Artigo Original *DOI:10.5902/2179460X14630*

Ciência e Natura, Santa Maria, v. 37 Ed. Especial PROFMAT, 2015, p. 390–400
Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas - UFSM
ISSN impressa: 0100-8307 ISSN on-line: 2179-460X

CIÊNCIA e NATURA 35 anos

Fórmulas resolutivas da equação quadrática e da equação cúbica sobre os quatérnios de Hamilton

Formulas for quadratic and cubic equations over Hamilton quaternions

Ronie Peterson Dario

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
ronie@utfpr.edu.br

Gustavo Sanches Dalaz

dida.sanches@hotmail.com

José Roberto Freitas

betojrf2000@yahoo.com.br

Resumo

Neste trabalho estudamos a resolubilidade de equações quadráticas e de equações cúbicas sobre os quatérnios de Hamilton. Para o caso quadrático, essencialmente reapresentamos mais adequadamente resultados já conhecidos. Para a equação cúbica com coeficientes reais desenvolvemos completamente a Fórmula de Cardano para uma raiz qualquer da equação. Resolvemos também a equação cúbica geral, admitindo uma certa condição sobre os coeficientes.

Palavras-chave: *equação quadrática, quatérnios, equação cúbica.*

Abstract

We study the resolubility in the Hamilton's quaternions of quadratic and cubic equations. For the quadratic case, essentially we present more properly known results. We completely developed the Cardano's Formula for the cubic equation with real coefficients. We also present the solution of the general cubic equation, under a hypothesis on the coefficients.

Keywords: *quatric equation, quaternions, cubic equation.*

submissão: 2014-06-30 Aceito: 2014-11-20

1 Introdução

Um fato pouco conhecido é que a clássica equação quadrática

$$ax^2 + bx + c = 0, \; a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ com } a \neq 0,$$

pode admitir uma quantidade infinita de raízes. Ivan Niven [1] verificou isso no trabalho (NIVEN, 1941), no qual apresentou a resolução de equações polinomiais sobre um conjunto contendo propriamente os números complexos: os quatérnios de Hamilton, ou simplesmente **quatérnios**. A solução de Niven para o caso da equação quadrática foi posteriormente detalhada em (HUANG, 2002).

Neste trabalho faremos uma apresentação de parte desses resultados de maneira mais direta e utilizando a resolubilidade por radicais, seguindo assim a teoria clássica das equações algébricas. Cremos que isso torna o assunto mais acessível e interessante ao professor de matemática do ensino fundamental e médio.

No primeiro resultado (Teorema 1 da Seção 3) apresentamos a versão da fórmula quadrática (fórmula de Bhaskara) para o caso da equação quadrática, admitindo coeficientes reais e raízes quatérnias.

Na quarta seção abordamos a equação cúbica

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R},$$

nos quatérnios, para a qual obtivemos os nossos principais resultados. Lembramos que as raízes da equação cúbica reduzida

$$y^3 + py + q = 0$$

podem ser obtidas utilizando-se a Fórmula de Cardano

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}},$$

conforme veremos na quarta seção.

Obtivemos a correspondente Fórmula de Cardano nos quatérnios (Teorema 3 da Seção 4), resolvendo a equação cúbica com coeficientes reais. Na última seção do trabalho resolvemos parcialmente a equação cúbica com coeficientes quatérnios, que é uma versão mais geral do problema. Vale ressaltar que ainda não há uma fórmula resolutiva para a equação cúbica geral nos quatérnios. Uma solução parcial pode ser vista no Lema 5.1 de (CHAPMAN, 2014). Um método computacional para calcular as raízes foi obtido em (JANOVSKÁ D.; OPFER, 2010).

Uma exposição detalhada dos quatérnios é feita na próxima seção. Contudo, consideramos que é apropriado concluir esta introdução com um exemplo motivatório que ilustra a primeira afirmação do trabalho, sobre a possibilidade de existirem infinitas raízes. Adicionalmente, o sentido geométrico do exemplo auxilia no entendimento dos quatérnios como extensão natural dos complexos.

Além de $i = \sqrt{-1}$, nos quatérnios existem outras duas unidades imaginárias, denotadas por j e k. Assim,

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

Esses elementos relacionam-se pelas regras básicas

$$ij = -ji = k.$$

Intuitivamente, podemos associá-los aos três eixos do espaço euclidiano tridimensional e observar que as últimas relações são iguais as do produto vetorial.

