Conclusions. The obtained solution can be used for the debugging programs of numerical calculation of the fluid movement with a free surface as a test.

References

1. **Бенерджи, П.** Методы граничных элементов в прикладных науках [Текст] / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М.: Мир,1984. – 494 с.

2. **Бреббил, К.** Применение метода граничных элементов в технике [Текст] / К. Бреббил, С. Уокер. – М.: Мир,1982. – 248 с.

3. Метод граничных интегральных уравнений [Текст]/ ред. Т. Круз, Ф. Риццо; пер. с англ. В.М. Вайншельбаума; под ред. Р. В. Гольдштейна. – М.: Мир,1978. – 216 с.

4. **Григолюк, Э. И.** Погружение упругих оболочек вращения в жидкости [Текст]/ Э. И. Григолюк, А. Г. Горшков // Итоги науки и техники. Механика деформированного твердого тела. – М., 1977. – Т. 10. – С. 63 – 113.

5. **Янке, Е.** Специальные функции [Текст]/ Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1977. – 344 с.

6. **Кочин, Н. Е.** Теоретическая гидромеханика [Текст]/ Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. – М.: Гостехиздат,1948. – Ч.1. – 684 с.

7. **Бэтгелар, Дж.** Введение в динамику жидкости [Текст]/ Дж.Бэтгелар. – М.: Мир, 1973. –758 с.

8. **Соболев, С.Л.** Уравнение математической функции [Текст]/ С. Л.Соболев. – М.: Наука, 1966. – 44 с.

Надійшла до редколегії 14.05.2015

УДК 531.36

А. В. Пироженко, Е. В. Меньков

Институт технической механики Национальной академии наук Украины и Государственного космического агентства Украины

К ВЕРОЯТНОСТНОМУ ОПИСАНИЮ НЕУСТОЙЧИВЫХ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Исследована проблема прогноза неустойчивых движений механических систем на длительном интервале времени. Предположено, что основные закономерности движения систем можно описывать детерминированными законами классической (ньютоновской) механики. Проанализированы проблемы вероятностного описания неустойчивых движений в задачах классической механики. На простых примерах рассмотрено соотношение случайности и определенности в неустойчивых механических движениях, выяснена содержательность задачи вероятностного описания таких движений. Выявлена связь данной проблемы с актуальными проблемами детерминированного хаоса: определено существование целого класса систем, для многих траекторий которых детерминированное предсказание их предельных (конечных) состояний становится невозможным. Доказано, что для рассматриваемого класса систем наиболее целесообразным является вероятностный подход описания предельных движений, так как, применяя такой подход, можно существенно улучшить качество прогноза. Проведен анализ научных подходов к вероятностному прогнозу предельных неустойчивых движений. Рассмотрены различные методы определения вероятности предельного положения системы с неустойчивыми движениями. Показано, что решение проблемы вероятностного описания предельных движений систем с неустойчивыми механическими движениями требует более тщательного анализа. Поставлены задачи дальнейших исследований.

© А. В. Пироженко, Е. В. Меньков, 2015

Ключевые слова: вероятностное описание, неустойчивые движения, детерминированный хаос, классические модели случайных процессов, монетка, игральная кость, странный аттрактор.

Досліджено проблему прогнозу нестійких рухів механічних систем протягом тривалого проміжку часу. Припущено, що основні закономірності руху систем можна описувати детермінованими законами класичної (ньютонівської) механіки. Проаналізовано проблеми ймовірнісного опису нестійких рухів у задачах класичної механіки. На простих прикладах розглянуто співвідношення випадковості та визначенності в нестійких механічних рухах, змістовність задачі ймовірнісного опису таких рухів. Виявлено зв'язок між даною задачею й актуальними проблемами детермінованого хаосу;з'ясовано існування цілого класу систем, для багатьох траєкторій яких детеміноване прогнозуваня їх граничних(кінцевих) положень стає неможливим. Доведено, що для даного класу систем найдоцільнішим є ймовірнісний підхід опису граничних рухів, оскільки застосування такого підходу суттєво покращить якість прогнозу. Проаналізовано наукові підходи щодо ймовірнісного прогнозу граничних нестійких рухів. Розглянуто різні підходи означення і використання ймовірності граничного положення системи з нестійкими рухами. Показано, що вирішення проблеми опису граничних рухів системи потребує більш детального аналізу. Сформульовано задачі для подальших досліджень.

