МЕДИЦИНСКИЕ НАУКИ / MEDICAL SCIENCES

УДК 611.1 + 519.6 + 612.13

О БИОМЕХАНИКЕ КРОВООБРАЩЕНИЯ

ABOUT BIOMECHANICS OF BLOOD CIRCULATION

©Горшков–Кантакузен В. А.
канд. богословия, DSc (med), член Королевского медицинского общества
Международное общество гипертензии
г. Мидлсекс, Великобритания, vladimir-gorsh@mail.ru
©Gorshkov–Cantacuzène V.
TD, DSc (med), MRSM
International Society of Hypertension
Middlesex, UK, vladimir-gorsh@mail.ru

Аннотация. В настоящей статье представлены основные подходы к моделированию системы кровообращения. Сделан вывод о необходимости объединения подхода с целью минимизации допущений. Выведен закон сохранения энергии для крови, критерий Рейнольдса. Показана возможность применения задачи о сложном (разветвленном) трубопроводе.

Abstract. This article presents the main approaches to modeling the blood circulatory system. The conclusion about the need for a combined approach with a view to minimizing assumptions. Bred law of conservation of energy for blood Reynolds. The possibility of using the problem of the complex (branched) pipeline.

Ключевые слова: кровообращение, критерий Рейнольдса, закон сохранения энергии.

Keywords: circulation, the Reynolds number, the law of conservation of energy.

Основные подходы

Система кровообращения (сердечно–сосудистая система[1] — ССС) человека является уникальной организацией органов, обеспечивающих циркуляцию крови, которая поражает ум своей уникальностью и, не побоюсь сказать, незаменимостью. Именно она, наряду с лимфатической и нервной системами, обеспечивает связь всех органов. Патологии данной системы занимают первое место в ряду патологий организма человека [1]. По статистике,

[1] — обычно, под кровообращением понимается только система кровеносных сосудов, тогда как под сердечно–сосудистой понимается система, состоящая из сердца, кровеносных и лимфатических сосудов (Бокерия Л. А., 2012). Однако, в настоящей работе, под терминами «сердечно–сосудистая» и «кровеносная» мы будем понимать замкнутую систему, состоящую из центра — сердца, — выполняющего роль своеобразного насоса, и переферии — кровеносных сосудов (всех, а не только переферических). При этом, так как в базис расчета заложено понятие замкнутости, мы исключаем лимфатическую систему. Хотя, с точки зрения анатомии, лимфатическая система является частью сердечно–сосудистой системы.

статистике, от болезней системы кровообращения умирает более 500 000 человек в год — т. е. 55% от общего числа умерших в стране. Поэтому, как было отмечено на «Национальном конгрессе кардиологов — 2015» [2] и Конгрессе «Сердечная недостаточность — 2015» [3] знания по механике ССС крайне необходимы как для выявления заболеваний на раннем этапе, так и профилактики. Одним из наиболее серьезных видов патологий ССС является *аневризма*, т. е. выпячивание стенки артерии (или вены).

Важно помнить, что кровь — это псевдопластическая (неньютоновская) жидкость или точнее, коллоидный раствор, состоящий из жидкой среды (плазмы) и взвешенных в ней форменных структур (лейкоцитов, тромбоцитов, эритроцитов и проч.) и подчиняющийся закону: $\sigma = \alpha \cdot \gamma^n$, $n < 1$, т. е. ее вязкость зависит от градиента скорости. Вместе с этим, кровь — ткань организма (орган). Понимание этих двух фундаментальных истин (кровь — это и жидкость, и орган) необходимо для изучения биомеханики кровообращения [4].

Условно говоря, с точки зрения механики или, даже, гидромеханики ССС является сложным замкнутым трубопроводом с насосом (сердцем).

В настоящее время существует несколько подходов к моделированию ССС:

–рассмотрение стенки артерии (сосуда), как связующей основы с внедренными в нее мышечными элементами [5];

–рассмотрение течения крови с использованием конечно-элементных методов [6];

–рассмотрение течения крови с использованием метода погруженной границы [7].

По-сути, строго говоря, все эти подходы описывают одно и тоже — ССС. Так, говоря о деформации артерии (возникновении аневризм) стоит рассматривать одновременно две задачи: механическую деформацию стенки и деформации от крови. И хотя это рассмотрение одной задачи как бы с двух сторон, а выводимые из них уравнения следует решать как систему уравнений (причем каждое из уравнений будет строго «привязано» к другим уравнениям, образуя как бы систему в системе), все эти подходы позволяют максимально близко приблизаться математически к описанию ССС.

