2. **Беляев, Н. Н.** Моделирование нестационарных процессов аварийного загрязнения атмосферы: монография [Текст] / Н. Н. Беляев, А. В. Берлов, П. Б. Машихина. – Д.: «Акцент ПП», 2014. – 127 с.

3. **Беляев, Н. Н.** Прогнозирование загрязнения приземного слоя атмосферы при горении твердого ракетного топлива в хранилище [Текст] / Н. Н. Беляев, А. В. Берлов // Зб. наук. пр. НГУ. – 2013. – № 42. – С.160 – 167.

4. **Беляев, Н. Н.** Моделирование процесса загрязнения атмосферы при горении твердого ракетного топлива [Текст] / Н. Н. Беляев, А. В. Берлов // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер.: Механіка, 2013. – Вип. 17,Т.1. – С.179 – 184.

5. **Беляев, Н. Н.** Моделирование аварийного загрязнения атмосферы при чрезвычайной ситуации в хранилище твердого ракетного топлива [Текст] / Н. Н. Беляев, А. В. Берлов, А. В. Шевченко // Наука та прогрес транспорту. Екологія на транспорті. Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2014. – Вип. 5 (53). – С.29 – 38.

6. **Берлов, А. В.** Расчет загрязнения приземного слоя атмосферы при горении твердого ракетного топлива [Текст] / А. В. Берлов // Зб. наук. пр. «Науковий вісник будівництва» – Х.: Харк. нац. ун-т буд-ва та архіт., 2014. – №1(75). – С.185 – 189.

7. **Берлянд, М. Е.** Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы [Текст] / М. Е. Берлянд. – Л.: Гидрометеоиздат, 1985. – 273 с.

8. **Гусев, Н. Г.** Радиоактивные выбросы в биосфере [Текст] / Н. Г. Гусев, В. А. Беляев. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 256 с.

9. **Израэль, Ю. А.** Экология и контроль состояния природной среды [Текст] / Ю. А. Израэль. – М.: Гидрометеоиздат, 1984. – 560 с.

10.**Марчук, Г. И.** Математическое моделирование в проблеме окружающей среды [Текст] / Г. И. Марчук – М.: Наука, 1982. – 320 с.

11.**Устименко, Е. Б.** К вопросу об экологических последствиях утилизации ракетных двигателей твердого топлива методом взрывания [Текст] / Е. Б. Устименко // Наук. вісн. НГУ. – 2008. – № 5. – С.78 – 82.

12.Численное моделирование распространения загрязнения в окружающей среде [Текст] / М. З. Згуровский, В. В. Скопецкий, В. К. Хрущ, Н. Н. Беляев. – К.: Наук. думка, 1997. – 368 с.

13.**Biliaiev, M.** Numerical Simulation of Indoor Air Pollution and Atmosphere Pollution for Regions Having Complex Topography [Text] / M. Biliaiev // Springer: Air Pollution Modeling and its Application XXI. – 2012. – PP.87 – 91.

Надійшла до редколегії 10.06.2015

УДК 539.374

И.С. Онищенко

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

ИЗМЕНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ТЕКУЧЕСТИ ПОСЛЕ КОНЕЧНОЙ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

В рамках сформулированных гипоупруговязкопластических определяющих соотношений теории микродеформации, чувствительной к скорости деформации и температуре исследовано изменение поверхности текучести при конечной деформации. Для построения поверхности текучести использованы результаты решения задачи о конечной вязкопластической деформации тонкостенной трубки при комбинированном нагружении. Задача о конечной

© И.С. Онищенко, 2015

деформации тонкостенной трубки при совместном действии растягивающего усилия и крутящего момента сведена к задаче Коши. Последняя решена численно с помощью метода Эйлера. На основании предложенного алгоритма построена поверхность текучести для частного случая знакопеременного кручения тонкостенной трубки и проведено сравнение ее формы с теоретическими и экспериментальными данными. Показано, что данный вариант теории микродеформации позволяет повысить точность описания поверхности текучести при сложном нагружении по сравнению с результатами, полученными при использовании обобщенной континуальной теории гипоупругопластичности с комбинированным упрочнением при условии текучести Губера–Мизеса.

Ключевые слова: теория микродеформации, вязкопластичность, гипоупругость, конечные деформации, тонкостенная трубка.

У межах сформульованих гіпопружнов'язкопластичних визначальних співвідношень теорії мікродеформації, чутливої до швидкості деформації та температури, досліджено зміну поверхні текучості за умови скінченної деформації. Для побудови поверхні текучості застосовано результати задачі про скінченну в'язкопластичну деформацію тонкостінної трубки під час комбінованого навантаження. Задачу про скінченну деформацію тонкостінної трубки за спільної дії розтяжного зусилля й крутного моменту зведено до задачі Коші, розв'язаної методом Ейлера. На основі запропонованого алгоритму побудовано поверхню текучості для окремого випадку знакозмінного кручення тонкостінної трубки та зіставлено її форму з теоретичними й експериментальними даними. Доведено, що запропонований варіант теорії мікродеформації дозволяє поліпшити точність опису поверхні текучості за умови складного навантаження порівняно з результатами, отриманими під час застосування узагальненої континуальної теорії гіпопружнопластичних із комбінованим зміцненням за умови текучості Губера-Мізеса.