Ключові слова: ймовірнісне описання, нестійкі рухи, детермінований хаос, класичні моделі випадкових процесів, монетка, гральні кістки, дивний атрактор.

Problem of prediction of unstable moves in mechanical system in longtime intervals is considered. Assumed that main regularities of system movement are described by deterministic low of classical (newton's) mechanics. The main goal of this article is analysis of problems of stochastic description of unequable moves in classical mechanic problems. A ratio between randomness and determinacy at unequable mechanical moves in longtime terms will be examined on simple examples. A pithiness of the problem of stochastic description of unequable mechanical moves will be considered. Connection between prediction of unstable moves problem and modern problems of deterministic chaos is considered. Different ways of determining probabylity of limiting system position with unstable mechanical mobes are consedered. An analysis of modern papers wich describe problem of randomnes in simple mechanical systems is considered. Shown that the problem needs ferther researches. Aims for further researches are formulated.

Key words: stochastic description, unequable moves, deterministic chaos, classical model of random processes, coin, dice, strange attractor.

В статье рассматривается проблема прогноза неустойчивых движений механических систем на длительном интервале времени. Предполагается, что основные закономерности движения систем можно описывать детерминированными законами классической (ньютоновской) механики. Под неустойчивым движением понимается движение, при котором малые возмущения начальных условий траектории приводят с течением времени к сильному ее отклонению от невозмущенной траектории. Поэтому решения соответствующих уравнений динамики неустойчивы, то есть среди показателей Ляпунова имеются положительные [19].

Данная проблема имеет давнюю историю. А. Пуанкаре, исследуя неустойчивое положение равновесия механической системы, отмечает, что «… совершенно ничтожная причина, ускользающая от нас по своей малости, вызывает значительное действие, которое мы не можем предусмотреть…» [25]. Там же он говорит о влиянии неточностей знания начальных условий на предсказание неустойчивого движения механических систем: «… небольшая разница в первоначальном состоянии вызывает большое различие в окончательном явлении. Небольшая погрешность в первом состоянии вызвала бы огромную ошибку в последнем. Предсказание становится невозможным, мы имеем перед собой явление случайное».

Явление детерминированного хаоса относят к одному из важнейших открытий XX в. Одно из определений детерминированного хаоса сформулировано следующим

образом: «Хаос следует обозначить как некоторый случайный процесс, который наблюдается в динамических системах, не подверженных влиянию шумов или каких-либо иных случайных сил» [18]. Данное определение не является строгим, но, как представляется, доступно передает суть понятия.

Результаты исследований детерминированного хаоса обуславливают новый взгляд на проблему описания неустойчивых движений. Отметим, в частности, следующее: 1) поскольку хаотические движения имеют место даже в простых механических системах (см., например, [9;12;23]), то вопрос о границе применимости детерминированного описания движения стоит и для простых задач классической механики (под термином «детерминированное описание» будем обозначать традиционное прогнозирование движения в классической механике, заключающееся в интегрировании уравнений движения для конкретных начальных условий движения); 2) поскольку хаотическое движение можно назвать «чрезвычайно» (экспоненциально сильно) неустойчивым движением [3], то возникает вопрос о корректности рассмотрения каких-либо изолированных систем, в том числе консервативных. Ведь любое малое внешнее воздействие может привести к существенному изменению траектории, а любая малая диссипация и (или) подкачка энергии – к иному структурированию фазового пространства.

Детерминированное описание неустойчивых движений на длительном промежутке времени часто может давать прогноз низкого качества. Представляется, что повышение качества прогноза можно достичь путем вероятностного описания движений, то есть введением распределения вероятностей событий (результатов) движения системы. Однако на этом пути надо решить вопросы определения содержательного понятия вероятности движений, основные закономерности которых описываются детерминированными моделями (дифференциальными уравнениями движения), а также определить возможность использования этих моделей для вероятностного прогноза движений. В разных аспектах эти вопросы рассматривались, например, в [4–8;10;11;13;14;16;17;20;21].

Целью статьи является анализ проблемы вероятностного описания неустойчивых движений в задачах классической механики. На простых примерах рассматривается соотношение случайности и определенности в неустойчивых механических движениях и содержательность задачи вероятностного описания таких движений.

