

УДК 532.59

V. Katan

Oles Honchar Dnipropetrovsk National University

THE IMPACT INTERACTION OF THE DISK AND THE LIQUID FOR LIMIT VALUES OF THE FROUDE NUMBER

The problem of a disk and an incompressible fluid interaction at different values of the Froude number is examined. The boundary integral equation method (the BIE method) is used to solve tasks. Fredholm boundary integral equation of second kind for low Froude numbers is taken and transformed to clear analytical form consists of integrals obtained from complete elliptic integrals. The analytical solution of the problem of the impact drive at low Froude numbers is represented. Values of the potentials, normal and tangential velocities for the other limit case of impact for high Froude numbers are calculated by known formula. The graph of changes in potentials, normal and tangential velocity on the disk surface and on the free surface are illustrated. The dimensionless coefficient of the associated mass for low Froude numbers is presented. The solution can be used for the debugging programs of numerical calculation of the fluid movement with a free surface as a test.

Key words: impact interaction, Froude number, impulsive pressure, coefficient of the added mass.

Решена задача удара диска с несжимаемой жидкостью для разных значений числа Фруда. Для решения использован метод граничных интегральных уравнений (ГИУ). Полученное граничное интегральное уравнение Фредгольма второго рода для малых чисел Фруда сведено к явному аналитическому выражению, содержащему интегралы от полных эллиптических интегралов. Приведено аналитическое решение задачи удара для малых чисел Фруда. Для другого предельного случая удара при больших числах Фруда значения потенциала, нормальной и тангенциальной скоростей получены с помощью известной формулы. Изменения значений потенциала, нормальной и тангенциальной скорости на поверхности диска и на свободной поверхности представлены графически. Приведено полученное значение коэффициента ударной присоединенной массы для диска при малых числах Фруда. Данное решение может быть использовано в качестве тестового для проверки программ решения задач движения жидкости со свободной поверхностью численными методами.

Ключевые слова: ударное взаимодействие, число Фруда, импульсное давление, коэффициент присоединенной массы.

Розв'язано задачу удару диска із нестискуваною рідиною для різних значень числа Фруда. Для розв'язання застосовано метод граничних інтегральних рівнянь (ГІР). Отримане граничне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду для малих чисел Фруда зведено до явного аналітичного виразу, що містить інтеграли від повних еліптических інтегралів. Наведено аналітичний розв'язок задачі удара для малих чисел Фруда. Для іншого граничного випадку удара за великих чисел Фруда значення потенціалу, нормальної та тангенціальної швидкостей отримані за відомою формулою. Зміни значень потенціалу, нормальної та тангенціальної швидкості на поверхні диска та на вільній поверхні наведено графічно. Представлено значення коефіцієнта ударної присоединеної маси для диска за малих чисел Фруда. Отриманий розв'язок можна застосовувати як тестовий для перевірки програм розв'язання задач руху рідини із вільною поверхнею числовими методами.

Ключові слова: ударна взаємодія, число Фруда, імпульсний тиск, коефіцієнт присоединеної маси.

Introduction. The boundary integral equation method (the BIE method) is widely used to solve tasks in fluid mechanics [1;2;3]. The boundary problem for determining the flow potential ϕ is reduced to solving one or more of Fredholm integral equations of the first or second kind, which are solved by numerical methods.

However, in one case, the solution of the integral equation may be derived analytically. Suppose, that the discs is floating on the surface of an incompressible fluid

and at time $t = 0$ acquires a velocity V by a stroke, aimed at rates to the disk surface S . The flow potential φ in the next moment of impact is determined by the boundary value problem of the Laplace equation. On the disc surface S the condition of impermeability is satisfied

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = V, \quad (1)$$

and on the free surface of the liquid Γ the form of the boundary condition dependents on the Froude number $Fr = \frac{V}{\sqrt{ga}}$. For large values of the Froude number, limit relation is

used when $Fr \rightarrow \infty$ and the condition for the absence of impulsive pressure is satisfied on the free surface [4]

$$\left. \varphi \right|_{\Gamma} = 0. \quad (2)$$

For small values of the Froude number, the limit relation when $Fr = 0$ is used and condition of the absence of wave generation is satisfied on the free surface [4]

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0. \quad (3)$$

In both cases, the damping condition of perturbations is satisfied at infinity.

