РЕШЕНИЕ РАСШИРЕННОГО УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСОВ В ОПТИЧЕСКИХ ВОЛОКНАХ

Алименков И.В., Пчёлкина Ю.Ж.
Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Аннотация

Выведено расширенное уравнение распространения оптических импульсов в кварцевых волоконных световодах. Найдено его локализованное решение.

Ключевые слова: волоконный световод, расширенное уравнение распространения, солитонное решение.

Введение

Поле оптического импульса, распространяющегося в одномодовом волоконном световоде, поддерживающем состояние линейной поляризации, имеет вид [1]–[3]

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{e}_x F(x,y)A(z,t)\exp\left\{i\left(\beta_o z-\omega_o t\right)\right\}, \qquad (1)$$

где $F(x,y)$ – обычно гауссовская функция вида $\exp\left\{-(x^2+y^2)/w^2\right\}$ с характерным размером моды w, $A(z,t)$ – комплексная огибающая импульса, ω_o – несущая частота, $\beta_o=\omega_o n(\omega_o)/c$ – волновое число. Предполагается, что огибающая $A(z,t)$ является медленно меняющейся функцией своих аргументов, что означает малость её относительных изменений на интервалах времени порядка $1/\omega_o$ и расстояниях порядка $1/\beta_o$.

Для этой функции выведено уравнение [1]–[3]

$$\frac{\partial A}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial A}{\partial t}+i\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}=i(\Delta\beta)A, \qquad (2)$$

называемое уравнением распространения. Правая часть этого уравнения описывает оптические потери и нелинейные эффекты посредством функции $\Delta\beta(|A|^2)$, которая выражается через нелинейную часть показателя преломления Δn с помощью формулы

$$\Delta\beta=\frac{k_o\iint \Delta n\left|F(x,y)\right|^2 dxdy}{\iint\left|F(x,y)\right|^2 dxdy}, \qquad (3)$$

где $k_o=\omega_o/c$. Коэффициенты в (2) имеют простой физический смысл: $\beta_1=1/v_g$ – величина, обратная групповой скорости, а β_2 – дисперсия групповой скорости. В области прозрачности волновода $\Delta\beta$ является вещественной функцией от $|A|^2$. Уравнение (2) справедливо для импульсов длительностью >0,1*нс*, что соответствует квазимонохроматическому приближению.

1. Постановка задачи

Для кварца нелинейность имеет керровский тип $\Delta n=n_2|E|^2$ и из (2) и (3) следует уравнение

$$\frac{\partial A}{\partial z}+\frac{1}{v_g}\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}=i\gamma|A|^2 A, \qquad (4)$$

где γ – коэффициент нелинейности. Для одномодовых кварцевых волокон все приведённые выше параметры известны и их численные значения приведены в [1]–[3]. Уравнение (4) часто называют основным уравнением распространения. Его решение в лабораторной системе отсчёта с исходными параметрами имеет вид [4]

$$A=\frac{E_o\exp\left\{i z\gamma E_o^2/2\right\}}{ch\left[\dfrac{E_o\sqrt{\gamma}(z-z_o-v_g t)}{v_g\sqrt{|\beta_2|}}\right]}, \qquad (5)$$

где E_o и z_o – произвольные постоянные, имеющие физический смысл пикового значения напряжённости и начального положения импульса.

Выражение (5) ущербно потому, что распределение импульсов по скоростям имеет вид Дельта-функции и что эта фиксированная для всех импульсов скорость не зависит от пикового значения напряжённости импульса. Физическая интуиция подсказывает, что чем больше пиковое значение напряжённости, тем больше величина скорости. Вызывает недоумение и отсутствие волнового числа β_o.

Понимая серьёзность высказанных выше критических замечаний, авторы приведут подробный вывод расширенного уравнения распространения и его развёрнутое решение.

2. Вывод расширенного уравнения распространения

Исходным пунктом служит уравнение для напряжённости поля в спектральном представлении [1]

$$\nabla^2\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_o)+\varepsilon(\omega)k_o^2\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_o)=0, \qquad (6)$$

где $\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_o)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}E(\vec{r},t)\exp\left\{i\left[\omega-\omega_o\right]t\right\}dt$, $\varepsilon(\omega)$ – диэлектрическая проницаемость, представимая в виде

$$\varepsilon=(n+\Delta n)^2\cong n^2+2n\Delta n.$$

Уравнение (6) решается стандартным методом разделения переменных:

$$\tilde{E}(\vec{r},\omega-\omega_o)=F(x,y)\tilde{A}(z,\omega-\omega_o)\exp\left\{i\beta_o z\right\}. \qquad (7)$$

Подставляя (7) в (6) и обозначая постоянную разделения как $\bar{\beta}^2$, получим два уравнения:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\left[\varepsilon(\omega)k_o^2-\bar{\beta}^2\right]F=0, \qquad (8)$$

$$\frac{\partial^2\tilde{A}}{\partial z^2}+2i\beta_o\frac{\partial\tilde{A}}{\partial z}+\left(\bar{\beta}^2-\beta_o^2\right)\tilde{A}=0. \qquad (9)$$