Актуальность данной проблемы в первую очередь определяется ее связью с проблемами детерминированного хаоса. Хотелось бы отметить особую роль классической механики в исследовании проблем детерминированного хаоса и проявления случайности в детерминированных моделях. Это, как представляется, связано с тем, что классическая механика твердого тела (механика Ньютона), по-видимому, является наиболее обоснованной, апробированной и строгой теорией современной физики, а образы механических движений – доступными для человеческого воображения.

Вместе с тем задачи вероятностного прогнозирования неустойчивых движений в теоретической механике рассматривались весьма редко. Это связано с рядом причин, основные из которых описаны ниже.

В упрощенном виде традиционная задача классической механики состоит в следующем: нужно определить основные закономерности движения системы твердых тел, которое описывается системой достаточно гладких обыкновенных дифференциальных уравнений. В силу теоремы о существовании и единственности

решения системы дифференциальных уравнений в решениях никакой случайности быть не может. Заметим, что задача интегрирования уравнений динамики твердых тел сама по себе чрезвычайно сложная. Достаточно вспомнить классические задачи движения твердого тела относительно неподвижной точки и задачу трех тел небесной механики, для которых лишь в отдельных случаях построены аналитические решения дифференциальных уравнений. То есть движение описывается системой четырех обыкновенных автономных дифференциальных уравнений первого порядка и имеется первый интеграл. Отметим также, что прикладной характер исследований обычно связывает задачу с уникальным объектом, в движении которого случайность неприемлема. Неустойчивые режимы движения систем в большинстве случаев не представляют интереса, а поиск устойчивых движений бывает целью и задачей многих исследований.

Конечно, основной причиной того, что вероятностное описание неустойчивых движений редко рассматривалось в теоретической механике, является детерминизм ее моделей и их решений.

Рассмотрим простой пример полета пули в проекции на горизонтальную плоскость (модель выстрела). Будем считать, что ветра нет, то есть движение воздуха не оказывает влияние на траекторию движения. Тогда решением простейшей модели выстрела является прямолинейное движение в рассматриваемой плоскости. Это решение неустойчивое, и ошибка (неизбежная) задания начальных условий движения породит целый пучок прямых.

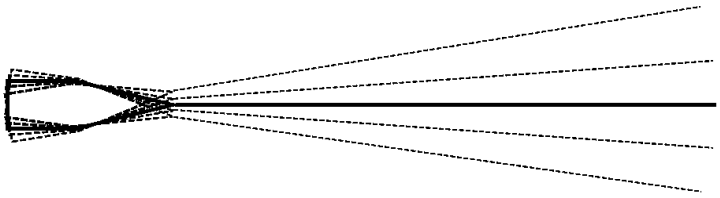

Рис. 1. Схематическое изображение простейшей модели выстрела

Неучтенность внешних воздействий, таких как вращение Земли, притяжение Луны, Солнца, конечные размеры пули и неоднородность плотности воздуха и т.д., приведет, во-первых, к тому, что траектория будет отличаться от прямой, а, во-вторых, к тому, что траектория будет зависеть от времени выстрела, то есть реальные траектории будут близки как бы к «размытой» прямой. Отметим, что как бы мы ни уточняли нашу модель, отличие реальных траекторий от расчетных траекторий модели все равно сохранится. В любом случае решение задач теоретической механики в лучшем случае может дать лишь некоторое среднее движение.

Но, несмотря на неустойчивость, случайности, с точки зрения физика и инженера, в рассматриваемом случае нет. Нет здесь качественно отличных событий и нет случая, когда «малые причины приводят к большим последствиям». Решение модельной задачи теоретической механики, определяющее основные закономерности движения и утверждающие, что траектория движения близка к прямой, как представляется, удовлетворяет всем потребностям.

Введем в задачу качественное отличие траекторий (событие). Пусть выстрел осуществляется в некоторую цель, технически из одного и того же средства, жестко закрепленного в фиксированной точке. Тогда при достаточной удаленности цели от

начальной точки выстрела (на практике одно и то же событие) выстрел будет порождать два события – поражение цели либо промах. То есть результат выстрела как результат попадания в цель будет некоторой случайной величиной, зависящей в том числе и от расстояния до цели. С инженерной точки зрения задача прогноза попадания в цель при одном и том же выстреле является задачей вероятностного описания. На практике так и поступают, определяя прицельную дальность выстрела для того или иного средства. Но в теоретическом отношении, с точки зрения физика (механика), задача не меняет своего детерминированного характера. Дело в том, что вероятность попадания в цель определяется в основном погрешностью начальных условий выстрела и размерами цели, которые не зависят от динамических характеристик системы. Основная закономерность движения, близость к прямолинейному движению, позволяют решить задачу определения вероятности попадания в цель при заданных характеристиках цели и погрешности начальных условий выстрела. Введение цели не порождает качественно отличных траекторий движения.

