. Levando em conta (26) e (32), vemos que

$$\frac{dG(t)}{dt} = -\int_\Omega \sigma(x)|E|^2 dx + \delta\epsilon||A_t||^2 - \\ - \delta\mu||H||^2 + \delta \int_\Omega \sigma(x)E \cdot A\ dx. \quad (34)$$

Observemos agora que, pela desigualdade de Holder, pela hipótese (6) e pela desigualdade (23),

$$\int_\Omega \sigma(x)E \cdot A\ dx \leq \sigma_1 C_0||E||||\mu H|| \leq \\ \leq \frac{\mu\sigma_1^2 C_0^2}{4\kappa}||E||^2 + \kappa\mu||H||^2,$$

onde κ é um parâmetro pequeno que será fixado adiante. Temos também, graças à hipótese (6) e a identidade (30),

$$-\int_\Omega \sigma(x)|E|^2 dx \leq -\sigma_0||E||^2 \quad \text{e} \\ ||A_t||^2 \leq ||E||^2.$$

Segue então, de (34), que

$$\frac{dG(t)}{dt} \leq -\left(\frac{\sigma_0}{\epsilon} - \delta - \frac{\mu\sigma_1^2 C_0^2}{4\kappa\epsilon}\delta\right)\epsilon||E||^2 - \\ - \delta(1-\kappa)\mu||H||^2.$$

A constante $\kappa > 0$ será escolhida pequena de tal forma que

$$\kappa < \min\{1, \frac{1}{2\mu}\} \quad (35)$$

e $\delta > 0$ fixado suficientemente pequeno de modo que

$$\left[\frac{\sigma_0}{\epsilon} - \delta\left(1 + \frac{\mu\sigma_1^2 C_0^2}{4\kappa\epsilon}\right)\right] > 0 \quad \text{e} \quad \frac{C_0^2\delta^2\epsilon}{2\kappa} < 1. \quad (36)$$

Com estas escolhas, obtemos

$$\frac{dG(t)}{dt} \leq -C_1\epsilon||E||^2 - C_1\mu||H||^2 = -2C_1\mathcal{E}(t), \quad \forall\ t > 0 \quad (37)$$

onde

$$C_1 := \min\left\{\left(\frac{\sigma_0}{\epsilon} - \delta - \frac{\mu\sigma_1^2 C_0^2}{4\kappa\epsilon}\delta\right), \delta(1-\kappa)\right\} > 0.$$

Nosso próximo passo é mostrar a equivalência entre $G(t)$ e $\mathcal{E}(t)$. Com efeito, temos

$$|G(t) - \mathcal{E}(t)| = \delta|F(t)| \leq \delta\epsilon||E||||A|| \leq C_0\delta\epsilon||E||||\mu H||,$$

onde usamos a Desigualdade de Holder e a desigualdade (23). Assim, pela desigualdade de Young,

$$|G(t) - \mathcal{E}(t)| \leq \frac{C_0^2\delta^2\epsilon^2}{4\kappa}||E||^2 + \kappa||\mu H||^2$$

e, portanto,

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{C_0^2\delta^2\epsilon}{2\kappa}\right)\epsilon||E||^2 + \frac{1}{2}(1-2\kappa\mu)\mu||H||^2 \leq G(t) \leq \\ \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{C_0^2\delta^2\epsilon}{2\kappa}\right)\epsilon||E||^2 + \frac{1}{2}(1+2\kappa\mu)\mu||H||^2.$$

Das escolhas (35) e (36) para os parâmetros κ e δ vemos que

$$\left(1 - \frac{C_0^2\delta^2\epsilon}{2\kappa}\right) > 0 \quad \text{e} \quad (1-2\kappa\mu) > 0$$

e, portanto,

$$C_2\mathcal{E}(t) \leq G(t) \leq C_3\mathcal{E}(t), \quad (38)$$

com

$$C_2 := \min\left\{\left(1 - \frac{C_0^2\delta^2\epsilon}{2\kappa}\right), (1-2\kappa\mu)\right\} > 0$$

e

$$C_3 := \max\left\{\left(1 + \frac{C_0^2\delta^2\epsilon}{2\kappa}\right), (1+2\kappa\mu)\right\} > 0.$$

De (37) e (38) obtemos a desigualdade diferencial

$$\frac{dG(t)}{dt} \leq -\frac{2C_1}{C_3}G(t),$$

da qual se obtem

$$G(t) \leq G(0)\exp(-\frac{2C_1}{C_3}t), \quad \forall\ t > 0.$$

Combinando a desigualdade acima novamente com (38) concluimos, finalmente, que

$$\mathcal{E}(t) \leq \frac{C_3}{C_2}\mathcal{E}(0)\exp(-\frac{2C_1}{C_3}t), \quad \forall\ t > 0,$$

que é justamente (27) com $\alpha = \frac{C_3}{C_2}$ e $\beta = \frac{2C_1}{C_3}$. ∎

%toprule

5 Conclusões

O resultado principal apresentado neste artigo é com relação à estabilização da solução do sistema (1)-(5). Como vimos, foi de fundamental importancia a decomposição ortogonal do campo eletromagnético, haja visto que desta decomposição saiu o multiplicador adequado para a perturbação da energia do sistema e consequente estabilização da mesma.

Outros modelos mais avançados, envolvendo as equações de Maxwell, também podem ser estudados utilizando esta mesma técnica. Por exemplo, é um problema ainda a ser estudado o comportamento da energia do sistema quando a condutividade elétrica σ depende não-linearmentre de $|E|$. Uma perspectiva futura é o estudo de sistemas acoplados não-lineares mais gerais, como os de elasto-eletromagnetismo e o de eletromagnetismo sob efeitos térmicos.

Agradecimentos

Referências

Adams, R. A., 1975. Sobolev Spaces. Academic Press.

Alves, M. T., 2012. Espaços funcionais e operadores lineares em eletromagnetismo. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Maria.

Arend, G. B. G., 2012. Existência e comportamento assintótico das soluções de um sistema em eletromagnetismo. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Maria.

Brezis, H., 2010. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer.

Dautray, R., Lions, J. L., 1990. Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 3. Springer-Verlag.

Ferreira, M. V., Menzala, G. P., 2007. Uniform stabilization of an electromagnetic-elasticity problem in exterior domains. Discrete and Continuous Dynamical Systems 18 (4), 719–746.

Girault, V., Raviart, P., 1986. Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms. Springer-Verlag.

Landau, L. V., Lifshitz, E. M., 1960. Electrodynamics of Continuous Media. Pergamon.

Nicaise, S., 2000. Exact boundary controllability of maxwell's equations in heterogeneous media and an application to an inverse source problem. SIAM J. Control Optim. 38 (4), 1145–1170.

Nicaise, S., Pignotti, C., 2005. Internal stabilization of maxwell's equations in heterogeneous media. Abstract and Applied Analysis 7, 791–811.

Pazy, A., 1983. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Springer-Verlag, New York.

Phung, K., 2000. Contrôle et stabilisation d'ondes électromagnétiques. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations 5, 87–137.

Yin, H. M., 1999. On a singular limit problem for nonlinear maxwell's equations. J. Differential Equations 156, 355–375.

Yin, H. M., 2006. Existence and regularity of a weak solution to maxwell's equations with a thermal effect. Math. Meth. Appl. Sci. 29, 1199–1213.