Assumiremos agora que combinações do tipo $x = ai + bj + bk$, com $a, \; b, \; c \in \mathbb{R}$, podem ser somadas coeficiente a coeficiente e multiplicadas distributivamente de maneira análoga às operações nos números complexos. Assim, utilizando as relações acima, obtemos

$$x^2 = (ai + bj + bk)(ai + bj + bk) = -(a^2 + b^2 + c^2).$$

[1] O matemático Ivan Morton Niven (1915-1999) foi professor da faculdade de Oregon nos Estados Unidos, atuando em teoria dos números. Entre 1983 e 1984, foi presidente da Mathematical Association of America (MAA), entidade com objetivo de melhorar o ensino de

Note então que se o ponto $(a,\ b,\ c)$ do espaço tridimensional estiver na esfera unitária de raio 1 centrada na origem, isto é, se $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, então teremos $x^2 = -1$, para todo x desta forma. Portanto, a equação

$$x^2 + 1 = 0$$

possui uma raiz para cada ponto da esfera. Raízes desta forma podem ser relacionadas por conjugação e uma classe desta relação é chamada em (JANOVSKÁ D.; OPFER, 2010) de raíz esférica.

Um quatérnio é uma combinação linear do tipo

$$x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k,$$

onde $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ e $i,\ j$ e k são tais como exposto acima. Assim, os pontos do espaço tridimensional correspondem aos quatérnios que tem a primeira componente nula. Representando por $\mathbb{H}$ o conjunto de todos os quatérnios, podemos ainda assumir as inclusões naturais $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{H}$, sendo que na segunda seta temos a identificação $a + bi \mapsto a + bi + 0j + 0k$.

Iniciamos a próxima seção com uma introdução sobre os quatérnios e algumas de suas propriedades básicas.

2 Os quatérnios e suas propriedades

Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) descobriu os quatérnios em meados do século XIX. Seu objetivo era encontrar uma representação no espaço tridimensional semelhante à dos números complexos no plano, e que mantivesse as propriedades algébricas. Especificamente, a definição do produto de duas triplas deveria respeitar a lei dos módulos, isto é, $|xy| = |x|\,|y|$, para todos x e y.

Inicialmente, Hamilton pensou em uma representação do tipo $x_0 + x_1 i + x_2 j$, com $x_0,\ x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$. Surgiu então o problema de identificar o produto ij. Suas primeiras tentativas incluíam admitir $ij = 1$, $ij = -1$ e $ij = 0$, mas em todos os casos não valia a lei dos módulos. Hamilton resolveu o problema quando definiu o produto $ij = -ji$, não comutativo. A partir dessa suposição chegou finalmente a conclusão de que seria necessário um terceiro símbolo imaginário k, de natureza diferente de i e j, respeitando as propriedades

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \text{ e } ij = -ji = k. \tag{1}$$

Assim, trabalhando em dimensão 4, a lei dos módulos é finalmente verificada.

Para a álgebra, a descoberta foi uma contribuição fundamental, pois tratou-se do primeiro exemplo de uma estrutura algébrica em que valem todos os axiomas da definição de corpo, exceto a comutatividade da multiplicação. Posteriormente, a teoria foi aplicada às mais diversas áreas.

Formalmente, o conjunto $\mathbb{H}$ dos quatérnios consiste de todas as combinações lineares dos elementos 1, i, j e k com coeficientes no corpo dos reais, para as quais valem as relações em (1). Assim,

$$\mathbb{H} = \{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Um **quatérnio puro** é um elemento de $\mathbb{H}$ em que $a_0 = 0$ e pelo menos um dos coeficientes a_1, a_2, a_3 não é zero. Dados dois quatérnios

$$u = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \;\text{ e }\; v = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

vejamos como eles podem ser somados e multiplicados.

A **adição** é definida somando os coeficientes:

$$u + v = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k.$$

Diretamente verifica-se que a adição é comutativa, associativa e admite elemento neutro $0 = 0 + 0i + 0j + 0k$. O oposto de $u = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ é definido trocando a_i por $-a_i$, onde $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

A **multiplicação** é definida de forma distributiva, através das regras básicas (1) e assumindo a comutatividade dos coeficientes com os símbolos i, j e k. Assim,

$$uv = c_0 + c_1 i + c_2 j + c_3 k, \text{ onde}$$

- $c_0 = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$;
- $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2$;
- $c_2 = a_0 b_2 - a_1 b_3 + a_2 b_0 + a_3 b_1$;
- $c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0$.

A multiplicação é associativa, distributiva (à direita e à esquerda) em relação à adição e admite elemento neutro $1 = 1 + 0i + 0j + 0k$. A verificação é direta, porém trabalhosa. Cada quatérnio não nulo admite inverso, que definiremos na sequência. Utilizaremos a frente a descrição do quadrado

$$u^2 = {a_0}^2 - {a_1}^2 - {a_2}^2 - {a_3}^2 + 2a_0(a_1 i + a_2 j + a_3 k), \quad (2)$$

que é obtida diretamente da definição da multiplicação.

Vamos agora estudar as propriedades da conjugação, da norma e do traço de quatérnios.

