

УДК 539.3

К. В. Панин

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

ВЛИЯНИЕ ИСТОРИИ НАГРУЖЕНИЯ НА ВЕЛИЧИНУ РАСКРЫТИЯ КРАЕВОЙ ТРЕЩИНЫ В ПЛАСТИНКЕ

Рассмотрена задача об определении напряженно-деформированного состояния упругопластической пластинки с краевой трещиной. Предложен численный алгоритм решения задачи, основанный на применении метода конечных элементов и соотношений теории пластичности, учитывающей микродеформации. Неравномерность пластической деформации приближенно учтена путем представления тензора пластической деформации в виде суммы элементарных пластических деформаций, каждой из которых отвечает своя поверхность текучести и система внутренних микроупругих сил. Математически граничная задача сформулирована как нелинейная краевая задача и задача Коши по параметру нагружения. Для решения задачи Коши использован шаговый метод, сводящий решение исходной задачи к последовательности решений на временных слоях. На каждом шаге по времени с помощью итерационного метода нелинейная краевая задача сведена к последовательности квазилинейных. Исследовано влияния истории нагружения на величину и форму зоны пластичности, а также на величину раскрытия трещины.

Ключевые слова: пластинка с краевой трещиной, плоское напряженное состояние, сложное нагружение, теория пластичности, учитывающая микродеформации, метод конечных элементов, зона пластичности, раскрытие трещины.

Розглянуто задачу про визначення напруженено-деформованого стану пружнопластичної пластинки з крайовою тріщиною. Запропоновано числовий алгоритм розв'язання задачі, заснований на застосуванні методу скінчених елементів та співвідношень теорії пластичності, що враховує мікродеформації. Нерівномірність пластичної деформації наблизено враховано шляхом вираження тензора пластичної деформації у вигляді суми елементарних пластичних деформацій, кожній із яких відповідає своя поверхня текучості та система внутрішніх мікропружин сил. Математично межову задачу сформульовано як нелінійну крайову задачу та задачу Коші за параметром навантаження. Для розв'язання задачі Коші застосовано покроковий метод, який зводить розв'язання початкової задачі до послідовності розв'язків на тимчасових шарах. На кожному кроці за часом за допомогою ітераційного методу нелінійну крайову задачу зведенено до послідовності квазілінійних. Досліджено вплив історії навантаження на величину та форму зони пластичності, а також на величину розкриття тріщини.

Ключові слова: пластина з крайовою тріщиною, плоский напруженій стан, складне навантаження, теорія пластичності, що враховує мікродеформації, метод скінчених елементів, зона пластичності, розкриття тріщини.

The problem of determining the stress-strain state of the elastic plastic plate with edge crack is considered. The numeric algorithm for solving problem based upon the finite element method and basic relationships of the theory of plasticity taking into account micro strain is proposed. No uniform distribution of damages is taken into account in an approximate way by presenting the tensor of plastic strain as a sum of unit plastic strains each of which has a correspondent yield surface and a correspondent system of internal forces. Mathematically initial task is formulated as a nonlinear border task and Cauchy problem on the parameter of loading. For the decision of task Cauchy a footpace method is used, taking the decision of initial task to the sequence of decisions on temporal layers. On every step at times by means of iterative method a nonlinear border task is taken to the sequence of quasi-linear. The influence of the loading history on form and size of plastic zones and on the crack opening displacement is investigated.

Key words: plate with edge crack, plane stress state, complex loading, theory plasticity taking into account micro deformation, finite element method, plastic zone, crack opening displacement.

Введение. Методы линейной механики разрушения хорошо обоснованы как теоретически, так и экспериментально и достаточно широко применяются при проектировании конструкций. В то же время очевидна ограниченность линейной механики разрушения. Реальные металлические тела при разрушении всегда испытывают некоторую пластическую деформацию.