Ключові слова: теорія мікродеформацій, в'язкопластичний, гіпопружність, скінченні деформації, тонкостінна трубка.

In hypoelastic – viscoplastic constitutive relations theory microstrain sensitive to strain rate and temperature change of research fluidity surface in the ultimate deformation. Thus, for the construction of surface flow uses the results of the final solution of the problem of visco–plastic strain of thin–walled tubes when combined loading. Ultimately, the numerical analysis of finite deformation of thin–walled tube is reduced to the solution of the Cauchy problem, the combined action of the tensile force and torque. The surface flow for the particular case of alternating torsion of thin–walled tube is built on the basis of the proposed algorithm, and comparisons carried out its shape known in the literature with theoretical and experimental data. The results presented show that the use of the proposed version of the theory microstrain can improve the yield surface description under complex loading in comparison with the results obtained using the continuum hypoelasticplasticity theories combined hardening provided Huber–Mises stress.

Key words: theory microstrain, viscoplasticity, hypoelastic, finite deformation, thin–walled tube.

Введение. Теоретическому и экспериментальному изучению поведения поверхности текучести при простом и сложном нагружении в пределах малой пластической деформации посвящен целый ряд работ [19; 20; 11; 16; 5]. При конечной деформации задача существенно усложняется, поскольку в этом случае приходится дополнительно учитывать особенности поведения не только материала, но и испытуемого образца, то есть задача становится и физически, и геометрически нелинейной. Результаты анализа конечной пластической деформации тонкостенной трубки приведены в [7; 8] для целого ряда вариантов континуальной теории гипоупругопластичности с условием текучести в форме Губера–Мизеса и комбинированным упрочнением.

В настоящей работе исследовано поведение поверхности текучести при больших деформациях в рамках определяющих соотношений теории микродеформации, чувствительной к скорости деформации и температуре.

Постановка задачи. Рассмотрим тонкостенную трубку, которая находится под действием растягивающего усилия и крутящего момента. Пусть L, R_1 и R_2 обозначают начальную длину, внутренний и внешний радиусы трубки

соответственно. Начало координат расположим в центре одного из концов трубки, и ось Z совместим с осью трубки, тогда деформацию трубки при растяжении и кручении можно описать следующим образом [7]:

$$r = \alpha R, \quad \theta = \Theta + \omega Z, \quad z = \lambda Z \tag{1}$$

где (R, Θ, Z) и (r, θ, z) определяют положение материальной точки до и после деформации в цилиндрической системе координат, ω – относительный угол закручивания, α и λ – отношение радиусов и длин до и после деформации.

Используя кинематические соотношения, можно на основании (1) построить градиент деформации $\mathbf{F}$ и градиент деформации скорости $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{F} = \alpha \mathbf{e}_r \mathbf{e}_R + \alpha \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\Theta + \omega \alpha R_m \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_Z + \lambda \mathbf{e}_z \mathbf{e}_Z$$

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r - \dot{\omega} Z \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta + \dot{\omega} Z \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_r + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta + \dot{\phi} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_z + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z$$

где $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ и $(\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Theta, \mathbf{e}_Z)$ – базисные векторы в точке трубки до и после деформации, и $\dot{\phi}$ определяется как

$$\dot{\phi} = \frac{\alpha R_m \dot{\omega}}{\lambda},$$

а $R_m = (R_1 + R_2)/2$ используется вместо R в тонкостенных трубках.

Для деформации скорости и вращения материала образца можем записать

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta + \frac{\dot{\phi}}{2} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_z + \frac{\dot{\phi}}{2} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\theta + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{W} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) = -\frac{\lambda}{\alpha R_m} \dot{\phi} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta + \frac{\lambda}{\alpha R_m} \dot{\phi} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_r + \frac{\dot{\phi}}{2} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_z - \frac{\dot{\phi}}{2} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\theta. \end{aligned} \tag{2}$$

Градиент деформации скорости $\mathbf{L} \equiv \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$ в текущей конфигурации представляется как сумма упругой $\mathbf{L}^e$ и пластической $\mathbf{L}^p$ составляющих:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^e + \mathbf{L}^p.$$

Каждая из этих частей $\mathbf{L}$, в свою очередь, являет собой сумму деформации скорости $(\mathbf{D}^e, \mathbf{D}^p)$ и вращения $(\mathbf{W}^e, \mathbf{W}^p)$:

$$\mathbf{D}^e = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^e + \mathbf{L}^{eT}), \quad \mathbf{W}^e = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^e - \mathbf{L}^{eT}), \mathbf{D}^p = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^p + \mathbf{L}^{pT}), \quad \mathbf{W}^p = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^p - \mathbf{L}^{pT}).$$