The BIE method. The basic ratio of the BIE method has the form [3]

$$\Omega_P \varphi(P) = \int_{S+\Gamma} \left\{ \varphi(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} - G(P, Q) \frac{\partial \varphi}{\partial n_Q}(Q) \right\} d\sigma_Q, \quad (4)$$

where $G(P, Q)$ – is the fundamental solution of the Laplace equation; Ω_P – is the solid angle at which the boundary $S + \Gamma$ of the flow region is visible from the point P .

Any fundamental solution of the Laplace equation can be taken as the function $G(P, Q)$, for example, the most simple form

$$G(P, Q) = \frac{1}{r_{PQ}}, \quad (5)$$

where r_{PQ} – is the distance between the points P and Q .

In the event of an impact at high Froude numbers the boundary task (1) – (2) is reduced to solving a system of two integral equations

$$\Omega_P \varphi(P) = \int_S \varphi(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \left[\frac{1}{r_{PQ}} \right] d\sigma_Q - \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial n_Q}(Q) \frac{d\sigma_Q}{r_{PQ}} - V \int_S \frac{d\sigma_Q}{r_{PQ}}, \quad P \in S \quad (6)$$

$$0 = \int_S \varphi(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \left[\frac{1}{r_{PQ}} \right] d\sigma_Q - \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial n_Q}(Q) \frac{d\sigma_Q}{r_{PQ}} - V \int_S \frac{d\sigma_Q}{r_{PQ}}, \quad P \in \Gamma \quad (7)$$

At low Froude numbers boundary value problem (1), (3) reduces to a Fredholm integral equation of the second kind

$$\Omega_P \varphi(P) = \int_{S+\Gamma} \varphi(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \left[\frac{1}{r_{PQ}} \right] d\sigma_Q - V \int_S \frac{d\sigma_Q}{r_{PQ}}, \quad P \in S + \Gamma \quad (8)$$

Considering the specific form of the border $S + \Gamma$ – the half-plane $z = 0$, we can simplify the equation (6) – (8) by the relation $\frac{\partial}{\partial n_Q} \left[\frac{1}{r_{PQ}} \right] = 0, P, Q \in S + \Gamma$.

Then the system of integral equations (6) – (7) is reduced to a Fredholm integral equation of the first kind regarding the normal derivative $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ on the free surface Γ

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial n_Q}(Q) \frac{d\sigma_Q}{r_{PQ}} + V \int_S \frac{d\sigma_Q}{r_{PQ}}, \quad P \in \Gamma, \quad (9)$$

and the ratio to determine the potential φ on the surface of the disk S

$$\Omega_P \varphi(P) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial n_Q}(Q) \frac{d\sigma_Q}{r_{PQ}} - V \int_S \frac{d\sigma_Q}{r_{PQ}}, \quad P \in S. \quad (10)$$

The integral equation (8) becomes the ratio for the determination of the potential φ on the surface $S + \Gamma$

$$\Omega_P \varphi(P) = -V \int_S \frac{d\sigma_Q}{r_{PQ}}, \quad P \in S + \Gamma, \quad (11)$$

which allows us to obtain an analytical solution of the boundary integral equation.

In the integral surface (11), the distance between points P and Q is determined by the formula $r_{PQ}^2 = r_P^2 + r_Q^2 - 2r_P r_Q \cos(\omega_Q - \omega_P)$.

The surface integral can be represented as an iterated integral

$$\int_S \frac{d\sigma_Q}{r_{PQ}} = \int_0^a r_Q dr_Q \int_{\omega_P}^{2\pi+\omega_P} \frac{d\omega_Q}{r_{PQ}}.$$

The inner integral is transformed to the complete elliptic integrals of the first kind, for that aim the distance r_{PQ} in the form of

$$r_{PQ} = R(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2},$$

where

$$R = r_P + r_Q, \quad k^2 = 4r_P r_Q R^{-2}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega_Q - \omega_P}{2}.$$

Then (5)

$$\int_{\omega_P}^{2\pi+\omega_P} \frac{d\omega_Q}{r_{PQ}} = \frac{4}{R} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} = \frac{4}{R} K(k). \quad (12)$$

Considering the relation (12) formula (11) is represented as

$$\varphi(P) = -\frac{2}{\pi} V \int_0^a K(k) \frac{r_Q}{R} dr_Q, \quad P \in S + \Gamma. \quad (13)$$