В противоположность механике упругого разрушения методы исследования упругопластических тел с трещинами развиты значительно слабее. Так, в нелинейной механике разрушения до сих пор не решен однозначно вопрос о критериях локального разрушения. Был предложен ряд критериев разрушения, большинство из которых невозможно проверить с точки зрения их применимости вследствие малой изученности окрестности вершины трещины при упругопластическом деформировании материала.

В настоящее время практически применяют два критерия. Один из них основан на использовании не зависящего от контура J -интеграла [1;2]. Другой использует в качестве характеристики разрушения максимальное раскрытие трещины в ее вершине [3]. В данной работе исследуется вопрос о влияния истории нагружения на величину раскрытия трещины δ .

Постановка задачи. Рассмотрим квадратную $(a \times a)$ пластинку, ослабленную краевой трещиной длиной $l = a/2$, находящуюся в условиях плоского напряженного состояния (рис.1). К боковым границам пластиинки приложены распределенные нормальные усилия $p_1 = p_1(t)$, $p_2 = p_2(t)$, $p_3 = p_3(t)$, причем $p_2 = -p_3$. Нагружение считаем квазистатическим. Материал пластиинки – упрочняющийся упругопластический. Его физико-механические характеристики считаются известными. Массовыми силами материала пластиинки пренебрегаем. Требуется определить компоненты напряженно-деформированное состояние пластиинки в произвольный момент времени t .

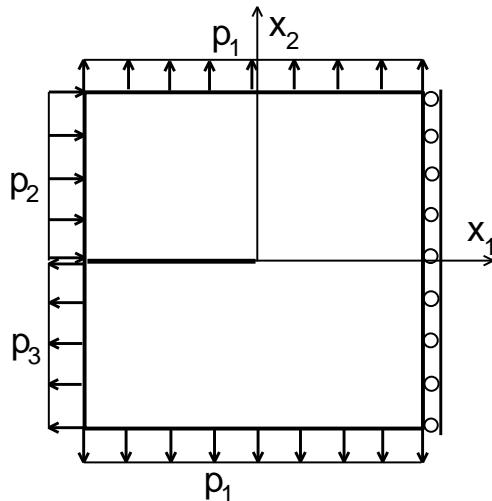


Рис.1. Квадратная пластиинка с краевой трещиной

Для описания процессов сложного упругопластического деформирования бруса воспользуемся уравнениями состояния теории пластичности, учитывающей микродеформации [4].

С учетом того, что при принятом в задаче нагружении пластинки находится в условиях плоского напряженного состояния, определяющие соотношения теории пластичности, учитывающей микродеформации, принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{11} &= a_{11}\dot{\varepsilon}_{11} + a_{12}\dot{\varepsilon}_{22} + a_{13}\dot{\varepsilon}_{12}, \\ \dot{\sigma}_{22} &= a_{21}\dot{\varepsilon}_{11} + a_{22}\dot{\varepsilon}_{22} + a_{23}\dot{\varepsilon}_{12}, \\ \dot{\sigma}_{12} &= a_{31}\dot{\varepsilon}_{11} + a_{32}\dot{\varepsilon}_{22} + a_{33}\dot{\varepsilon}_{12},\end{aligned}\quad (1)$$

где $\dot{\sigma}_{ij}$, $\dot{\varepsilon}_{ij}$ – компоненты тензоров скоростей напряжений и деформаций.

Коэффициенты a_{ij} в (1) определяются из следующих соотношений:

$$\begin{aligned}a_{11} &= K + \frac{2}{3}A_{11}, \quad a_{12} = a_{21} = K - \frac{1}{3}A_{11} + \frac{1}{\sqrt{3}}A_{12}, \quad a_{13} = a_{31} = \frac{2}{\sqrt{3}}A_{13}, \\ a_{22} &= K + \frac{1}{6}A_{11} - \frac{1}{\sqrt{3}}A_{12} + \frac{1}{2}A_{22}, \quad a_{23} = a_{32} = A_{23} - \frac{2}{\sqrt{3}}A_{13}, \quad a_{33} = A_{33},\end{aligned}\quad (2)$$