Пусть P и M – осевое усилие и скручивающий момент в поперечном сечении трубки соответственно. В таком случае напряжения в трубке будут

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{\theta\theta} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta + \sigma_{z\theta} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\theta + \sigma_{\theta z} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_z + \sigma_{zz} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z,$$

где

$$\sigma_{zz} = \frac{P}{2\pi r (R_2 - R_1)} = \frac{P}{2\pi \alpha R_m (R_2 - R_1)},$$

$$\sigma_{z\theta} = \sigma_{\theta z} = \frac{M}{2\pi r^2 (R_2 - R_1)} = \frac{M}{2\pi \alpha^2 R_m^2 (R_2 - R_1)}.$$

Скорость по Яуманну для напряжений вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{\sigma}^{\nabla} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{W}\cdot\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{W} =$$

$$= (\dot{\sigma}_{\theta\theta} - \dot{\phi}\sigma_{\theta z})\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_\theta + \left(\dot{\sigma}_{\theta z} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})\frac{\dot{\phi}}{2}\right)\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_z +$$

$$+\left(\dot{\sigma}_{\theta z} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})\frac{\dot{\phi}}{2}\right)\mathbf{e}_z\mathbf{e}_\theta + (\dot{\sigma}_{zz} + \dot{\phi}\sigma_{\theta z})\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z +$$

$$+\frac{\lambda}{\alpha R_m}\sigma_{\theta\theta}\dot{\phi}\mathbf{e}_r\mathbf{e}_\theta + \frac{\lambda}{\alpha R_m}\sigma_{\theta\theta}\dot{\phi}\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_r + \frac{\lambda}{\alpha R_m}\dot{\phi}\sigma_{\theta z}\mathbf{e}_r\mathbf{e}_z + \frac{\lambda}{\alpha R_m}\sigma_{z\theta}\dot{\phi}\mathbf{e}_z\mathbf{e}_r .$$

Если приведенные выше зависимости дополнить определяющими соотношениями, которые свяжут $\boldsymbol{\sigma}^{\nabla}$ с $\mathbf{W},\mathbf{D}$, то задача сведется к определению четырех неизвестных $\dot{\alpha}$, $\dot{\lambda}$, $\dot{\omega}$ и $\dot{\sigma}_{\theta\theta}$ при заданной траектории нагружения $\sigma_{zz} = \sigma_{zz}(t)$ и $\sigma_{\theta z} = \sigma_{\theta z}(t)$.

Определяющие соотношения теории микродеформации. Ключевым моментом построения определяющих соотношений теории больших вязкопластических деформаций является разделение полных деформаций и их скоростей на упругую и пластическую составляющие. Можно воспользоваться схемой протекания пластической деформации, предложенной Тейлором [17], по которой пластическая деформация развивается благодаря движению дислокаций через кристаллическую решетку, тогда как сама решетка подвергается только упругой деформации и поворотам. Эта идея в [9] нашла свое отражение в представлении градиента полной деформации в форме

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_p , \tag{3}$$

где $\mathbf{F}_p, \mathbf{F}_p$ — части полного градиента деформации $\mathbf{F}$, обусловленные упругой деформации решетки и пластической деформацией соответственно.

На основании (3) определяется градиент скорости деформации $\mathbf{L}$ в текущей конфигурации K_t:

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{D} + \mathbf{W}, \tag{4}$$

где $\mathbf{D}$ – симметричный тензор деформации скорости и $\mathbf{W}$ – кососимметричный тензор вращения.

Для описания вязкопластической деформации зададим определяющие соотношения в текущей конфигурации K_t, в которой изначально принимается

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_e + \mathbf{D}_p, \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}_e + \mathbf{W}_p \tag{5}$$

Исходя из основных гипотез теории пластичности и ползучести, учитывающей микродеформации [6; 4], примем, что представительный объем материала состоит из некоторой совокупности $\alpha \in N$ взаимосвязанных микрочастиц (зерен), напряженно-деформированное состояние которых однородно и определяется микронапряжениями и микродеформациями соответственно. Обозначим через Δv_α относительный объем зерна в текущем состоянии как отношение объема зерна к представительному объему. Однородную в пределах зерна скорость

вязкопластической деформации будем характеризовать величиной $\dot{p}_\alpha$ и направлением $\mathbf{N}_\alpha \in \Omega$, где Ω – область направлений активного микропластического деформирования ($\dot{p}_\alpha > 0$). Материал принимается первоначально изотропным, следовательно, все возможные направления микропластического деформирования должны быть распределены в исходной конфигурации равномерно. В теории микродеформации принято, что направление течения зерна $\mathbf{N}_\alpha$ связано непосредственно с зерном и может изменяться при конечной деформации за счет поворота зерна. Для определения закона такого изменения необходимо задать распределение направлений в исходной конфигурации $\mathbf{N}_\alpha^0$. Направление микропластического деформирования $\mathbf{N}_\alpha$ в текущей конфигурации находим так:

$$\mathbf{N}_\alpha = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{N}_\alpha^0 \cdot \mathbf{F}_e^{-1}, \quad \mathbf{N}_\alpha^0 = \mathbf{F}_e^{-1} \cdot \mathbf{N}_\alpha \cdot \mathbf{F}_e, \tag{6}$$

где $\mathbf{N}_\alpha^0$ – направление пластического деформирования зерна в исходной конфигурации.