Усложним задачу. Расположим на пути движения пули разделитель движения, «уголок» (рис.2) так, что «среднее» движение, описываемое решением модельной задачи теоретической механики, приходится как раз на острие уголка, то есть пуля, отразившись от уголка, возвращается по той же прямой, по которой она совершала первоначальное движение.

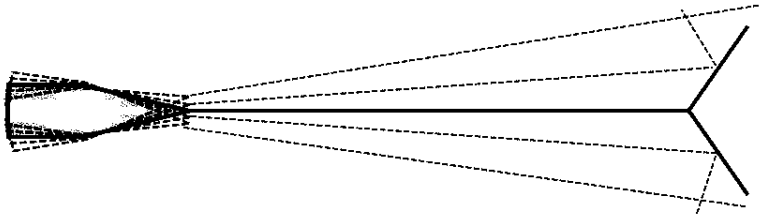

Рис. 2. Схематическое изображение усложненной модели выстрела

В этом случае движение, соответствующее решению модельной задачи, вообще нереализуемо (зависит от того, как поставить карандаш на острие грифеля). Реальные движения будут далеки от нашего решения.

Рассмотрим задачу прогнозирования угла отклонения траектории движения от «средней» прямой. В данном случае угол отклонения реальной траектории от траектории решения модельной задачи будет зависеть от динамических характеристик системы, в частности от характеристик соударения. Решение задачи прогноза движения и в смысле определения основных закономерностей этого движения представляется возможным только как вероятностное.

При преобладающей ошибке в начальных данных движения в сравнении с ошибками учета динамических воздействий решение задачи может быть осуществлено обычным в таких случаях способом. Задавая вероятностное распределение погрешностей начальных данных движения и используя знания о закономерностях свободного движения и закономерностях движения при ударе, нетрудно найти вероятностное распределение угла отклонения.

Другая ситуация возникает, если погрешности начальных данных меньше или сравнимы с погрешностями, вносимыми неточностью и неполнотой моделей движения (погрешностями модели). Например, когда начальные данные движения

постоянны с точностью до возможностей измерений, тогда непонятно ни как ввести вероятность, ни как ее рассчитывать. Заметим, что даже абсолютная точность задания начальных данных не меняет случайный характер движения в рассматриваемой задаче. Для ее детерминированного решения пришлось бы учесть не только движение, например Луны и Марса, но и динамику всей вселенной.

Несложные рассуждения показывают, что соотношения между величинами изменения движения системы, вносимыми погрешностями моделей, и задание начальных условий во многом определяют качество прогноза движения. И если в случае устойчивого движения детерминированное описание движения может давать удовлетворительный прогноз, то во многих случаях неустойчивого движения детерминированное описание весьма ограничено, а вероятностное описание значительно расширяет информативность прогноза.

Для того чтобы приблизиться к системам с детерминированным хаосом, мы еще несколько усложним систему. Рассмотрим не движение материальной точки, а движение квадратной пластины. То есть рассмотрим в горизонтальной плоскости «выстрел» «материальным квадратом» в уголок. Будем считать, что центр масс находится в геометрическом центре квадрата. Угловая скорость вращения квадрата в свободном движении постоянна. Таким образом, в свободном движении решение модельной задачи задается простыми формулами. Предположим, что и формулы удара нашего квадрата о поверхность уголка достаточно простые, поэтому общее решение модельной задачи задается простыми конечными формулами. Особенностью здесь является то, что для определения времени удара, а следовательно, и точки удара потребуется решить трансцендентное уравнение, которое мы можем решить только численно, то есть с некоторой погрешностью.