где

$$\begin{aligned}A_{ij} &= 2G(\delta_{ij} - G_{ij}^{(1)}), \\ G_{ij}^{(1)} &= \left(\delta_{ij} + \frac{B_2}{B_1}G_{ik}^{(2)} \right)^{-1}G_{kj}^{(2)}, \\ G_{kj}^{(2)} &= \frac{1}{B_1} \left(G_{kj} - \frac{\mu_1}{1+\mu_1\Omega}F_kF_j \right), \\ \Omega &= 2\pi \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\alpha_2(\theta_1)} \int_0^{\alpha_3(\theta_1, \theta_2)} \sin^3 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \sin \theta_3 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3, \\ F_k &= 2\pi \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\alpha_2(\theta_1)} \int_0^{\alpha_3(\theta_1, \theta_2)} \lambda_k \sin^3 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \sin \theta_3 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3, \\ G_{km} &= 2\pi \int_0^{\alpha_1} \int_0^{\alpha_2(\theta_1)} \int_0^{\alpha_3(\theta_1, \theta_2)} \lambda_k \lambda_m \sin^3 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \sin \theta_3 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3, \\ \lambda_1 &= \cos \theta_1, \quad \lambda_2 = \sin \theta_1 \cos \theta_2, \quad \lambda_3 = \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3,\end{aligned}\quad (3)$$

где G – модуль сдвига; K – объемный модуль упругости; δ_{ij} – символ Кронекера; $\mu_1 = B_3/B_1$; B_1, B_2, B_3 – универсальные функции материала; λ_k – направление активного микропластического деформирования.

Для нахождения параметра α_1 и функций $\alpha_2(\theta_1)$, $\alpha_3(\theta_1, \theta_2)$, определяющих область направлений активного микропластического деформирования, имеем

$$E(\lambda_k, t) \leq \mathcal{E}_k \lambda_k, \quad (4)$$

$$\dot{r}_k \lambda_k - \frac{\mu}{1+\mu\Omega} F_k \dot{r}_k > 0,$$

где $\dot{\eta}_k = \dot{S}_k - B_2 G_{km}^{(1)} \dot{\vartheta}_m$, $\dot{\vartheta}_m$, \dot{S}_k – компоненты векторов скорости активных деформаций, деформаций и напряжений соответственно.

Изменение интенсивности разрешающих деформаций $E(\lambda_k, t)$ определяется с использованием формул

$$\dot{E}(\lambda_k, t_0) = \varepsilon_s, \quad \dot{E}(\lambda_k, t) = \begin{cases} \dot{\vartheta}_k \lambda_k, & \lambda_k \dot{\lambda}_k = 1; \\ B_2 \dot{\vartheta}_k^P \lambda_k + \dot{\chi} & \lambda_k \dot{\lambda}_k \neq \pm 1; \\ \eta \dot{\vartheta}_k \lambda_k + B_2 \dot{\vartheta}_k^P \lambda_k + (1+\eta) \dot{\chi} & \lambda_k \dot{\lambda}_k = -1, \end{cases} \quad (5)$$

где $\dot{\chi} = \frac{\mu}{1+\mu\Omega} F_k \dot{\eta}_k$, ε_s – начальный предел текучести по деформациям, а η – универсальная функция материала.