Скорость макропластической деформации поликристалла по отношению к промежуточной конфигурации в текущей конфигурации получается осреднением локальной скорости вязкопластической деформации по всему представительному макрообъему. В текущей конфигурации можем записать

$$\mathbf{L}_p = \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{\lambda}_\alpha \mathbf{N}_\alpha \ . \tag{7}$$

Здесь и во всех последующих формулах сумма распространяется только на направления активного микропластического деформирования.

В предположении, что вязкопластические деформации не влияют на упругую деформацию материала, можем воспользоваться гипоупругими соотношениями

$$\sigma^{\nabla_e} \equiv \dot{\sigma} - \mathbf{W}_e \cdot \sigma + \sigma \cdot \mathbf{W}_e = \mathbf{G}_e(\theta) : (\mathbf{D} - \mathbf{D}_p), \tag{8}$$

где σ^{∇_e} – производная по Яуманну от тензора напряжений Коши, σ, в осях, вращающихся с упругим поворотом, $\mathbf{G}_e$ – тензор четвертого ранга (матрица упругой жесткости), который записывается как

$$\mathbf{G}_e = 2G_0 g(\theta)\left[\frac{1}{2}\mathbf{I} + \frac{\nu}{1-2\nu}\mathbf{ii}\right],$$

где G_0 и ν – модуль сдвига при T = 0°K и коэффициент Пуассона соответственно, $\mathbf{I}, \mathbf{i}$ – единичные тензоры четвертого и второго ранга, $g(\theta)$ – функция, характеризующая зависимость упругого модуля сдвига от гомологической температуры θ ($\theta = T / T_m$, где T – температура в Кельвинах T_m – температура плавления). Зависимость упругого модуля сдвига от температуры зададим в виде[17]

$$g(\theta) = \left\{1 - \theta \exp\left[\theta^*\left(\frac{\theta - 1}{\theta}\right)\right]\right\}, \quad \theta > 0 \tag{9}$$

где θ^* – характеристическая гомологическая температура.

Если воспользоваться производной по Яуманну в осях, вращающихся с материалом,

$$\sigma^{\nabla} = \dot{\sigma} - \mathbf{W} \cdot \sigma + \sigma \cdot \mathbf{W}, \tag{10}$$

то для разности двух производных получим

$$\sigma^{\nabla} - \sigma^{\nabla_e} = -\mathbf{W}_p \cdot \sigma + \sigma \cdot \mathbf{W}_p . \tag{11}$$

Теперь на основании (10) и (11) можем записать

$$\sigma^{\nabla} = \mathbf{G}_e(\theta) : (\mathbf{D} - \mathbf{D}_p) - \mathbf{W}_p \cdot \sigma + \sigma \cdot \mathbf{W}_p , \tag{12}$$

и на основании (5) и (7) находим

$$\mathbf{D}_p = \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{p}_\alpha \mathbf{P}_\alpha v_\alpha , \ \mathbf{W}_p = \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{p}_\alpha \mathbf{M}_\alpha v_\alpha , \ \dot{P} = \sum_{\alpha=1}^{n} \dot{p}_\alpha v_\alpha , \tag{13}$$

где $\mathbf{P}_\alpha$ – симметричный направляющий девиатор, определяющий направление вязкопластического деформирования зерна, $\mathbf{M}_\alpha$ – кососимметричный тензор, определяющий поворот зерна. Имеем

$$\mathbf{P}_\alpha = (\mathbf{N}_\alpha + \mathbf{N}_\alpha^T)/2 , \ \mathbf{M}_\alpha = (\mathbf{N}_\alpha - \mathbf{N}_\alpha^T)/2 . \tag{14}$$

Для описания пластического вращения воспользуемся подходом [2]. В частности, применим предложенную им упрощенную формулу

$$\mathbf{M}_\alpha = \frac{\rho_\alpha \cdot \mathbf{N}_\alpha - \mathbf{N}_\alpha \cdot \rho_\alpha}{2\eta_\alpha} , \tag{15}$$

где ρ_α – внутренние (остаточные) напряжения, связанные со структурой материала, которые будут описаны ниже и

$$\eta_\alpha = \sqrt{(\rho_\alpha \cdot \mathbf{N}_\alpha - \mathbf{N}_\alpha \cdot \rho_\alpha) : (\rho_\alpha \cdot \mathbf{N}_\alpha - \mathbf{N}_\alpha \cdot \rho_\alpha)} . \tag{16}$$