Further transformation depends on the location of the point P on the disc surface S and on the free surface Γ . In the case where the point P belongs to the free surface Γ , $r_P > a$ and $r_Q > r_P$ and the replacement $r_Q = zr_P$ is used. Then

$$dr_Q = r_P dz, \quad R = (1+z)r_P, \quad k = \frac{2\sqrt{z}}{1+z}, \quad r_Q = 0 \rightarrow z = 0, \quad r_Q = a \rightarrow z = a/r_P,$$

$$I = r_P \int_0^{a/r_P} K\left(\frac{2\sqrt{z}}{1+z}\right) \frac{z}{1+z} dz = r_P \int_0^{a/r_P} z K(z) dz = r_P \left\{ E\left(\frac{a}{r_P}\right) - \left[1 - \left(\frac{a}{r_P}\right)^2 \right] K\left(\frac{a}{r_P}\right) \right\}.$$

In the last conversion the transition to the next module formula was used and integration formula on modulo [5]. Therefore, if the point P belongs to the free surface Γ , the flow potential φ has the form

$$\varphi(P) = -\frac{2}{\pi} V r_P \left\{ E\left(\frac{a}{r_P}\right) - \left[1 - \left(\frac{a}{r_P}\right)^2 \right] K\left(\frac{a}{r_P}\right) \right\}. \quad (14)$$

If the point P belongs to the disc surface S , then $r_P < a$ the region of integration, and in formula (13) consists of two segments $[0; r_P]$, $[r_P; a]$, i.e.

$$I = \int_0^{r_P} K(k) \frac{r_Q}{R} dr_Q + \int_{r_P}^a K(k) \frac{r_Q}{R} dr_Q.$$

In the first integral the replacement $r_Q = zr_P$ leads to the following result

$$\int_0^{r_P} K(k) \frac{r_Q}{R} dr_Q = r_P \int_0^1 z K(z) dz = r_P \left[E(z) - \left[1 - (z)^2 \right] K(z) \right]_0^1 = r_P. \quad (15)$$

In the second integral, the next replacement is used

$$r_P = zr_Q, \quad dr_Q = -\frac{r_P dz}{z^2}, \quad R = r_P \frac{1+z}{z}, \quad k = \frac{2\sqrt{z}}{1+z}, \quad r_Q = r_P \rightarrow z = 1, \quad r_Q = a \rightarrow z = r_P/a,$$

$$\int_{r_P}^a K(k) \frac{r_Q}{R} dr_Q = r_P \int_0^1 K(z) \frac{dz}{z^2} = -r_P \left. \frac{E(z)}{z} \right|_{r_P/a}^1 = -r_P + a E\left(\frac{r_P}{a}\right). \quad (16)$$

In view of (15) and (16) we obtain for the potential of a point P which is belonging to the disk surface S

$$\varphi(P) = -\frac{2}{\pi} V a E\left(\frac{r_P}{a}\right). \quad (17)$$

Formulas (11) and (17) represent the analytical solution of the problem of the impact drive at low Froude numbers.

A question about the behavior of the received solution at infinity is very interesting when $r_P \rightarrow \infty$. The formula (14) is represented as

$$\varphi(P) = -\frac{2}{\pi} V a \Phi(t), \quad (18)$$

where $\Phi(t) = t^{-1} \left[E(t) - \left[1 - t^2 \right] K(t) \right]$, $t = a/r_P$.

When $r_P \rightarrow \infty \Rightarrow t \rightarrow 0$ and the function $\Phi(t)$ using the concepts of complete elliptic integrals for small values of the module takes the form

$$\Phi(t) = \frac{\pi}{4}t + O(t^2).$$

Consequently, according to the formula (18) the potential φ , when $r_P \rightarrow \infty$, tends to zero and conditions of the damping of perturbations at infinity are performed.

The dimensionless coefficient of the associated mass $\mu = \frac{\lambda}{\rho a^3}$ is defined by the formula

$$\mu = -2\pi \int_0^a \frac{\varphi r dr}{a^2} = 4 \int_0^a E\left(\frac{r}{a}\right) \frac{r}{a} d\left(\frac{r}{a}\right) = 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \left[(1+t^2)E(t) - (1-t^2)K(t) \right]_0^1 = \frac{8}{3}.$$

Consequently, the coefficient of the attached disk mass, when the number of $Fr = 0$ is equal to

$$\lambda = \frac{8}{3} \rho a^3. \quad (19)$$

The speed on the disk surface and the fluid v_r can easily be determined by differentiating the equations (14) and (17) on the variable r

$$v_r = -\frac{2}{\pi} V \begin{cases} \frac{a}{r} \left[E\left(\frac{r}{a}\right) - K\left(\frac{r}{a}\right) \right], & r < a, \\ E\left(\frac{a}{r}\right) - K\left(\frac{a}{r}\right), & r > a. \end{cases} \quad (20)$$