Рассмотрим подходы 1 и 3 отдельно.

Рассмотрим стенку сосуда (Рисунок 1) как некую связующую основу с внедренными в нее армирующими волокнами. Пусть объемная доля армирующих волокон будет ω^*, тогда объемная доля связующей основы будет $\omega = 1-\omega^*$. Армирующие волокна считаются упругим материалом с модулем Юнга E^*, при этом предполагается, что в заданных условиях все волокна остаются упругими. Связующая основа считается линейно–вязкоупругим материалом с модулем Юнга E^{**} и коэффициентом Пуассона ν.

В случае использования обобщенной кинематической гипотезы Тимошенко получим [5]:

$$(A - B)\, u + h^{(-2)} p = 0 \qquad (1),$$
$$Q \cdot \delta u \big|_{\Gamma} = 0$$

где A — кинематическая матрица–оператор; B — матрица–оператор инерции; u, p — векторы обобщенных перемещений и внешней поверхностной нагрузки; Q, δu — векторы обобщенных усилий и вариаций обобщенных перемещений на линии Г, ограничивающей отсчетную (т. е. срединную) поверхность оболочки; h — тонкостенность оболочки.

В общем случае данная краевая задача нелинейна, а общий порядок системы равен 12 и не зависит от числа слоев и их расположения. Сдвиговые деформации и напряжения определяются через соответствующие соотношения упругости.

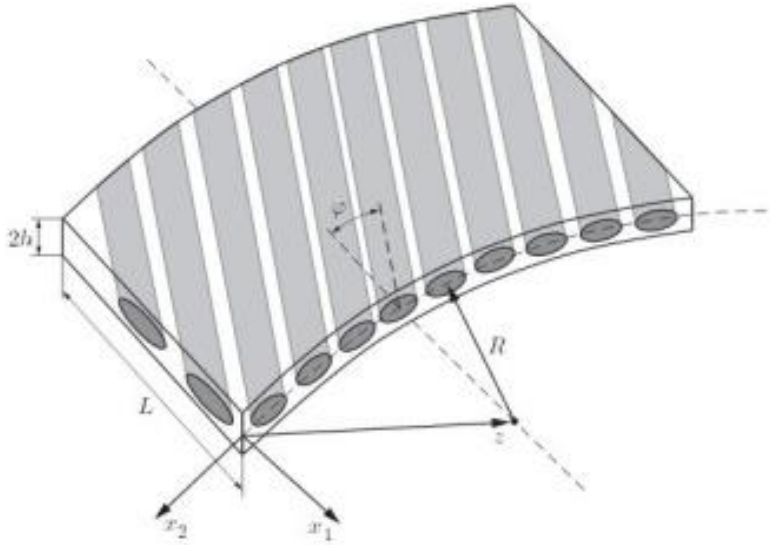

Рисунок 1.

Для критической нагрузки (т. е. максимального давления, которое может выдержать артерия или вена), получена зависимость [5]:

$$q = (4\omega E^{**}h^2)\left[\frac{2\left(\frac{h\pi^2 R}{l^2}\right)}{12}\left(a_{11}\left(\frac{\pi R}{nl}\right)^2 + 2(a_{12}+2a_{33}) + \frac{a_{22}}{\left(\frac{\pi R}{nl}\right)^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(\frac{\pi R}{nl}\right)^4}{2\left(\frac{h\pi^2 R}{l^2}\right)\left(A_{22}\left(\frac{\pi R}{nl}\right)^2 + A_{12} + A_{33} + \frac{A_{11}}{\left(\frac{\pi R}{nl}\right)^2}\right)}\right] \qquad (2),$$

где q — размерное внутреннее давление; ε = [a_{ij}](i,j — 1,2,3) — симметричная матрица коэффициентов упругости связующего и волокон для плоского напряженного состояния; n = 2 — количество волн, характеризующих форму деформации сосуда по окружности (в данном случае овальное деформирование, по методу Бубнова–Галеркина)