С учетом того, что определяющие соотношения (1) – (5) записываются в скоростях, рассматриваемая граничная задача формулируется также в скоростях. Она сводится к построению полей скоростей изменения напряжений $\dot{\sigma}_{11}$, $\dot{\sigma}_{22}$, $\dot{\sigma}_{12}$, деформаций $\dot{\varepsilon}_{11}$, $\dot{\varepsilon}_{22}$, $\dot{\varepsilon}_{12}$ и перемещений v_1 и v_2 из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\sigma}_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{\sigma}_{12}}{\partial x_2} &= 0, & \frac{\partial \dot{\sigma}_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{\sigma}_{22}}{\partial x_2} &= 0, \\ \dot{\varepsilon}_{11} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, & \dot{\varepsilon}_{22} &= \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, & \dot{\varepsilon}_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

к которой необходимо добавить определяющие соотношения (1) – (5) и граничные условия

$$\dot{\sigma}_{km} v_m = \dot{p}_k \text{ на } S_p, \quad v_k = v_{k0} \text{ на } S_v. \quad (7)$$

Решение задачи по определению полей напряжений σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} , деформаций ε_{11} , ε_{22} , ε_{12} и перемещений u_1 и u_2 при известном решении задачи в скоростях достигается вычислением квадратур

$$u_i = \int_{t_0}^t v_i dt, \quad \varepsilon_{ij} = \int_{t_0}^t \dot{\varepsilon}_{ij} dt, \quad \sigma_{ij} = \int_{t_0}^t \dot{\sigma}_{ij} dt \quad (i, j = 1, 2) \quad (8)$$

Для решения задачи на каждом шаге воспользуемся принципом максимума для скоростей деформации [5]:

$$\int_V (\dot{\sigma}_{11} \delta \dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\sigma}_{22} \delta \dot{\varepsilon}_{22} + 2 \dot{\sigma}_{12} \delta \dot{\varepsilon}_{12}) dV - \int_{S_p} (p_1 \delta v_1 + p_2 \delta v_2 + p_3 \delta v_2) dS = 0, \quad (9)$$

Метод решения. К полученной вариационной задаче применяется метод конечных элементов [6], и граничная задача теории пластичности приводится к задаче Коши. Она решается методом Эйлера с промежуточными итерациями. На каждом шаге метода Эйлера область направлений активного микропластического деформирования определяется методом простой итерации. Для вычисления матриц

жесткости конечных элементов применяется алгоритм [7], позволяющий снизить число подлежащих вычислению кратных интегралов в определяющих соотношениях теории пластичности, учитывающей микродеформации, до размерности траектории нагружения, то есть до трех.

Результаты расчетов. При проведении расчетов в качестве материала пластиинки выбрана сталь Ст45. В [9] показано, что для описания упругопластического деформирования в рамках теории пластичности, учитывающей микродеформации, в качестве универсальных функций материала B_1 , B_2 , B_3 и η можно использовать константы. Для стали Ст45 они принимают следующие значения: $G = 8 \cdot 10^4$ МПа; $\varepsilon_o = 1,31 \cdot 10^{-3}$; $B_1 = 2,74$; $B_2 = B_3 = 0$; $\eta = 1$.

При проведении расчетов нагружение в пространстве внешней нагрузки задавалось по таким траекториям: 1-OBA, 2-OCA, 3-ODA (рис.2).

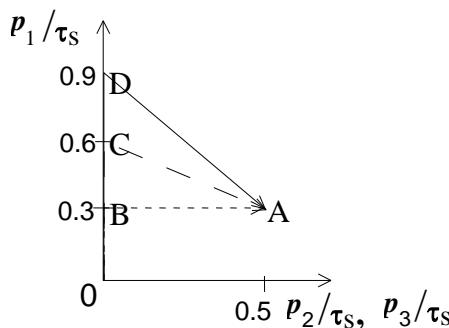


Рис.2. Схемы нагружения

На рис.3 представлены зоны пластичности в пластиинке, ослабленной краевой трещиной, полученные при указанных схемах нагружения при решении задачи в рамках теории пластичности, учитывающей микродеформации. Результаты свидетельствуют о том, что история нагружения может оказывать существенное влияние на конфигурацию зоны пластичности в окрестности вершины трещины.