Рассмотрим пластическое течение в таком диапазоне температур и скоростей деформации, в котором диффузионная ползучесть не являются доминирующей и деформация происходит в основном за счет движения дислокаций. Представим девиатор тензора напряжения $\mathbf{s}_\alpha$, действующего в частице с номером α, в виде трех составляющих:

$$\mathbf{s}_\alpha = \tau_\alpha + \rho_\alpha . \tag{17}$$

Такое представление есть в целом ряде работ [13; 1], и оно подобное принятым в теории микродеформации представлениям. Здесь τ_α – тензор активных или диссипативных напряжений в трактовке теории микродеформации, природа их связана с близкодействующими препятствиями. Преодолению таких препятствий может содействовать тепловая активация [22; 8]. Исходя из этого, запишем

$$\tau_\alpha = \overline{\tau}_\alpha(\dot{p}_\alpha, \theta)\mathbf{N}_\alpha, \tag{18}$$

где τ_0 – начальный предел текучести, одинаковый для всех зерен, $r(P), \overline{\tau}_\alpha$ – функции, определяющие зависимость напряжения течения τ_α в направлении $\mathbf{N}_\alpha$ от деформации ползучести и ее скорости соответственно.

Внутренние (остаточные) напряжения ρ_α связаны со структурой материала и не могут быть преодолены за счет тепловой энергии кристалла [22]. Они возникают за счет сил сопротивления дальнодействующих препятствий полям напряжений от леса дислокаций и границ зерен [8]. Влияние температуры на ρ_α осуществляется только через зависимость упругого модуля от температуры. Имеем

$$\rho_\alpha(p_\alpha, \theta) = g(\theta)\overline{\rho}_\alpha(p_\alpha)\mathbf{N}_\alpha. \tag{19}$$

На основании (17) получаем локальное динамическое условие текучести в направлении $\mathbf{N}_\alpha$

$$\mathbf{s}_\alpha : \mathbf{N}_\alpha \le \overline{\tau}_\alpha(\dot{p}_\alpha, \theta) + g(\theta)\overline{\rho}_\alpha(p_\alpha). \tag{20}$$

Равенство в последнем соотношении выполняется только для направлений активного микровязкопластического деформирования.

Для построения функции $\overline{\rho}_\alpha(p_\alpha)$ воспользуемся подходом, принятым в [4], и зададим скорость ее изменения в следующем обобщенном виде:

$$\dot{\overline{\rho}}_\alpha(p_\alpha) = R\dot{p}_\alpha - \gamma\dot{p}_\alpha\overline{\rho}_\alpha + R_2\mathbf{D}_p : \mathbf{N}_\alpha, \tag{21}$$

где

$$R = \begin{cases} R_1 & \mathbf{N}_\alpha = \mathbf{N}_{\alpha'}, \\ 0 & \mathbf{N}_\alpha \ne \mathbf{N}_{\alpha'}, \\ -R_4 R_1 & \mathbf{N}_\alpha = -\mathbf{N}_{\alpha'}. \end{cases}$$

и $\mathbf{N}_{\alpha'}$ – направление микропластического течения частицы, R_1, R_2, R_4 – константы материала.

Остановимся теперь на представлении для термически активированных напряжений течения $\overline{\tau}_\alpha$. Используем подход, предложенный в работе [20] с использованием параметра $Z_\alpha = \dot{p}_\alpha \exp(Q_\alpha / kT)$, который объединяет влияние температуры и скорости деформации в единую «базовую кривую», где Q_α – энергия активации зерна, и k – постоянная Больцмана. На основании этого подхода можем записать

$$\dot{p}_\alpha = \dot{p}_0 \exp\left(-\frac{\theta_0}{\theta}\right) F\left(\frac{\overline{\tau}_\alpha}{\overline{\tau}_0(p, \theta)}\right), \tag{22}$$

где $\dot{\overline{\tau}}_0 = R_3(r_0 - \overline{\tau}_0)\dot{p}, \quad \overline{\tau}_0(0) = \tau_0$, а $R_3, r_0, \theta_0 = Q_\alpha / k$ – константы материала.

Сравнительный анализ различных вариантов представления функций F, приведенных в обзоре [2], показал, что приемлемым является вариант, предложенный в [11], который и используется ниже:

$$F(x) = \left(\sinh x^{3/2}\right)^m. \tag{23}$$

Для построения разрешающих уравнений теории микродеформации необходимо установить связь локальных законов микро- и макроскопического деформирования. Воспользуемся простейшим соотношением

$$\langle \mathbf{s}_\alpha \rangle = \mathbf{s}_\alpha,$$

которое означает, что микронапряжения $\mathbf{s}_\alpha$ во всех зернах одинаковы и равны средним $\langle \mathbf{s}_\alpha \rangle$, тогда из (20), учитывая (17) – (19), находим

$$\bar{\tau}_\alpha(\dot{p}_\alpha, \theta) = \langle \mathbf{s} \rangle : \mathbf{N}_\alpha - g(\theta)\rho_\alpha(p_\alpha), \tag{24}$$