O **conjugado** de u é definido como

$$\overline{u} = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k.$$

São propriedades imediatas da conjugação: $\overline{u+v} = \overline{u} + \overline{v}$, $\overline{uv} = \overline{v}\,\overline{u}$ e $\overline{\overline{u}} = u$, para todos $u,v \in \mathbb{H}$.

A **norma** do quatérnio u é definida como o número

$$\mathrm{n}(u) = u\overline{u} = \overline{u}u = {a_0}^2 + {a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2.$$

Segue imediatamente que $\mathrm{n}(u) \geq 0$ e $\mathrm{n}(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$. A norma também é multiplicativa, isto é,

$$\mathrm{n}(uv) = \mathrm{n}(u)\mathrm{n}(v), \text{ para todos } u,v \in \mathbb{H}.$$

De fato, $\mathrm{n}(uv) = (uv)(\overline{uv}) = (uv)(\overline{v}\,\overline{u}) = u(v\overline{v})\overline{u} = (u\overline{u})(v\overline{v}) = \mathrm{n}(u)\mathrm{n}(v)$.

O **traço** de u é o número real dado por $\mathrm{tr}(u) = u + \overline{u} = 2a_0$. Um quatérnio só tem traço nulo se for igual a zero, ou se for um quatérnio puro. O traço é uma transformação linear de $\mathbb{H}$ em $\mathbb{R}$, isto é, $\mathrm{tr}(\lambda u + v) = \lambda \mathrm{tr}(u) + \mathrm{tr}(v)$, para todos $u, v \in \mathbb{H}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Das definições de traço e norma, segue que todo quatérnio u satisfaz a equação

$$x^2 - \mathrm{tr}(u)x + \mathrm{n}(u) = 0, \quad (3)$$

que nos será particularmente útil neste trabalho.

Para concluir veremos que todo quatérnio não nulo possui inverso, o que faz de $\mathbb{H}$ um anel de divisão. O **inverso** do quatérnio não-nulo u é definido como $u^{-1} = \dfrac{\overline{u}}{\mathrm{n}(u)}$. Com esta definição tem-se $uu^{-1} = u^{-1}u = 1$. De fato, $uu^{-1} = u\overline{u}(u\overline{u})^{-1} = u\overline{u}(\overline{u})^{-1}u^{-1} = 1$. Pelas propriedades da conjugação segue que $\overline{u^{-1}} = (\overline{u})^{-1}$.

3 Resolvendo a equação quadrática

Nesta seção apresentamos uma versão da fórmula quadrática para os quatérnios, utilizando as ideias da Seção 4 do trabalho de Niven (NIVEN, 1941).

No Teorema 1 mostramos que quando o discriminante da equação é positivo ou nulo, ocorre o mesmo que o caso real, isto é, há duas raízes reais que coincidem somente quando o discriminante é nulo. Na segunda possibilidade, quando o discriminante é negativo, há uma mudança essencial: a equação tem infinitas soluções nos quatérnios.

Teorema 1 (Fórmula Quadrática nos Quatérnios)**.** *Denotando $\Delta = b^2 - 4ac$, as raízes quatérnias da equação*

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R}, \ a \neq 0, \quad (4)$$

são obtidas pela fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta - 4a^2({\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2)}}{2a} + \alpha_1 j + \alpha_2 k, \quad (5)$$

onde α_1 e α_2 são quaisquer dois números reais tais que:

(1) $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \leq -\frac{\Delta}{4a^2}$, *quando* $\Delta < 0$.

(2) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, *quando* $\Delta \geq 0$.

Antes de demonstrarmos, cabe observar que:

- Se $\Delta \geq 0$, então $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e há somente duas raízes reais (coincidentes quando $\Delta = 0$) dadas pela fórmula clássica:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Se $\Delta < 0$, então as raízes são todos os quatérnios da forma:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \left(\frac{\sqrt{|\Delta| - 4a^2({\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2)}}{2a} \right) i + \alpha_1 j + \alpha_2 k,$$

onde $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \leq -\frac{\Delta}{4a^2}$. Neste caso, quando $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, tem-se as duas raízes complexas.

Demonstração: Completando quadrados, temos

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0.$$

Como a é não nulo, podemos fazer a substituição $y = x + \frac{b}{2a}$ e restringir o problema à equação $y^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$.