In case of an impact at higher Froude numbers, the applying of these transformations leads equation (9) and equation (10) to the next form

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_P} \int_a^{r_P} \frac{\partial \varphi}{\partial n}(Q) K\left(\frac{r_Q}{r_P}\right) r_Q dr_Q + \int_{r_P}^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial n}(Q) K\left(\frac{r_Q}{r_P}\right) dr_Q &= r_P \left\{ K\left(\frac{a}{r_P}\right) \left[1 - \left(\frac{a}{r_P} \right)^2 \right] - E\left(\frac{a}{r_P}\right) \right\}, \quad r_P > a, \\ \varphi(r_P) &= -\frac{2}{\pi} \left\{ a E\left(\frac{r_P}{a}\right) + \int_a^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial n}(Q) K\left(\frac{r_P}{r_Q}\right) dr_Q \right\}, \quad r_P < a. \end{aligned} \quad (21)$$

However, it is impossible to get an analytical solution from the system (21). Although this analytical solution is known, and it has the form [4; 6 – 7]

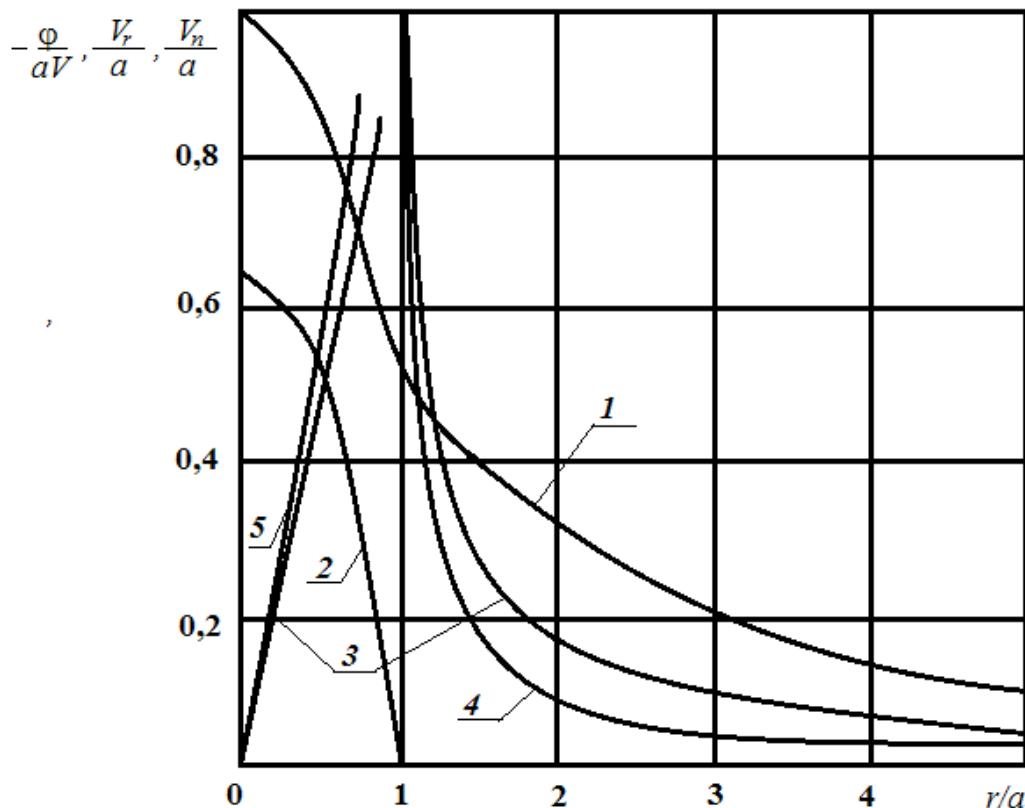
$$\begin{aligned} \varphi(r_P) &= -\frac{2}{\pi} a V \sqrt{1 - (r_P/a)^2}, \quad r_P < a, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n}(r_P) &= -\frac{2}{\pi} V \left[\frac{1}{\sqrt{(r_P/a)^2 - 1}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{(r_P/a)^2 - 1}} \right], \quad r_P > a, \\ v_r(r_P) &= \frac{2}{\pi} \frac{r_P/a}{\sqrt{1 - (r_P/a)^2}}, \quad r_P < a, \\ v_r(r_P) &= 0, \quad r_P > a. \end{aligned} \quad (22)$$

It is interesting to compare the obtained solution (14), (17), (20) with the solution (22). According to the program for the ECM, values of the potentials, normal and tangential velocities for the two cases of impact were calculated. Printout of the program and the results of calculations are applied.