а из формул (13) и (24) находим

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_p &= \dot{p}_0 \exp\left(-\frac{\theta_0}{\theta}\right) \sum_{\alpha=1}^{n} F\left(\frac{\mathbf{s}:\mathbf{N}_\alpha - g(\theta)\bar{\rho}_\alpha(p_\alpha)}{\bar{\tau}_0(p,\theta)}\right) \mathbf{N}_\alpha v_\alpha \\ \mathbf{W}_p &= \dot{p}_0 \exp\left(-\frac{\theta_0}{\theta}\right) \sum_{\alpha=1}^{n} F\left(\frac{\mathbf{s}:\mathbf{N}_\alpha - g(\theta)\bar{\rho}_\alpha(p_\alpha)}{\bar{\tau}_0(p,\theta)}\right) \mathbf{M}_\alpha v_\alpha. \end{aligned}, \tag{25}$$

После подстановки (25) последних в (12) получаем выражение для производной по Яуманну от тензора напряжений Коши σ^∇.

Алгоритм и результаты численных расчетов. Используя определяющие соотношения теории микродеформации в форме (12) и записанные выше кинематические соотношения (2), приходим к задаче Коши для системы четырех дифференциальных уравнений первого порядка относительно четырех неизвестных $\dot{\alpha}$, $\dot{\lambda}$, $\dot{\omega}$ и $\dot{\sigma}_{\theta\theta}$ при заданной траектории нагружения $\sigma_{zz} = \sigma_{zz}(t)$ и $\sigma_{\theta z} = \sigma_{\theta z}(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \nu\dfrac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -D_{zz}^p(1-2\nu)/2, \\ \dfrac{2G(\theta)\nu}{(1-2\nu)}\dfrac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \dfrac{2G(\theta)(1-\nu)}{(1-2\nu)}\dfrac{\dot{\lambda}}{\lambda} + \sigma_{\theta z}\dot{\phi} = \dot{\sigma}_{zz} + 2G(\theta)D_{zz}^p, \\ 2G(\theta)\dot{\phi} = \dot{\sigma}_{\theta z} + 2G(\theta)D_{\theta z}^p - (\sigma_{zz} - \sigma_{\theta\theta})W_{\theta z}^p, \\ \dot{\sigma}_{\theta\theta} = \dfrac{2G(\theta)}{(1-2\nu)}\dfrac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \dfrac{2G(\theta)\nu}{(1-2\nu)}\dfrac{\dot{\lambda}}{\lambda} + \sigma_{\theta z}\dot{\phi} + G(\theta)D_{zz}^p - 2W_{\theta z}^p\sigma_{\theta z}. \end{cases} \tag{26}$$

Здесь учтено, что $D_{rr}^p = D_{\theta\theta}^p = -\dfrac{1}{2}D_{zz}^p$ и $\dot{\sigma}_{rr} = 0$.

Для вычисления $D_{zz}^p, D_{rr}^p, D_{\theta z}^p$ в пятимерном девиаторном пространстве вводился фиксированный ортонормированный базис $\mathbf{q}^{(k)}$, $k = 1..5$, в котором справедливы следующие разложения:

$$\mathbf{s} = s^{(k)}\mathbf{q}^{(k)}, \quad \mathbf{N}_\alpha = \eta_\alpha^{(k)}\mathbf{q}^{(k)}. \tag{27}$$

С этим базисом по аналогии с [4] связывается гиперсферическая система координат:

$$\begin{aligned}
&\eta_\alpha^{(1)} = \cos\theta_\alpha^{(1)}, \eta_\alpha^{(2)} = \sin\theta_\alpha^{(1)} \cdot \cos\theta_\alpha^{(2)}, \eta_\alpha^{(3)} = \sin\theta_\alpha^{(1)} \cdot \sin\theta_\alpha^{(2)} \cdot \cos\theta_\alpha^{(3)}, \\
&\eta_\alpha^{(4)} = \sin\theta_\alpha^{(1)} \cdot \sin\theta_\alpha^{(2)} \cdot \sin\theta_\alpha^{(3)} \cdot \cos\theta_\alpha^{(4)}, \\
&\eta_\alpha^{(5)} = \sin\theta_\alpha^{(1)} \cdot \sin\theta_\alpha^{(2)} \cdot \sin\theta_\alpha^{(3)} \cdot \sin\theta_\alpha^{(4)},
\end{aligned} \tag{28}$$

где углы $\theta_\alpha^{(k)}$ изменяются в следующих пределах:

$$\theta_\alpha^{(1)} \in [0,\pi],\ \theta_\alpha^{(2)} \in [0,\pi],\ \theta_\alpha^{(3)} \in [0,\pi],\ \theta_\alpha^{(4)} \in [0,2\pi].$$

Относительный объем частицы представится в виде

$$v_\alpha = \frac{3}{8\pi^2}\sin^3\theta_\alpha^{(1)} \cdot \sin^2\theta_\alpha^{(2)} \cdot \sin\theta_\alpha^{(3)} \cdot \Delta\theta_\alpha^{(1)} \cdot \Delta\theta_\alpha^{(2)} \cdot \Delta\theta_\alpha^{(3)} \cdot \Delta\theta_\alpha^{(4)}. \tag{29}$$

В нашем случае, учитывая малость компонентов напряжения $\sigma_{\theta\theta}$, траекторию нагружения можно принять двумерной и интегрирование в (25) вести по двумерной области.