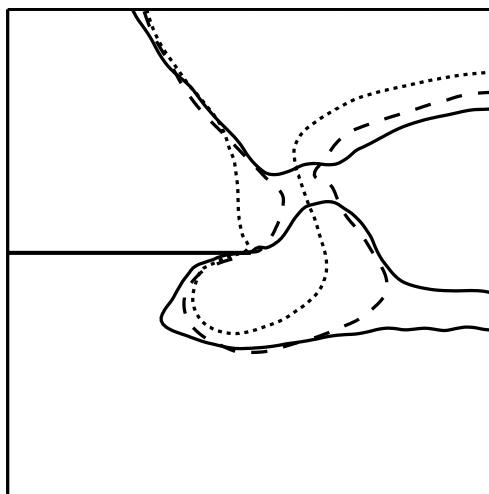


Рис.3. Зоны пластичности в пластиинке при разных схемах нагружения
(- · - · - ОВА, — — ОСА, — · — ОДА)

Величина раскрытия трещины в каждом из случаев находится на основании конечноэлементного решения и центра поворота [9]. В табл. 1 приведены значения величины раскрытия трещины δ , полученные в рамках теории пластичности, учитывающей микродеформации, отнесенные к его значению, полученному при решении упругой задачи. Данные результаты свидетельствуют о том, что история нагружения оказывает влияние на величину раскрытия трещины δ .

Таблица 1

Результаты расчетов величины раскрытия трещины

Схема нагружения	Величина раскрытия трещины, δ/δ_y
OBA	1,31
OCA	1,46
ODA	1,62

Выводы. В рамках теории пластичности, учитывающей микродеформации, решена задача об определении напряженно-деформированного состояния упругопластической пластинки, ослабленной краевой трещиной. При различных схемах внешнего нагружения построены зоны пластичности в пластинке. Исследовано влияние истории нагружения как на конфигурацию зон пластичности в окрестности вершины трещины, так и на величину раскрытия трещины δ . Результаты расчетов свидетельствуют о том, что такое влияние может быть существенным.

Библиографические ссылки

1. Черепанов, Г.П. О распространении трещин в сплошной среде [Текст]/ Г.П. Черепанов // ПММ. – 1967. – Т.31, №3. – С. 476 – 488.
2. Райс, Дж.Р. Не зависящий от пути интеграл и приближенный анализ концентрации деформаций у вырезов и трещин [Текст]/ Дж.Р. Райс // Тр. амер. об-ва инж.-механиков – 1968. – Т.35, №4, – С.340 – 350.
3. Леонов, М.Я. Розвиток найдрібніших тріщин в твердому тілі [Текст]/ М.Я. Леонов, В.В. Панасюк // Приклад. механика. – 1959. – Т.5, – №5. – С.391 – 401.
4. Кадашевич, Ю.И. Теория пластичности и ползучести, учитывающая микродеформации [Текст]/ Ю.И. Кадашевич, В.В. Новожилов, Ю.А. Черняков // ПММ. – 1986. – Т.50, №6. – С. 821 – 823.
5. Черняков, Ю.А. Вариационные принципы решения граничных задач теории микродеформации [Текст]/ Ю.А. Черняков // Вопр. прочности и пластичности. – 1997. – С. 5 – 13.
6. Морозов, Е.М. Метод конечных элементов в механике разрушения [Текст]/ Е.М. Морозов, Г.П. Никишков. – М., 1980. – 256с.
7. Панин, К.В. Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины продольного сдвига при сложном нагружении [Текст]/ К.В. Панин, Ю.А. Черняков // Вопр. механики деформирования и разрушения твердых тел. – 1992. – С. 39 – 45.
8. Kadashevich, Yu.I. Theory of plasticity taking into account micro stresses [Text]/ Yu.I. Kadashevich , Yu.A. Chernyakov // Advanced in Mechanics. – 1992. – Vol.15. №3 – 4. – P. 3 – 39.
9. Сиратори, М. Вычислительная механика разрушения [Текст]/ М.Сиратори, Т.Миеси, Х.Мацусита. – М., 1986. – 336с.

Надійшла до редакції 01.06.2015