В случае изотопного вязкоупругого связующего коэффициенты матрицы *ε* имеют вид:

$$a_{11} = \frac{1}{1-\nu^2} + \frac{\omega^* E^*}{\omega}\cos\varphi_i^4 \qquad (3)$$

$$a_{12} = a_{21} - \frac{\nu}{1-\nu^2} + \frac{\omega^* E^*}{\omega}\cos\varphi^2\,(1-\cos\varphi^2)$$

$$a_{13} = a_{31} - \frac{\omega^* E^*}{\omega}\sqrt{1-\cos\varphi^2}\cdot\cos\varphi$$

$$a_{23} = a_{32} - \frac{\omega^* E^*}{\omega}\cos\varphi\sqrt{1-\cos\varphi^2}$$

$$a_{33} = \frac{1}{2(1+\nu)} + \frac{\omega^* E^*}{\omega} \cos\varphi^2 \, (1 - \cos\varphi^2)$$

где φ — угол укладки армирующих волокон.

$$\textit{Матрица} \, \|A_{ij}\| - \|a_{ij}\|^{-1} \; (i, j = 1; 2; 3)$$

Используя зависимость для критической нагрузки (2), и учитывая, что максимальное внутреннее давление зависит от угла укладки армирующих волокон φ, можно найти наиболее выгодный, с точки зрения механики, угол. Он приблизительно равен 57°, когда в реальной жизни это значение колеблется от 30° до 50°.

Тогда, максимальное давление, которое выдерживает однородная цилиндрическая оболочка равно:

$$P_{max} = \frac{\pi\sqrt{6}}{9(1-\nu^2)^{0.75}} E \frac{h^2}{Rl} \sqrt{\frac{h}{R}} \qquad (4)$$

Другой подход, связанный с методом погруженной частицы, предполагает рассматривать деформацию от действия крови. При этом, движении крови описывается как трехмерное нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости с переменными плотностью и вязкостью (Рисунок 2). Именно этот подход, не учитывающий строения и механики стенки артерии (сосуда), чаще всего используется для моделирования образования аневризм.

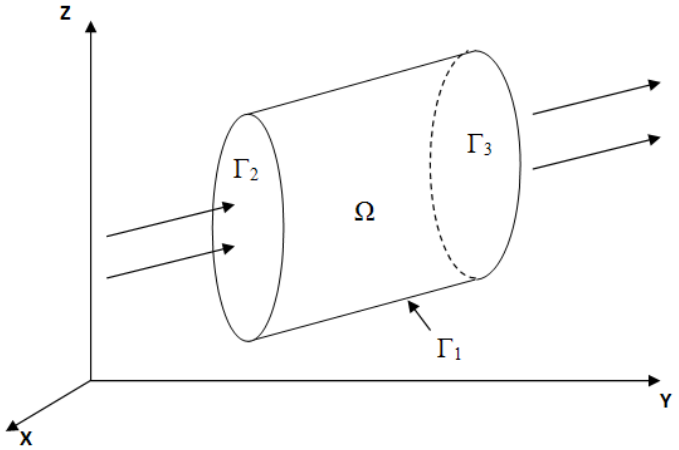

Рисунок 2.

Так как источником течения крови является давление, то воспользуемся нестационарной системой дифференциальных уравнений Навье–Стокса:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla\sigma + \vec{f} \qquad (5)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

с начальными и краевыми условиями: $\vec{u}(\bar{x};0) = \vec{u}_0;\ \vec{u}|_{\Gamma_1} = \vec{u}_B;\ u|_{\Gamma_2,\Gamma_3} = 0$
$p|_{\Gamma_2} = p_{вх.}; p|_{\Gamma_2} = p_{вых.}$

Где $\bar{x}(x;y;z) \in \Omega;\ \vec{u} = (u;v;w)$ — вектор скорости;

$\vec{u}_B$ — скорость, с которой двигаются стенки сосуда при деформации;
$\rho = c(\rho_2 - \rho_1) + \rho_1$ — плотность;
$p = p(\bar{x};t)$ — давление;
$\sigma = \mu(\nabla u + (\nabla u)^T)$ — вязкий тензор напряжений;
$\mu = c(\mu_2 - \mu_1) + \mu_1$ — вязкость жидкости;
$\vec{f} = f(x;t)$ — вектор массовых сил.

Область Ω — сосуд с границей $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, где Γ_1 — стенка артерии (сосуда), а Γ_2 и Γ_3 — соответственные области втекания и вытекания.

Концентрация форменных элементов крови $c = c(\bar{x};t),\ c \in [0;1]$ определяется как решение уравнения $\frac{\partial c}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla c = 0$ с начальными и краевыми условиями: $c(\bar{x};0) = c_{нач.}(\bar{x}), \bar{x} \in \Omega; c(\bar{x};t)|_{\Gamma_2} = c_{кр.}(\bar{x};t)$, *где* $c_{нач.}$ *и* $c_{кр.}$ *— заданные функции.*

Нахождение неизвестной компоненты вектора скорости на участках втекания – вытекания осуществляется с помощью использования приведенных выше уравнений на границах Γ_2 и Γ_3.