Depois de resolvê-la, desfaremos a mudança. Como buscamos raízes nos quatérnios, temos que existem y_0, y_1, y_2, $y_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$y = y_0 + y_1 i + y_2 j + y_3 k.$$

Pela Equação 2, o quadrado de y é

$${y_0}^2 - {y_1}^2 - {y_2}^2 - {y_3}^2 + 2(y_0 y_1 i + y_0 y_2 j + y_0 y_3 k).$$

Assim, como $y^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \in \mathbb{R}$, podemos concluir que

$${y_0}^2 - {y_1}^2 - {y_2}^2 - {y_3}^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \text{ e } y_0 y_1 = y_0 y_2 = y_0 y_3 = 0.$$

Se $\Delta > 0$, então da primeira igualdade temos $y_0 \neq 0$. Da segunda igualdade segue que $y_1 = y_2 = y_3 = 0$. Assim, as soluções são $y = y_0 = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$. No caso $\Delta = 0$, temos apenas uma solução $y = 0$. Portanto, as soluções da Equação 4, para $\Delta \geq 0$, são

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Assumindo $\Delta < 0$ obtemos ${y_0}^2 < {y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2$. Desse fato e da igualdade $y_0 y_1 = y_0 y_2 = y_0 y_3 = 0$ segue que $y_0 = 0$. Assim, ${y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2 = -\frac{\Delta}{4a^2}$. Portanto, temos que as raízes são todos os quatérnios da forma

$$x = y_1 i + y_2 j + y_3 k - \frac{b}{2a}$$

onde y_1, y_2 e y_3 satisfazem a igualdade

$${y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2 = -\frac{\Delta}{4a^2}. \tag{6}$$

Basta agora isolar y_1 e substituir na expressão de x para obter a fórmula para o caso $\Delta < 0$, renomeando $y_2 = \alpha_1$ e $y_3 = \alpha_3$. Juntando os dois casos, obtemos a fórmula 5. □

Vejamos o exemplo da equação quadrática $x^2 - 6x + 10 = 0$. Temos $\Delta = -4 < 0$. Do Teorema 1, as raízes são os quatérnios

$$x = 3 \pm i\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2} + \alpha_1 j + \alpha_2 k,$$

para quaisquer números reais α_1, α_2 tais que $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \leq 1$. Note que se $\alpha_0 = \pm\sqrt{1 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}$, então $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$. Assim, para cada ponto da esfera unitária de centro na origem existe uma solução da equação (veja a Equação

6). Em particular, uma das soluções é obtida com $y_1 = y_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$ e $y_3 = 0$, que resulta no quatérnio

$$x = 3 + \sqrt{\frac{1}{2}}i + \sqrt{\frac{1}{2}}j.$$

Também, raízes complexas $3 \pm i$ verificam a igualdade ${\alpha_0}^2 + {\alpha_1}^2 + {\alpha_3}^2 = 1$, com $\alpha_0 = \pm 1$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

4 Resolvendo a equação cúbica

Como citamos na introdução, a equação cúbica clássica

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R},$$

é reduzida à equação

$$y^3 + py + q = 0. \tag{7}$$

por meio da mudança de variável $x = y - \frac{a}{3}$, donde obtêm-se que uma raiz é determinada pela Fórmula de Cardano:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}. \tag{8}$$

Os cálculos omitidos podem ser vistos na Seção 2, Cap. 5 de (HEFEZ A.; VILLELA, 2012).

Nosso objetivo nesta seção é obter uma fórmula análoga admitindo que as raízes da Equação 7 podem ser quatérnias. Isto é feito no Teorema 3. Para isso precisamos antes estudar as raízes reais e complexas da Equação 7.

A Fórmula 8 pode ser escrita como

$$y_1 = \sqrt[3]{Q + R} + \sqrt[3]{Q - R}, \tag{9}$$

$$R = \sqrt{P^3 + Q^2}, \quad Q = -\frac{q}{2}, \quad \text{e} \quad P = \frac{p}{3}.$$

As outras duas raízes da Equação 7 são

$$y_2 = \omega \sqrt[3]{Q + R} + \omega^2 \sqrt[3]{Q - R} \tag{10}$$

$$y_3 = \omega^2 \sqrt[3]{Q + R} + \omega \sqrt[3]{Q - R} \tag{11}$$

onde

$$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

é uma raiz cúbica primitiva da unidade e $\omega^2 = \overline{\omega}$. A demonstração de que y_1, y_2 e y_3 são de fato as raízes da Equação 7 pode ser vista em (HEFEZ A.; VILLELA, 2012). Substituindo ω nas expressões 10 e 11 obtemos

$$y_2 = -\frac{1}{2}(S + T) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(S - T) \tag{12}$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}(S + T) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(S - T) \tag{13}$$

onde $S = \sqrt[3]{Q + R}$ e $T = \sqrt[3]{Q - R}$.

Agora precisamos determinar a natureza das raízes da Equação 7 em função discriminante $D = P^3 + Q^2$. Mesmo quando ele for negativo, veremos na demonstração do Teorema 2 que podemos escolher, por meio da fórmula (8), uma raiz real.