Для сравнения теоретических результатов с экспериментальными данными для поверхности текучести, приведенными в [8], сначала определяли константы материала. Для определения постоянных R_1, R_2, R_3, R_4, m использовали экспериментальные данные на знакопеременное кручение тонкостенной трубки. В результате подбора были получены следующие значения: $R_1 = 0.15$, $R_2 = -6$, $R_3 = 8$, $R_4 = 1$. Для определения постоянных $\dot{p}_0$, m, θ^* θ_0 использовали эксперименты [8], на одноосное растяжение при постоянной скорости деформации; в результате подбора $\dot{p}_0 = 10^6$, $m = 20$, $\theta^* = 0.9$, $\theta_0 = 4.42$.

Для построения поверхности текучести зададим траекторию нагружения (рис.1). Образец предварительно закручивался до значения $\sigma_{\theta z} = 100$ при $\sigma_{zz} = 0$, что соответствует точке A. При этом деформация сдвига достигала 13.4 %. Затем образец частично разгружался до точки B. Далее проводилось нагружение из точки B в точки $C_{90}, C_{75}, C_{60}, C_{45}, C_{30}, C_{15}, C_0$. Здесь нижние индексы указывают на угол между $BC_\psi, \psi = 90^0, 75^0, 60^0, 45^0, 30^0, 15^0, 0^0$ и BC_0. Вдоль каждого луча BC_ψ вычисляем изменение $\Delta p(t) = p(t) - p_B$; точка, которая соответствовала $\Delta p(t) = 0.002$, фиксировалась и принималась за точку текущей поверхности текучести. На рисунке приведено сравнение теоретической поверхности текучести по теории микродеформаций и обобщенного континуального варианта [8] с построенной на основании экспериментальных данных в работе [8]. Исходя из представленных результатов, сформулированный выше вариант теории микродеформации позволяет с достаточной точностью описать эксперименты.

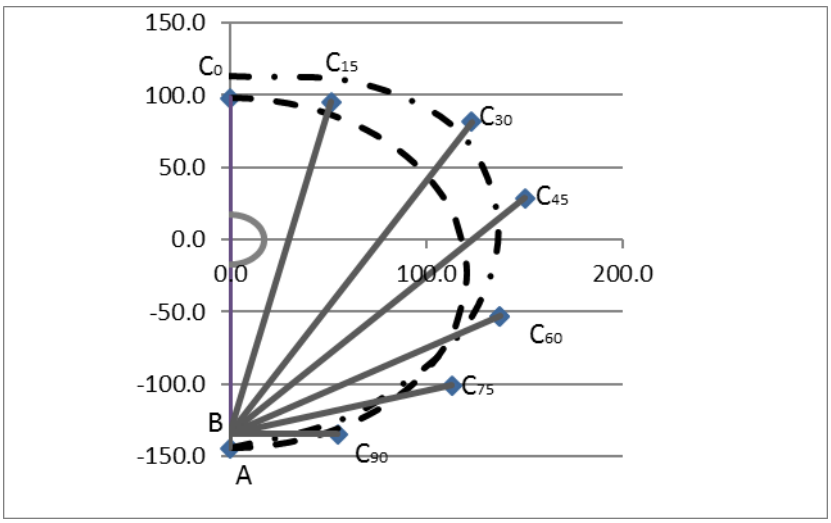

Рис.1. Поверхности текучести:
точки – экспериментальные данные [8];
сплошная – начальная поверхность текучести;
штрих-пунктирная – теория микродеформации [15];
пунктирная – теория Шабоше [2].

Выводы. Сформулированы определяющие соотношения теории микродеформации, чувствительной к скорости деформации и температуре. В рамках этого варианта теории гипоупруговязкопластичности построен алгоритм численного решения задачи о конечной вязкопластической деформации тонкостенной трубки при сложном нагружении.

Приведенные численные результаты показывают, что предложенный вариант теории микродеформации позволяет с достаточной для инженерной практики описывать экспериментальные результаты по сравнению с континуальными теориями гипоупругопластичности с комбинированным упрочнением при условии текучести Губера – Мизеса.

Библиографические ссылки

1. Cai, M. C. A constitutive description of the strain rate and temperature effects on the mechanical behavior of materials [Text] / M. C. Cai, L. S. Niu, X. F. Ma, H. J. Shi // Mechanics of Materials. – 2010. – Vol. 42. – PP. 774–781.

2. Chaboche, J. L. Overview of some theories of plasticity and viscoplasticity [Text] // Intern. J. of Plasticity. – 2008. – Vol. 24. – PP. 1642–1693.

3. Dafalias, Y. F. Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformation [Text] / Y. F. Dafalias // J. of Applied Mechanics. – 1983. – ASME 50. – PP. 561–565.