Для моделирования движения стенок артерии (сосуда) важно определить силы, которые возвращают артерию в состояние равновесия. В силу того что данные деформации сравнительно небольшие, используем простую формулу для нахождения сил деформации в зависимости от смещения относительно исходного положения:

$$F = k\|X - X_0\| \qquad (6),$$

где X и X0 — функции, описывающие поверхность артерии в момент времени τ и в начальный момент времени; k — коэффициент жидкости.

Поставленная дифференциальная задача решается методом конечных разностей. Для ее решения целесообразно использовать схемы расширения по физическим факторам:

$$\frac{u^{ж} - u^n}{\Delta t} = -(u^n \cdot \nabla)u^* - \frac{1}{\rho}\nabla\sigma + f^n, \qquad (7)$$
$$\rho\Delta\rho^{n+1} - (\nabla\rho \cdot p^{n+1}) = \frac{\rho^2 \nabla u^*}{\Delta t},$$

$$\frac{u^{ж+1} - u^{ж}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho}\Delta p^{n+1}$$

Далее, определяем деформацию стенок артерии под воздействием крови, а также распределение массовых сил:

$$\frac{\partial X}{\partial t}(\bar{q};t) = \int_{\Omega} \vec{u}(\bar{x};t)\cdot\delta\big(x - X(\bar{q};t)\big)dx\,dy\,dx \qquad (8),$$

$$\vec{f}(\bar{x};t) = \int_{\Gamma} F(\bar{q};t)\cdot\delta\big(x - X(\bar{q};t)\big)dq\,dr\,ds$$

где $\bar{q} = (q;r;s) \in \Gamma$ — точка поверхности сосуда; $X = X(\bar{q};t)$ — функция, описывающая поверхность артерии в момент времени τ; $F = F(\bar{q};t)$ — вектор скорости течения; $\vec{f}(\bar{x};t)$ — вектор массовых сил; δ — функция Дирака.

Используя последние эти формулы (8), можно рассчитать деформацию, которой подвергаются стенки артерии при данном давлении крови, и то, как повлияют возникшие силы сопротивления на ее течение.

Таким образом, видно, что рассмотренные подходы (в совокупности) позволяют описать сложные явления возникновения аневризм и механику работы ССС. Однако, не стоит забывать про такие факторы, как возникновение тромбозов и отложение холестериновых бляшек, которые, в свою очередь, также влияют на развитие патологий ССС. И вместе с тем, знания по механике работы ССС позволяют корректировать лечение и предотвращать деформацию артерий и сосудов, а значит уменьшать риск развития многих заболеваний ССС.

Закон сохранения энергии

Рассматривая малый отрезок артерии *dl*, можно вывести закон сохранения энергии для крови (аналог закона Бернулли):

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dl} = -g\cdot\sin\alpha\,(-w)\frac{dw}{dl} + \frac{dwg}{dlh} \qquad (9)$$

$$\frac{1}{\rho}dp = -gdz - \frac{dw^2}{2} + \frac{dwg}{h}$$

$$gdz + \frac{1}{\rho}dp + \frac{dw^2}{2} - \frac{dwg}{h} = 0$$

$$dz + \frac{dp}{\rho g} + \frac{dw^2}{2g} - \frac{dw}{h} = 0$$

или

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{w^2}{2g} - \frac{w}{h} = 0 \quad (10)$$

Уравнение (10) также может быть получено через теорему $\sum A_i = \Delta E_{кин.}$. От классического вида, принятого в гидромеханике, — закона Бернулли — его отличает наличие слагаемого (– w/h), выражающего внутреннее трение или вязкость.

Так же как и закон Бернулли в гидромеханике, закон сохранения энергии для крови может применяться для определения скорости крови, характера ее течения по артериям и сосудам, а также истечении при их повреждении.