Teorema 2. *Seja D o discriminante definido anteriormente. A Equação 7 possui*

(1) *A raiz real y_1, dada pela expressão 9, e duas raízes complexas y_2 e y_3 das expressões 10 e 11, se $D > 0$;*

(2) *Três raízes reais, se $D \leq 0$. Neste caso, y_2 e y_3 também são reais.*

Demonstração: Se $D > 0$, então $R = \sqrt{D}$ é real. Consequentemente, S e T também são reais e distintos. Segue que as raízes y_2 e y_3 são complexas não reais e conjugadas. Isto conclui a demonstração da afirmação 1. Supondo $D = 0$, decorre de 9 que uma raiz (real) é $2\sqrt[3]{Q}$. De 12 e 13 segue que as outras duas raízes são (também reais) $y_2 = y_3 = -\sqrt[3]{Q}$, pois $S = T$. Vamos agora assumir $D < 0$. Com S e T já defindos, temos

$$S^3 = Q + i\sqrt{|D|} = \overline{Q - i\sqrt{|D|}} = \overline{T^3} = \overline{T}^3.$$

Sendo $\sqrt[3]{Q+i\sqrt{|D|}} = \gamma_1 + i\gamma_2$, temos $\sqrt[3]{Q-i\sqrt{|D|}} = \gamma_1 - i\gamma_2$. Assim, $S = \overline{T}$ e $y_1 = S+T = \overline{T}+T$ fica igual à parte real de T multiplicada por 2. Portanto, $y_1 \in \mathbb{R}$. Substituindo $S = \overline{T}$ em 12 e 13 temos que y_2 e y_3 também são reais.

□

Podemos agora demonstrar o resultado principal da seção, que generaliza diretamente o Teorema 2 para os quatérnios. Na demonstração utilizaremos os conceitos e propriedades de norma e traço introduzidos na segunda seção.

Teorema 3 (Fórmula de Cardano nos Quatérnios)**.** *Mantendo a notação para $D = P^3 + Q^2$, tem-se:*

(1) *Se $D > 0$, então as raízes da Equação 7 em $\mathbb{H}$ são todos os quatérnios da forma*

$$y = -\frac{1}{2}y_1 \pm \left(\sqrt{-\frac{q}{y_1} - \frac{y_1^2}{4} - (\alpha_1^2+\alpha_2^2)}\right) i + \alpha_1 j + \alpha_2 k$$

onde

- $y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}$,

- α_1, α_2 *são quaisquer dois números reais tais que*

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2 \leq \frac{-4q-y_1^3}{4y_1}.$$

Em particular, se $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, então a primeira expressão produz as duas raízes complexas conjugadas descritas nas expressões 12 e 13.

(2) *Se $D \leq 0$, então a Equação 7 admite somente as três raízes reais descritas no Teorema 2.*

Demonstração: Seja $y_0 \in \mathbb{H}$ uma raíz de $y^3+py+q=0$ e sejam n e t a norma e o traço de y_0, respetivamente. Podemos assumir $y_0 \neq 0$. Caso contrário, a equação reduz-se à equação quadrática. Temos assim $n > 0$. Dividindo y^3+py+q por y^2-ty+n, temos

$$y^3+py+q = (y+t)(y^2-ty+n)+y(t^2+p-n)+q-nt. \quad (14)$$

Substituindo-se $y = y_0$, temos que

$$y_0(t^2+p-n) = nt-q. \quad (15)$$

Afirmação: Se $nt = q$, então $D > 0$.
Demonstração da Afirmação: Primeiramente, note que

$$D > 0 \Leftrightarrow 4p^3+27q^2 > 0.$$

Ainda, $nt = q$ implica $p = n-t^2$. Substituindo na última expressão, temos

$$\begin{aligned} 4p^3+27q^2 &= 4(n-t^2)^3+27(nt)^2. \\ &= 4n^3+15n^2t^2+12nt^4-4t^6. \end{aligned}$$

Seja α_0 a parte real de y_0. Lembre que $0 < n = \alpha_0^2 +$ (soma de três quadrados) e $t = 2\alpha_0$. Segue que $12nt^4 - 4t^6$ é um termo positivo somado com $12(\alpha_0)^2(2\alpha_0)^4 - 4(2\alpha_0)^6 = 16\alpha_0^6 \geq 0$. Logo $4p^3+27q^2 > 0$, concluindo a demonstração da afirmação.