4. Kadashevich, Yu. I. Theory of plasticity, taking into account microstresses [Text] / Yu. I. Kadashevich and Yu. A. Chernyakov // Advances in mechanics. – 1992. – Vol. 15, Iss. 3–4. – PP. 3–39.

5. Кадашевич, Ю. И. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения [Текст] / Ю. И. Кадашевич, Ю. А. Черняков // Прикл. пробл. прочности и пластичности. Методы решения. – 1988. – С. 4–10**.**

6. Кадашевич, Ю. И. Теория пластичности и ползучести, учитывающая микродеформации [Текст] / Ю. И. Кадашевич, В. В. Новожилов, Ю. А. Черняков // ПММ. – 1986. – Т.50, №6. – С. 890 – 897.

7. **Khan, A. S.** Evolution of subsequent yield surfaces and elastic constants with finite plastic deformation. Pt. I: A very low work hardening aluminum alloy (Al6061–T6511) [Text] / A.S. Khan, R. Kazmi, A. Pandey, T. Stoughton // Intern. J. of Plasticity. – 2009. – Vol. 25. – PP. 1611–1625.

8. **Khan, A. S.** Study of three elastic–plastic constitutive models by non–proportional finite deformations of OFHC copper [Text] / A. S Khan, P. Cheng // Intern. J. of Plasticity. – 1996. – Vol. 12, No. 6. – PP. 737–759.

9. **Kocks, U. F.** Physics and phenomenology of strain hardening: the FCC case [Text] / U. F. Kocks, H. Mecking // Progress in Materials Science. – 2003. – Vol. 48. – PP. 171–273.

10. **Lee, B.–J.** Modeling the mechanical behavior of tantalum [Text] / B.–J. Lee, K. Vecchio, S. Ahzi, S. Schoenfeld // Metallurgical and Materials Transactions. – 1997. – Vol. 28. – PP. 113–122.

11. **Miller, A. K.** Improvements in the MATMOD equations for modeling solute effects and yield–surface distorsion [Text] / A. K. Miller, In: A. S. Krauss, K. Krauss, (Eds.) // Unified Constitutive Laws of Plastic Deformation. Academic Press Inc. – 1996. – PP. 153–227.

12. **Naghdi, P. M.** An experimental study of initial and subsequent yield surfaces in plasticity [Text] / P. M. Naghdi, F. Essenberg, W. Koff // J. of Applied Mechanics. – 1958. – Vol. 25. – P. 201.

13. **Nemat–Nasser, S.** Flow stress of FCC polycrystals with applications to OFHC Cu [Text] / S. Nemat–Nasser, Y. Li // Acta Materialia. – 1998. – Vol. 46 (2). – PP. 565–577.

14. **Онищенко, И. С.** Конечная вязкопластическая деформация тонкостенной трубки [Текст] / И. С. Онищенко, Ю. А. Черняков, В. П. Шнейдер // Вісн. ЗНУ: зб. наук. ст. Фіз.-мат. науки. – 2015. – С. 172–182.

15. **Онищенко, И. С.** Разработка теории микродеформации, чувствительной к скорости деформации и температуре [Текст] / И. С. Онищенко, Ю. А. Черняков, В. П. Шнейдер // Вост.-Европ. Журн. передовых технологий. – 2015. – 4/7 (76). – С. 4 – 9.

16. **Phillips, A**. Yield surfaces and loading surfaces of aluminum and brass: an experimental investigation at room and elevated temperatures [Text] / A. Phillips, P. K. Das // Intern. J. of Plasticity. – 1985. – Vol. 1–PP. 89–109.

17. **Rusinek, A.** A thermos-viscoplastic constitutive model for FCC metals with application to OFHC copper [Text] / A. Rusinek, J. A. Rodrıguez–Martınez, A. Arias // Intern. J. of Mechanical Sciences. – 2010. – Vol. 52. – PP. 120–135.

18. **Taylor, G. I.** Plastic strain in metals [Text] / G. I. Taylor // J. of the Institute of Metals. – 1938. – Vol. 62. – PP. 307–325.

19. **Трощенко, А. В.** Исследование поверхностей текучести, предварительно деформированной хромистой стали [Текст] / А. В. Трощенко // Пробл. прочности. – 1984. – Вып. 2. – С.43–48.

20. **Williams, J. F.** Effect of tensile on yield locus of 1100–F aluminium [Text] / J. F. Williams, N. L. Svensson // J. Strain. Analysis. – 1970. – Vol. 5, N 2. – PP. 128–139.

21. **Zener, C.** Effect of strain rate upon plastic flow of steel [Text] / C. Zener, J. H. Hollomon // J. of Applied Physics. – 1944. – Vol. 15. – PP. 22–32.

22. **Zerilli, F. J.** Dislocation-mechanics-based constitutive relations for material dynamics calculations [Text] / F. J. Zerilli, R. W Armstrong // J. of Applied Physics. – 1987. – Vol. 61. – PP. 1816–1825.

Надійшла до редколегії 18.05.2015