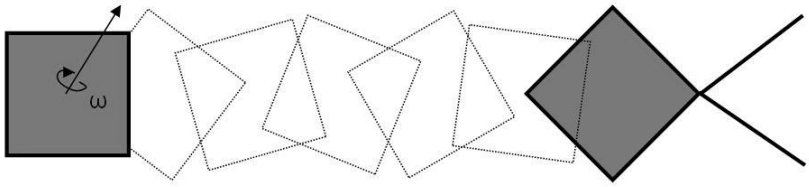

Рис. 3. Схематическое изображение модели выстрела квадратной пластиной

Рассмотрим случай движения (возможный с точки зрения решения модельной задачи), когда вершина квадрата бьется об острие уголка. Здесь мы столкнемся не только с нереализуемостью на практике этого движения, но и невозможностью его определения с помощью численного интегрирования. Стартуя из начального положения, соответствующего этому решению, из-за погрешности расчета мы будем получать качественно различные результаты. То есть изменение точности решения нашего уравнения или алгоритма его решения будут приводить к разным, качественно отличным результатам. Это происходит из-за того, что начальное условие принадлежит сепаратрисе, разделяющей качественно различные траектории движения, и неизбежной ошибки вычислений.

Аналогична ситуация при детерминированном хаосе. Если траектория движения проходит множество раз возле сепаратрис, то при отсутствии возможности точного решения (из-за ошибки расчета) в детерминированной системе будет наблюдаться «случайный» процесс [1;22].

Рассмотрим одну из простейших динамических систем – модель орбитального маятника с периодически изменяющейся длиной штанги [23]

$$\begin{cases} \dot{L} = -\dfrac{3}{2}\omega_0^2 r^2 \sin 2\psi, \\ \dot{\psi} = \dfrac{L}{r^2} - \omega_0, \\ \dot{\omega} = k, \end{cases} \tag{1}$$

где L – приведенный кинетический момент; ω_0 − угловая скорость орбитального движения; $r = 1 + z\cos\omega$; $z = \dfrac{b}{a}$; a, b – средняя длина штанги и амплитуда ее колебаний соответственно; ψ − угол между местной вертикалью и штангой; ω, k – соответственно фаза и частота колебаний штанги. Точкой обозначена производная по времени t. Параметры z, k, а также ω_0 считаются постоянными.

Почти при всех начальных данных L_0, ψ_0 маятниковые движения системы (изменения угла ψ) будут почти соизмеримы с колебаниями штанги (изменениями r) [22], то есть всегда найдутся два простых числа m и n: за n колебаний штанги гантель свершит почти m оборотов (колебаний) возле местной вертикали. При этом в зависимости от начального сдвига фазы между изменением ψ и r энергия маятниковых движений за время $2\pi n$ будет либо возрастать, либо убывать. В силу нелинейности движения сдвиг фазы будет меняться во времени, приводя в последующем к обратному эффекту (обратному изменению энергии). Предельные случаи изменения сдвига фазы: его постоянство при нулевом изменении энергии (центр резонанса) и бесконечно малое за период резонанса $2\pi n$ его изменение при таком же малом изменении энергии, приводящее к максимальному для данного резонанса изменению энергии и сдвига фазы (огибающая резонанса), определяют особые траектории, сепаратрисы – разделители качественно различных движений. Поскольку изменение сдвига фаз между изменением ψ и r, вообще говоря, тоже соизмеримо с изменениями r, то в движении системы имеют место так называемые вторичные резонансы, которые также порождают свои сепаратрисы [22].

Аналитическое решение уравнений (1) не представляется возможным. Численное интегрирование уравнений движения будет определять траекторию, которая, по крайней мере, на небольшом интервале времени близка к точному решению. Изменения метода, шага интегрирования или других условий численного расчета приведет к тому, что результаты расчетов будут соответствовать как бы «размытой» траектории точного решения. Отметим, что поскольку рассматриваются неустойчивые движения, то отклонения расчетной траектории от точного решения, вообще говоря, растут во времени. Если траектория в своем движении проходит близко к сепаратрисе, то возможным становится «переход» расчетной траектории на качественно отличную траекторию движения. По-видимому, явление детерминированного хаоса связано с тем, что сепаратрисы различных движений вплотную подходят друг к другу [22].

Если в гамильтонову систему, в которой преобладают хаотические траектории, ввести малую диссипацию (например, в систему (1) добавить вязкое трение со

средой [1; 24]), то структура фазового пространства изменится кардинальным образом: в нем возникнут притягивающие множества – так называемые аттракторы. И любая траектория диссипативной системы, в конечном счете, окажется в таком аттракторе. Основное внимание исследователей в настоящее время привлекает динамика систем на так называемых странных аттракторах [18]. Вместе с тем типичным случаем является стремление траекторий к обычным аттракторам – предельным циклам либо положениям устойчивого равновесия. А следствием хаотичности динамики системы является случайный характер попадания траектории в конкретный аттрактор.