Критерий Рейнольдса

Если говорить про критерий Рейнольдса, который выражает зависимость скорости течения жидкости и диаметра сосуда от вязкости, то в случае крови необходимо вводить поправки на теплоемкость, теплопроводность, учитывать строение вещества и его физико–химические параметры. Непригодность стандартной формулы (wdρ/μ) легко доказывается простым вычислением, в результате которого выясняется, что кровь течет турбулентным режимом даже в самых маленьких сосудах (!) что, конечно же, не соответствует действительности. Тогда, выражая через иные критерии, получаем следующую зависимость [4]:

$$Re = \frac{1}{6}\frac{\rho^2 w L\sqrt{8RT}}{æ\sqrt{\eta^3\pi^3}}\, n\sum\sigma^2 \left[P + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \quad (11),$$

где ρ — плотность; w — скорость; L — характерный линейный размер поверхности; R — универсальная газовая постоянная; T — температура; η — динамическая вязкость; æ — коэффициент теплопроводности жидкости; P — давление; σ — эффективный диаметр молекул; n — число молекул в единице объема.

Задача о сложном трубопроводе

Вся задача моделирования сводится к разбиению целой ССС на простые отрезки, соединенные узлами. Фактически, всю ССС можно свести к двум простым схемам (Рисунок 3):

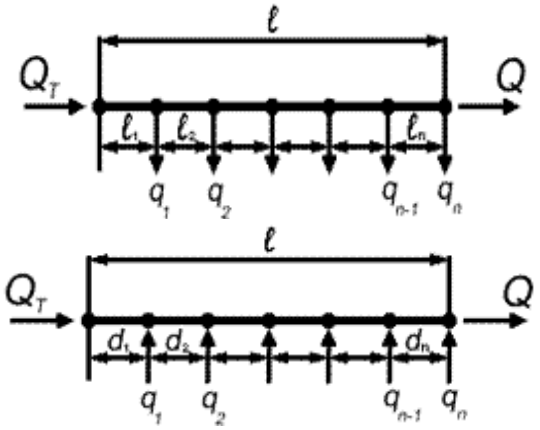

Рисунок 3.

В том случае, если у нас имеется последовательное соединение труб различного диаметра (артерия — артериола), то Q = const., $h_г = \sum_{i=1}^{n} q_i$.

Алгоритм решения такой задачи состоит из расчета скорости течения крови на участке, определения режима течения (необходимо оценить возможность турбулентного течения), подбора коэффициентов β и m (или расчета $\lambda_г$ в случае использования уравнения Новье–Стокса), расчета перепада давления на участке и расчета общего перепада давления по длине.

Перепад давления может быть рассчитан по формуле Навье–Стокса. Учитывая, что в большинстве публикаций была использована именно эта формула, то ради некого своеобразия воспользуемся формулой Лейбензона:

$$\Delta P = \beta \frac{Q^{2-m} \nu^m l}{d^{5-m}} \rho g \ [Па] \qquad (12)$$

или для общего перепада по длине:

$$\Delta P_{общ.} = \frac{\nu^m \rho g}{d} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left(Q - \sum_{i=1}^{n-1} q_i\right)^{2-m} l_i \beta_i\right] \ [Па] \qquad (13)$$

Для вычисления напора используют формулу (10).

Также, стоит помнить, что увеличение температуры в системе приводит к неизбежному снижению вязкости и увеличению значения критерия Re, поэтому для точного расчета температуры в любой точке системы пользуются формулой Шухова с учетом поправки Лейбензона [8], учитывающей работу трения потока:

$$t = t_0 + b + (t_н - t_0 - b) \cdot \exp\left[\frac{-k\pi \ dX}{G \ C_p}\right], \qquad (14),$$

где $b = \frac{G \cdot i}{\pi k d}$.

Настоящий подход позволяет полностью рассмотреть ССС, а не отдельные ее компоненты.

Вывод

Из всего вышесказанного можно сделать достаточно простой вывод. Моделирование кровообращения является сложной и важной задачей механики и трансляционной медицины, требующей всестороннего подхода. Объединение нескольких подходов позволяет минимизировать допущения и ошибки. Намеченные подходы позволяют в уже недалекой перспективе создать программы для прогнозирования аневризм и иных патологических состояний системы кровообращения и, соответственно, применять более эффективное лечение.

Список литературы:

1. Горшков–Кантакузен В. А. Моделирование сердечно–сосудистой системы: новый взгляд на механику патологий системы кровообращения человека // Тезисы докладов IV Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при взаимодействии полей различной физической природы», 15–19 февраля 2016, Москва. / Российский научный фонд, Московский Авиационный

Институт (Национальный Исследовательский Университет). М.: ООО «ТР–принт», 2016. С. 50–54.

2. Горшков–Кантакузен В. А. Модель течения крови // Материалы Российского национального конгресса кардиологов. Российское кардиологическое общество в год борьбы с сердечно–сосудистыми заболеваниями в России, 22–25 сентября 2015, Москва / Российское кардиологическое общество. М.: Российское кардиологическое общество, 2015. С. 185–186.