Segue da *Afirmação* que se $D \leq 0$, então $nt \neq q$. Assim, da Equação 15, temos que $y_0 \in \mathbb{R}$, já que p e q também são números reais. Portanto, temos que a Equação 7 somente admite raizes reais, já descritas no Teorema 2. Agora assumiremos $D > 0$. Poderia ainda ocorrer $nt \neq q$, caso em que a Equação 15 produz uma raiz real para a Equação 7, o que está em acordo com o Teorema 2. Podemos então finalmente assumir $D > 0$ e $nt = q$. Segue que $t^2+p-n = 0$. Obtemos assim que t e n devem satisfazer

$$t^3+pt-q = 0, \text{ com } q = nt.$$

Note que para esta equação cúbica temos o mesmo $D > 0$. Do Teorema 2, só há uma raíz real dada por

$$t = 2\alpha_0 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}.$$

Lembre que α_0 é a parte real de y_0. Tomemos $\beta, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que $y_0 = \alpha_0 + \beta i + \alpha_1 j + \alpha_2 k$ e vamos agora determinar β. Temos $q = nt = 2(\alpha_0)(\alpha_0^2 + \beta^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2)$

$$\Rightarrow \beta = \pm\sqrt{\frac{q}{2\alpha_0} - (\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2)}.$$

Substituindo $\alpha_0 = -\frac{1}{2}y_1$, obtemos o coeficiente de i para a raiz. Juntando todas as informações, obtemos a expressão para y como enunciada no teorema. Como o coeficiente de i tem que ser real, devemos ter $-\frac{q}{y_1} - \frac{1}{4}y_1^2 - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \geq 0$, ou seja, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \leq \frac{-4q - y_1^3}{4y_1}$. Para a última afirmação da primeira parte do teorema, assumindo $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ na fórmula para a raiz y, obtemos

$$\begin{aligned} p &= -3\sqrt[3]{Q^2 - R^2} \\ \Rightarrow -6\sqrt[3]{(Q-R)(Q+R)} &= 6\sqrt[3]{Q+R}\sqrt[3]{Q-R} + 4p \\ \Rightarrow \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{Q+R} - \sqrt[3]{Q-R}\right)^2 &= \frac{1}{4}(3y_1^2 + 4p). \end{aligned}$$

Note que o lado direito da última expressão é o quadrado do coeficiente de i em na fórmula do item (1) do teorema tomando-se $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ (o número β na demonstração do Teorema 8). Já o lado esquerdo é o quadrado da parte imaginária das raízes descritas em 12 e 13. Diretamente verifica-se que as partes reais também coincidem, o que conclui a demonstração. □

Como exemplo, consideremos a equação

$$x^3 + 3x^2 - 6x + 20 = 0. \tag{16}$$

Utilizando a substituição $x = y - 1$, obtemos a equação

$$y^3 - 9y + 28 = 0. \tag{17}$$

Aqui, $p = -9$ e $q = 28$. Portanto $D = 169 > 0$. Pelo Teorema 3, existem soluções quatérnias não reais. Pela Fórmula de Cardano, temos

$$y_1 = \sqrt[3]{-14 + \sqrt{169}} + \sqrt[3]{-14 - \sqrt{169}} = -4,$$

que é uma raiz real da Equação 17. Com isso, o coeficiente de i na fórmula da parte (1) do Teorema 3 é $\pm\sqrt{3 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}$, com $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, tais que $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \leq 3$. Logo, as raízes da Equação 17 são todos quatérnios

$$y = 2 \pm i\sqrt{3 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2} + \alpha_1 j + \alpha_2 k,$$

para os quais $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \leq 3$. Assim, as raízes da Equação 16 são

$$x = 1 \pm i\sqrt{3 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2} + \alpha_1 j + \alpha_2 k,$$

com a mesma condição sobre α_1 e α_2. Entre as raízes estão os números $1 + i + j + k$ e $1 + \sqrt{3}j$ e as duas raízes complexas $1 \pm \sqrt{3}i$, que correspondem a $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Podemos também aplicar o Teorema 3 para obter as raízes cúbicas da unidade nos quatérnios, isto é, encontrar as raízes da equação $x^3 - 1 = 0$. A raiz real é $y_1 = 1$ e $D = 1 > 0$. Pela fórmula do Teorema 3, obtemos

$$y = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{3}{4} - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} + \alpha_1 j + \alpha_2 k,$$

com $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \leq \frac{3}{4}$. Em particular, as raízes cúbicas primitivas da unidade (ω e $\overline{\omega}$, após a Equação 11) são obtidas com $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

5 Resolvendo a equação cúbica geral

Os problemas que tratamos nas seções anteriores são casos particulares do problema de determinar as raízes quatérnias da equação algébrica

$$x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_0 = 0,\ a_0, a_1, ..., a_{m-1} \in \mathbb{H}. \tag{18}$$

em termos de operações envolvendo seus coeficientes.

Em especial, estudamos os casos $m = 2$ e $m = 3$ com $a_i \in \mathbb{R}$, para todo $1 \leq i \leq m$. Como os coeficientes agora podem ser quatérnios não reais e não há comutatividade da multiplicação nos quatérnios, uma equação algébrica poderia ter termos do tipo $axbxcxd$. Assim, a Equação 18 também é um caso particular (porém, o mais conhecido e estudado) de equações sobre os quatérnios. Na equação 18 admite-se $ax = xa$, para todo $a \in \mathbb{H}$.