Случайный характер траектории, вернее, результатов ее численного расчета, определяется теми же причинами, что и при детерминированном хаосе: траектория часто проходит вблизи сепаратрис [24]. При малой диссипации энергии локально структура фазового пространства близка к структуре первоначальной гамильтоновой системы, а сжатие фазового пространства и прохождение траектории через различные энергетические уровни, вероятнее всего, приводит к еще большему перемешиванию траекторий.

В [24] приведен пример расчета одной траектории движения орбитального маятника при незначительных изменениях шага интегрирования. Показано, что изменение шага интегрирования в пределах сохранения высокой точности расчета может приводить к качественно различным решениям (предельным движениям). При этом нет формальных оснований предпочесть одно решение другому.

По-видимому, одним из наиболее интересных проявлением динамического хаоса в диссипативных системах является случайная синхронизация движений. «Синхронизация – одно из фундаментальных свойств нелинейных систем, которое заключается в установлении определенных соотношений между характерными временами, частотами или фазами колебаний парциальных систем в результате их взаимодействия» (для механиков более привычным является термин «захват в резонанс») [15]. Явление случайной синхронизации при детерминированном описании динамики заключается в том, что численное исследование модельной задачи, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений, не позволяет однозначно определить, в каком из аттракторов окажется траектория. Речь идет о неразрешимой аналитически системе нелинейных дифференциальных уравнений без каких-либо случайных величин. Очень малые изменения начальных условий, параметров системы или изменения численного метода исследований приводят к тому, что расчетные траектории системы попадают в различные аттракторы. Таким образом, для многих траекторий системы детерминированное предсказание их предельных (конечных) состояний становится невозможным.

Для улучшения качества прогноза представляют интерес исследования возможности вероятностного описания случайной синхронизации движения систем, то есть исследования возможности описания способности аттракторов «притягивать» траектории («мощности» аттракторов) некоторым числом.

Уточним задачу вероятностного прогноза предельных неустойчивых движений. Для этого выделим класс систем, обладающих следующими свойствами: все траектории системы стремятся к некоторым предельным движениям (аттракторам); количество аттракторов конечное; количество аттракторов и их свойства стационарны, то есть не зависят от времени; в пространстве начальных данных траекторий существует область, для которой очень малые изменения фиксированных

начальных данных или параметров системы приводят к «попаданию» траектории в другой аттрактор. Используемый термин «очень малые изменения» не может быть определен в общем случае – он определяется постановкой конкретной задачи. Речь идет о точности измерения или задания начальных условий и параметров конкретной системы. Для задач классической механики, по-видимому, абсолютной погрешностью задания начального положения траектории и параметров системы является величина, сопоставимая с размером молекулы [26]. Назовем этот класс систем классом p (probability). Именно для систем этого класса будем рассматривать задачу вероятностного описания предельных движений.

В работах [3;16;17;21] предложен подход к вероятностному прогнозу предельных движений гамильтоновых систем при воздействии малых диссипативных возмущений. Для систем с одной степенью свободы дано определение вероятности и приведено утверждение, позволяющее рассчитывать вероятности предельных движений. Это утверждение (доказательство которого в [23] предоставлено читателям, а в [21] дано громоздкое и не очень ясное доказательство несколько другого утверждения), как представляется, требует некоторых уточнений. Но основным недостатком предложенного подхода видится способ введения вероятности предельных движений. Использованный при этом предельный переход при стремлении к нулю возмущающих сил, в том числе и описывающих диссипацию, сильно ограничивает область применимости данного подхода. Это связано, во-первых, с тем, что, вообще говоря, нас интересует прогноз движения при некотором фиксированном, а не бесконечно малом значении коэффициента диссипации. А, во-вторых, с тем, что изменение диссипативных сил приводит к перестройке структуры фазового пространства, к появлению или исчезновению притягивающих множеств. Например, в задаче движения орбитального маятника изменение коэффициента вязкого трения обуславливает изменения количества аттракторов (резонансов), в которые может быть «захвачена» траектория [24].