3. Горшков–Кантакузен В. А. Моделирование сердечно–сосудистой системы и хроническая сердечная недостаточность // Тезисы XV Конгресса «Сердечная недостаточность 2015», 10–11 декабря 2015, Московская область, г. Красногорск, 65–66 км МКАД, ТВК, корпус 2, павильон 3 / Общество специалистов по сердечной недостаточности. М.: Общество специалистов по сердечной недостаточности, 2015. С. 88.

4. Горшков–Кантакузен В. А. Вычисление критерия Рейнольдса в рамках гемодинамики // Бюллетень НЦССХ им. А. Н. Бакулева РАМН «Сердечно–сосудистые заболевания». (Тезисы докладов и сообщений XIX Ежегодная сессия Научного Центра сердечно–сосудистой хирургии им. А. Н. Бакулева с Всероссийской конференцией молодых ученых, Секция: Материалы и изделия для сердечно–сосудистой хирургии: от эксперимента до внедрения) Т. 16. №3 май-июнь 2015 (Приложение) / НЦССХ им. А.Н. Бакулева. М.: НЦССХ им. А. Н. Бакулева, 2015. С. 180.

5. Медведев А. Е., Самсонов В. И., Фомин В. М. О рациональной структуре кровеносных сосудов // Прикладная механика и техническая физика, 2006. Т. 47, №3. С. 24–30.

6. Boyce E. G. Immersed boundary model of aortic heart valve dynamics with physiological driving and loading conditions. International Journal of Numerical Methods in Biomedical Engineering, 2011, pp. 1–29.

7. Peskin C. S. Numerical Analysis of Blood Flow in the Heart. J.C, 1977, 25, pp. 220–252.

8. Гидравлические расчеты сложных трубопроводов. Режим доступа: http://neftrussia.ru/gidravlicheskie-raschety-slozhnyh-truboprovodov/ (дата обращения 20.03.2016 г.).

Reference:

1. Gorshkov–Cantacuzene V. A. Modeling of cardiovascular system: a new look at the mechanics of the human circulatory system pathologies. Abstracts of the IV International scientific seminar “Dynamic deformation and contact interaction of thin–walled structures in the interaction of fields of different physical nature”, 15–19 February 2016, Moscow. Russian Science Foundation, the Moscow Aviation Institute (National Research University). Moscow, OOO “TR-print”, 2016, pp. 50–54.

2. Gorshkov–Cantacuzene V. A. Blood flow model. Proceedings of the Russian National Congress of Cardiologists. The Russian Society of Cardiology annual fight against cardiovascular diseases in Russia, 22–25 September 2015 Moscow. Russian Society of Cardiology. Moscow, The Russian Society of Cardiology, 2015, pp. 185–186.

3. Gorshkov–Cantacuzene V. A. Modeling of the cardiovascular system, and chronic heart failure. Abstracts of the Congress “Heart Failure 2015” 10–11 December 2015, Krasnogorsk, Society for Heart Failure, p. 88.

4. Gorshkov–Cantacuzene V. A. Calculation of Reynolds number within the hemodynamic. Bulletin Bakulev SCCS RAMS “Cardiovascular disease”. (Abstracts of papers and reports XIX Annual Session of the Bakulev Scientific Center for Cardiovascular Surgery with the All–Russian Conference of Young Scientists. Section: Materials and products for cardiovascular surgery: from experiment to implementation), Volume 16, no. 3, May–June 2015. Bakulev SCCS. Moscow, Bakulev SCCS, 2015, p. 180.

5. Medvedev A. E., Samsonov V. I., Fomin V. M. On the rational structure of the blood vessels. Applied Mechanics and Technical Physics, 2006, v. 47, no. 3, Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, 2006, pp. 24–30.

6. Boyce E. G. Immersed boundary model of aortic heart valve dynamics with physiological driving and loading conditions. International Journal of Numerical Methods in Biomedical Engineering, 2011, pp. 1–29.

7. Peskin C. S. Numerical Analysis of Blood Flow in the Heart. J.C, 1977, 25, pp. 220–252.

8. Gidravlicheskie raschety slozhnykh truboprovodov. Availablt at: http://neftrussia.ru/gidravlicheskie-raschety-slozhnyh-truboprovodov/, accessed, 20.03.2016.

Работа поступила в редакцию 22.05.2016 г.

Принята к публикации 25.05.2016 г.