No Teorema 1 de (NIVEN I.; EILENBERG, 1944) foi demonstrado que a equação acima sempre admite raízes nos quatérnios. Esse resultado pode ser visto como uma versão do Teorema Fundamental da Álgebra para os quatérnios.

Em (NIVEN, 1941), Niven desenvolveu um método geral para resolver a Equação 18. Essencialmente o método transfere o problema para resolver equações cujos incógnitas são o traço e a norma das raízes. Tais equações são obtidas pela divisão euclidiana do lado esquerdo da Equação 18 pelo lado esquerdo da Equação 3.

Como já citamos, por esse método a equação quadrática com coeficientes quatérnios foi primeiro resolvida por Niven no mesmo trabalho e detalhada depois em (HUANG, 2002). No trabalho (DARIO R.; FREITAS, 2013) há uma exposição completa da resolução da equação quadrática nos quatérnios, tanto com coeficientes reais, quanto quatérnios em geral.

Nesta seção estudaremos o método de Niven e o aplicaremos para o caso da equação cúbica com coeficientes quatérnios. Cabe observar que a solução que expomos no Teorema 3 serve apenas para coeficientes reais. O resultado principal desta seção é o Teorema 5. Além do método de Niven, utilizamos um resultado recentemente obtido em (CHAPMAN, 2014) para obter uma solução parcial para o problema.

Para entendermos o método de Niven, iniciamos fixando uma raiz x_0 da Equação 18. Sejam $\mathrm{tr}(x_0) = t$ e $\mathrm{n}(x_0) = n$, traço e norma de x_0, respectivamente. Pela Equação 3, temos que x_0 é uma raiz de

$$x^2 - tx + n = 0.$$

Vamos utilizar a divisão euclidiana para polinômios com coeficientes quatérnios conforme definida em (ORE, 1933, p.483). Seja $p(x)$ o polinômio do lado esquerdo da Equação 18. Dividindo-o pelo lado esquerdo da última equação,

$$p(x) = q(x)(x^2 - tx + n) + \alpha x + \beta, \tag{19}$$

onde α e β são funções de t e n envolvendo os coeficientes de $p(x)$.

Teorema 4 (Método de Niven)**.** *Com a notação acima e assumindo $\alpha \neq 0$, as raízes da Equação 18 são da forma*

$$x_0 = -\frac{\beta}{\alpha}, \tag{20}$$

Utilizando a definição de norma e traço, temos:

$$n = \overline{x_0}x_0 = \left(-\frac{\overline{\beta}\alpha}{\overline{\alpha}\alpha}\right)\left(-\frac{\overline{\alpha}\beta}{\overline{\alpha}\alpha}\right) = \frac{\overline{\beta}\beta}{\overline{\alpha}\alpha},$$
$$t = x_0 + \overline{x_0} = -\frac{\overline{\alpha}\beta}{\overline{\alpha}\alpha} + \left(-\frac{\overline{\beta}\alpha}{\overline{\alpha}\alpha}\right) = -\frac{\overline{\alpha}\beta + \overline{\beta}\alpha}{\overline{\alpha}\alpha},$$

e assim decorrem as equações do sistema enunciado. □

Consideremos agora a equação cúbica

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{H}. \tag{21}$$

Primeiramente, podemos considerar $\mathrm{tr}(a) = 0$. Caso contrário, fazemos a substituição $x = y - \frac{1}{6}\mathrm{tr}(a)$ e reescrevemos a equação de forma que o novo coeficiente do termo quadrático tenha traço nulo. Vamos agora definir $\mathrm{tr}(b) = B$, $\mathrm{tr}(c) = C$, $\mathrm{n}(a) = D$, $\mathrm{n}(b) = E$, $\mathrm{n}(c) = F$, $\overline{b}a + \overline{a}b = G$, $\overline{c}a + \overline{a}c = H$ e $\overline{b}c + \overline{c}b = I$. Cabe observar que são todos números reais.