Другой подход вычисления вероятности предельных движений был использован в [4;8;10]. Он основан на утверждении, которое можно сформулировать следующим образом: каково бы не было непрерывное распределение начальных условий равномерно вращающейся фазы при стремлении времени к бесконечности, распределение фазы будет стремиться к равномерному. Это утверждение представляется достаточно очевидным с физической точки зрения и позволяет обосновать равновероятность исходов рулетки и вероятность 0.5 выпадения стороны монеты при бесконечно больших начальных скоростях подбрасывания. Однако этот подход имеет и очевидные недостатки. Во-первых, его трудно распространить на более сложные системы, когда нельзя выделить независящую от других переменных вращающуюся фазу. Во-вторых, он не позволяет судить о вероятности предельных движений, когда время их установления далеко от бесконечного. Ведь несомненно, что начальное распределение отклонений при подбрасывании монеты рукой существенно скажется на распределении исхода (рассматривается процесс без соударений). В-третьих, и самое важное, данный подход вводит вероятность в задачи через вероятность ошибок начальных данных, то есть выводит вопрос об особенностях и содержательности вероятностного предсказания предельных движений за рамки рассматриваемых задач.

Таким образом, существует класс систем, для которых вероятностное описание предельных движений может повысить качество прогноза. В литературе имеются

подходы к определению вероятности предельных движений таких систем, подтверждающие существование вероятностей, как характеристик (свойств) системы, не зависящих от начальных условий траекторий. Однако предложенные подходы представляются несколько ограниченными и решение проблемы требует более тщательного ее анализа.

Целесообразно исследование возможности улучшения прогноза неустойчивых движений путем введения вероятностного описания начать с наиболее простых задач, для которых накоплены знания по вероятностному прогнозу движений. К таким задачам относятся классические случайные процессы: подбрасывание монеты и подбрасывание кубика. Для обеих задач признана информативность вероятностного прогноза предельных движений, и оба процесса могут быть достаточно просто описаны в рамках моделей классической механики. В пользу использования таких простых задач выступает и тот факт, что достаточно подробный статистический анализ потребует проведение многочисленных расчетов.

Исследованию процесса подбрасывания монеты уделяется традиционно большое внимание [4;6-8;10;11;14]. В работах получены и содержательные, и противоречивые результаты. Например, в [6;7] утверждается, что процесс является детерминированным, но ошибки задания начальных условий не позволяют предсказать его исход. По-видимому, авторы используют философские обобщения, поскольку иначе детерминированность процесса, в котором нельзя предсказать исход, определяется умением авторов строить модели классической механики.

Задача исследования процесса подбрасывания кубика более широкая, чем для монеты. В данном случае при введении асимметрии, например при разной длине граней кубика или смещении его центра масс от геометрического центра, вероятности предельных движений не очевидны [2] (их нельзя определить из соображений симметрии). При исследовании процесса подбрасывания кубика возникает и задача определения зависимости вероятностей от механических параметров системы, таких как моменты инерции, соотношения длин сторон, коэффициентов соударения кубика о поверхность. Представляется, что задача исследования процесса подбрасывания кубика сочетает простоту моделей динамики и общность задачи исследования, и позволит уточнить основные понятия и выработать подходы для вероятностного прогноза предельных движений систем класса p.

Библиографические ссылки

1. Dynamics of Tethered Space System [Text]/ A. P. Alpatov [et al.] – Taylor & Francis Group, 2010. – 223 p.

2. **Blais, B. S.** Teaching Bayesian Model Comparison With the Three-sided Coin [Text]/ B.S.Blais , S.R. Kuindersma // The American Statistician. – 2007. – Vol. 61, № 3. – P. 239 – 244.

3. **Devaney, R.L.** An Introduction to Chaotic Dynamical Systems [Text]/ R.L. Devaney – Second ed. – N. Y.: Addison-Wesley Publ., 1989. – 336 p.

4. **Diaconis, P.** Dynamical Bias in the Coin Toss [Text]/ P. Diaconis, S. Holmes, R. Montgomery // SIAM review. – 2007. – Vol. 49, № 2. – P. 211 – 235.

5. **Freidlin, M. I.** Random Perturbation of Dynamical systems [Text]/ M. I. Freidlin, A. D. Wentzell. – Second ed. – N.Y. : Springer, 1998. – 445 p.

6. Dynamics of coin tossing is predictable [Text]/ J. Grabski [et al.] // Physics Rep. – 2008. – Vol. 34. – P. 59 – 92.

7. Understanding coin-tossing [Text] / J. Grabski [et al.] // Mathematical intelligencer. – 2010. – Vol. 32, № 4. – P. 54 – 58.