The graph of changes in potentials, normal and tangential velocity on the disk surface and on the free surface are illustrated on the fig. 1. It is a continuous function at low Froude numbers. The impulsive pressure, determined by the potential,

$$p_t = -\rho\varphi ,$$

has greater values at low Froude numbers, than in the case of an impact at high Froude numbers.



**Fig. 1. Changes in potentials, normal and tangential velocities
on the disk surface and on the free surface:**

1 – $\varphi, Fr \rightarrow 0$; 2 – $\varphi, Fr \rightarrow \infty$; 3 – $v_r, Fr \rightarrow 0$; 4 – $v_n, Fr \rightarrow \infty$; 5 – $v_r, Fr \rightarrow \infty$.

Conditions (3) on the free surface of the liquid means, that there is a cover, that prevents movement of the liquid. So the maximum value of the impulsive pressure and the coefficient of the associated mass is bigger, than when the impact at high Froude numbers happens. When tendency $r_p \rightarrow a$ at the disk surface, velocity v_r tends to infinity, but more slowly than at higher Froude numbers.

The solution (14), (17) can be obtained from the general formula for the Neumann task for the halfspace [8], in which the point P should be chosen on the surface.

Conclusions. The obtained solution can be used for the debugging programs of numerical calculation of the fluid movement with a free surface as a test.

References

1. Бенерджи, П. Методы граничных элементов в прикладных науках [Текст] / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М.: Мир,1984. – 494 с.
2. Бреббіл, К. Применение метода граничных элементов в технике [Текст] / К. Бреббіл, С. Уокер. – М.: Мир,1982. – 248 с.
3. Метод граничных интегральных уравнений [Текст]/ ред. Т. Круз, Ф. Риццо; пер. с англ. В.М. Вайншельбаума; под ред. Р. В. Гольдштейна. – М.: Мир,1978. – 216 с.
4. Григолюк, Э. И. Погружение упругих оболочек вращения в жидкости [Текст]/ Э. И. Григолюк, А. Г. Горшков // Итоги науки и техники. Механика деформированного твердого тела. – М., 1977. – Т. 10. – С. 63 – 113.
5. Янке, Е. Специальные функции [Текст]/ Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1977. – 344 с.
6. Kochin, N. E. Теоретическая гидромеханика [Текст]/ Н. Е. Kochin, И. А. Кибель, Н. В. Розе. – М.: Гостехиздат,1948. – Ч.1. – 684 с.
7. Бэтгелар, Дж. Введение в динамику жидкости [Текст]/ Дж.Бэтгелар. – М.: Мир, 1973. –758 с.
8. Соболев, С.Л. Уравнение математической функции [Текст]/ С. Л.Соболев. – М.: Наука, 1966. – 44 с.

Надійшла до редакції 14.05.2015

УДК 531.36

А. В. Пироженко, Е. В. Меньков

*Інститут технической механики Национальной академии наук Украины
и Государственного космического агентства Украины*

К ВЕРОЯТНОСТНОМУ ОПИСАНИЮ НЕУСТОЙЧИВЫХ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Исследована проблема прогноза неустойчивых движений механических систем на длительном интервале времени. Предположено, что основные закономерности движения систем можно описывать детерминированными законами классической (ニュートン) механики. Проанализированы проблемы вероятностного описания неустойчивых движений в задачах классической механики. На простых примерах рассмотрено соотношение случайности и определенности в неустойчивых механических движениях, выяснена содержательность задачи вероятностного описания таких движений. Выявлены связи данной проблемы с актуальными проблемами детерминированного хаоса: определено существование целого класса систем, для которых детерминированное предсказание их предельных (конечных) состояний становится невозможным. Доказано, что для рассматриваемого класса систем наиболее целесообразным является вероятностный подход описания предельных движений, так как, применяя такой подход, можно существенно улучшить качество прогноза. Проведен анализ научных подходов к вероятностному прогнозу предельных неустойчивых движений. Рассмотрены различные методы определения вероятности предельного положения системы с неустойчивыми движениями. Показано, что решение проблемы вероятностного описания предельных движений систем с неустойчивыми механическими движениями требует более тщательного анализа. Поставлены задачи дальнейших исследований.