Teorema 5. *Mantendo a notação anterior, se $G + C = 0$, então uma raiz para a Equação 21 é dada por*

$$x_0 = \frac{ay - c}{b - y},$$

onde $y \neq b$ é uma raiz real da equação cúbica

$$y^3 + (-B - D)y^2 + (E + H)y - F = 0.$$

Além disso, se $z \neq x_0$ é raiz da Equação 21, então

$$z^2 - (a + \ell)z + \ell a = 0,$$

para alguma raiz ℓ do polinômio quadrático $p(x)$ tal que

$$x^3 + ax^2 + bx + c = p(x)(x - x_0).$$

Demonstração: Fixando uma raiz x_0 da Equação 21 e utilizando o método de Niven teremos, neste caso,

$$\alpha = b - n + at + t^2 \text{ e } \beta = c - an - nt.$$

Utilizando estes valores no sistema de equações do Teorema 4, obtemos

- $n\overline{\alpha}\alpha - \overline{\beta}\beta = n^3 + (-B - 3t^2 - D)n^2 + \Lambda_1 n - F = 0,$
- $t\overline{\alpha}\alpha + \overline{\alpha}\beta + \overline{\beta}\alpha = 3tn^2 - \Lambda_2 n + \Lambda_3 = 0$, onde

$$\begin{cases} \Lambda_1 = t^4 + (B + D)t^2 + (G + C)t + E + H, \\ \Lambda_2 = 4t^3 + 2(B + D)t + G + C, \\ \Lambda_3 = t^5 + (B + D)t^3 + (G + C)t^2 + (E + H)t + I. \end{cases}$$

Em particular, para $t = 0$, temos

- $n^3 + (-B - D)n^2 + (E + H)n - F = 0,$
- $-(G + C)n + I = 0.$

Por hipótese, $G + C = 0$. Assim, a segunda equação acima não depende de n e podemos utilizar a Fórmula de Cardano para obter uma raiz real da primeira equação, ou seja, obter uma solução real para o sistema. A raiz será positiva, bastando para isso utilizar a Regra de Sinais de Descartes, conforme exposto na página 19 de (DARIO R.; FREITAS, 2013). Finalmente, fazendo $t = 0$ nas expressões de α e β e utilizando o Teorema 4, obtemos a primeira afirmação do teorema. Da primeira parte já demonstrada, temos que se $G + C = 0$, então a equação cúbica possui uma raíz com traço nulo, isto é, um quatérnio puro. Isto permite que utilizemos diretamente o Lema 5.1 de (CHAPMAN, 2014), para obter a parte final do nosso teorema. □

Como exemplo, vamos resolver a equação

$$x^3 + ix + \sqrt{2}j = 0.$$

Neste caso, encontramos

$$B = C = D = G = H = I = 0, E = 1 \text{ e } F = 2.$$

Logo, a equação na variável y do Teorema 5 fica simplesmente $y^3 + y - 2 = 0$, que possui $y = 1$ como única raiz real. Pelo Teorema 5, uma raiz de $x^3 + ix + \sqrt{2}j = 0$ é

$$x_0 = -\frac{\sqrt{2}j}{i - 1} = \frac{\sqrt{2}j - \sqrt{2}k}{2}.$$

Diretamente veficamos que

$$x^3 + ix + \sqrt{2}j = \Big(x^2 + x_0 x + (i - 1)\Big)(x - x_0).$$

Pelo exemplo da página 35 de (DARIO R.; FREITAS, 2013), temos que a equação quadrática $x^2 + x_0 x + (i - 1) = 0$ possui como raízes

$$x_{1,2} = \frac{2(1 + \sqrt{2} - i)}{\pm 2\sqrt{1 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{2}j + \sqrt{2}k}.$$

Novamente pelo Teorema 5, as raízes de $x^3 + ix + \sqrt{2}j = 0$, diferentes de x_0, satisfazem

$$z^2 - (a + x_{1,2})z + x_{1,2}a = 0.$$

Finalmente, seguindo o método exposto no Teorema 2.3 de (DARIO R.; FREITAS, 2013), podemos determinar todas as raízes.

Referências

CHAPMAN, A. **Pure imaginary roots of quaternion standard polynomials**. 2014. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1109.4967v4>. Acesso em: 10 de outubro de 2014.

DARIO R.; FREITAS, J. R. **Equações algébricas nos quatérnios de Hamilton**. Dissertação (Mestrado) — PROFMAT-UTFPR, 2013. Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/594>.

HEFEZ A.; VILLELA, M. L. T. **Polinômios e Equações Algébricas**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

HUANG, L. Quadratic formulas for quaternions. **Applied Mathematics Letters**, v. 15, n. 5, p. 533–540, 2002.

JANOVSKÁ D.; OPFER, G. A note on the computation of all zeros of simple quaternionic polynomials. **SIAM J. Numer. Anal.**, v. 48, n. 1, p. 244–256, 2010.

NIVEN, I. Equations in quaternions. **The American Mathematical Monthly**, v. 48, n. 10, p. 654–661, 1941.

NIVEN I.; EILENBERG, S. The "fundamental theorem of algebra"for quaternions. **Butlletin of the American Mathematical Society**, v. 50, n. 4, p. 246–248, 1944.

ORE, O. Theory of non-commutative polynomials. **Annals of Mathematics**, v. 34, n. 3, p. 480–508, 1933.