8. **Keller, J. B.** The probability of heads [Text] / J. B. Keller // American Mathematical. – 1986. – Vol. 93. – P. 191 – 197.

9. **Luo, A. C. J.** Motion Switching and Chaos of a Particle in a Generalized Fermi-Acceleration Oscillator [Text] / A. C. J. Luo, Y. Guo // Mathematical Problems in Engineer ing. – Vol. 2009 (2009). – Article ID 298906. – 40 p.

10.**Mahadevan, L.** Probability and dynamics in the toss of a non-bouncing thick coin [Electronic resource]/ L.Mahadevan. – Access mode: http://arxiv.org/pdf/ 1008.4559v3.pdf. – Title from the screen.

11. **Nagler, J.** How random is dice tossing? [Electronic resource]/J.Nagler. – Access mode: http://pre.aps.org/abstract/ PRE/ v78/i3/e036207. – Title from the screen.

12.**Okninski, A.** Dynamics of impacts with a table moving with piecewise constant velocity [Text]/ A. Okninski, B. Radziszewski // Nonlinear Dynamics. – 2009. – Vol. 58. – P. 515-523.

13. **Okninski, A.** An analytical and numerical study of chaotic dynamics in a simple bouncing ball model [Text]/ A. Okninski, B. Radziszewski // Acta Mechanica Sinica. – 2011. – Vol. 27, № 1. – P. 130 – 134.

14.**Snell, L.** Flipping, spinning and tilting coins [Electronic resource]/L.Snell. – Access mode: http://www.dartmouth.edu/~chance/chance_news/recent_news/chance_news_11.02.html. – Title from the screen.

15. Синхронизация регулярных, хаотических и стохастических колебаний [Текст] / В.С. Анищенко, В. В.Астахов, Т.Е.Вадивасова, Г.И. Стрелкова. – РХД, 2008. – 144 с.

16. **Арнольд, В. И.** Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической механики и небесной механики [Текст] / В. И. Арнольд // Успехи мат. наук. – 1963. – Т. XVIII, вып. 6 (144). – С. 91 – 192.

17. **Арнольд, В. И.** Математические методы классической механики [Текст] / В. И. Арнольд, В.В.Козлов, А.И.Нейштадт. – М.: Наука, 1989. – 472 с.

18. **Лоскутов, А. Ю.** Очарование хаоса [Текст] / А. Ю. Лоскутов // УФН – 2010. – Т. 180, №12 – С. 1305-1329.

19.**Мун, Ф.** Хаотические колебания: вводный курс для научных работников и инженеров [Текст]: пер. с англ. / Ф. Мун. – М.: Мир, 1990. – 311 с.

20. **Нейштадт, А. И.** Вероятностные явления в возмущенных динамических системах [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.iki.rssi.ru/seminar/200001/abstract.html. – Загл. с экрана.

21. **Нейштадт, А. И.** Захват в резонанс и рассеяние на резонансах в двухчастотных системах [Текст] /А.И. Нейштадт // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. − 2005.− Т. 250 − С. 198–218.

22. **Пироженко, А. В.** Хаотические режимы движения в динамике космических тросовых систем. 2. Механический образ явления [Текст] / А. В. Пироженко // Косм. наука і технологія. – 2001. – Т. 7, № 2/3. – С. 90 – 99.

23. **Пироженко, А. В.** Хаотические режимы движения в динамике космических тросовых систем. 1. Анализ проблемы [Текст] /А.В. Пироженко // Косм. наука і технологія. — 2001. — Т. 7, № 2/3. — С. 83–89.

24. **Пироженко, А. В.** Хаотические режимы движения в динамике космических тросовых систем. 3. Влияние диссипации энергии [Текст] / А. В. Пироженко // Косм. наука і технологія. – 2001. – Т. 7, № 5/6. – С. 13 – 20.

25. **Пуанкаре, А.** О науке [Текст] : пер. с фр. / А. Пуанкаре. – М.: Наука. Гл. ред. физ - мат. лит., 1983 – 560 с.

26. **Харламов, П.В.** Очерки об основаниях механики [Текст] /П.В. Харламов – К.: Наук. думка, 1995. – 407 с.

Надійшла до редколегії 16.02.2015