Уравнение (8) определяет распределение поля моды $F(x,y)$ и поправку $\Delta\beta$ к постоянной распространения

$\beta(\omega)$ в линейном приближении $\bar{\beta}(\omega)=\beta(\omega)+\Delta\beta$, о которых говорилось выше. Нашей дальнейшей задачей является рассмотрение уравнения (9). Мы не станем следовать указанию [1]–[3] пренебречь второй производной в (9) в силу предположения о медленной изменяемости функции $\tilde{A}(z,\omega-\omega_o)$, а получим решение полного уравнения, следующего из (9), и все сравнительные оценки проведём в решении. Начнём с множителя при последнем слагаемом:

$$(\bar{\beta}^2-\beta_o^2)=(\bar{\beta}-\beta_o)(\bar{\beta}+\beta_o)=$$
$$=(\beta+\Delta\beta-\beta_o)(\beta+\Delta\beta+\beta_o).$$

Разложим функцию $\beta(\omega)$ в ряд Тейлора в окрестности точки ω_o:

$$\beta(\omega)=\beta_o+\beta_1(\omega-\omega_o)+\frac{1}{2}\beta_2(\omega-\omega_o)^2+....,$$

где степенями выше второй пренебрегаем, что соответствует квазимонохроматическому приближению. Подставляя это разложение в предыдущее выражение и обозначая $\omega-\omega_o=\Delta\omega$, имеем:

$$(\bar{\beta}^2-\beta_o^2)=\left(\beta_1\Delta\omega+\frac{1}{2}\beta_2(\Delta\omega)^2+\Delta\beta\right)\times$$
$$\times\left(2\beta_o+\beta_1\Delta\omega+\frac{1}{2}\beta_2(\Delta\omega)^2+\Delta\beta\right)\cong$$
$$\cong\left(\beta_1\Delta\omega+\frac{1}{2}\beta_2(\Delta\omega)^2+\Delta\beta\right)2\beta_o.$$

Здесь во второй скобке оставлен главный член $2\beta_o$. Подстановка этого приближённого выражения в (9) даёт

$$\frac{\partial^2\tilde{A}}{\partial z^2}+2i\beta_o\frac{\partial\tilde{A}}{\partial z}+2\beta_o\left(\beta_1\Delta\omega+\frac{1}{2}\beta_2(\Delta\omega)^2+\Delta\beta\right)\tilde{A}=0.$$

Обратное Фурье-преобразование приводит к следующему уравнению для огибающей $A(z,t)$:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}+2i\beta_o\frac{\partial A}{\partial z}+2i\beta_o\beta_1\frac{\partial A}{\partial t}-\beta_o\beta_2\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}+2\beta_o(\Delta\beta)A=0$$

или с учётом (3)

$$i\left(\frac{\partial A}{\partial z}+\beta_1\frac{\partial A}{\partial t}\right)+\frac{1}{2\beta_o}\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}-\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}+\gamma|A|^2A=0. \quad (10)$$

Так как в области прозрачности кварца ($\lambda\approx 1{,}55$ мкм) величина $\beta_2=-20$ пс^2/км, то (10) является уравнением эллиптического типа. Представляет интерес нахождение его решения и исследование различных предельных случаев.

3. Решение расширенного уравнения

Формально (10) переходит в (4) в пределе $\beta_o\to\infty$. Учитывая этот факт и формулу (5), решение уравнения (10) можно искать в виде

$$A(z,t)=G(z,t)\exp\left\{iz\gamma E_o^2/2\right\}, \quad (11)$$

где $G(z,t)$ – вещественная функция.

Подставляя (11) в (10) и приравнивая к нулю вещественную и мнимую части полученного уравнения, находим:

$$\frac{\partial G}{\partial z}+\left[v_g\left(1+\gamma E_o^2/2\beta_o\right)\right]^{-1}\frac{\partial G}{\partial t}=0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}-\beta_2\beta_o\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}-\frac{\gamma E_o^2}{2}\left(2\beta_o+\frac{\gamma E_o^2}{2}\right)G+ \quad (13)$$
$$+2\gamma\beta_o G^3=0.$$

Таким образом, получена система двух уравнений на одну неизвестную функцию. Уравнение (12), будучи линейным однородным уравнением первого порядка, имеет своим общим решением *любую* дифференцируемую функцию $G=G\left(s(z,t)\right)$, где

$$s(z,t)=z-z_o-vt, \quad (14)$$

$$v=v_g\left(1+\gamma E_o^2/2\beta_o\right). \quad (15)$$

Т.е. уравнение (12) определяет аргумент искомой функции, оставляя её вид произвольным. С учётом сказанного, уравнение (13) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$G''(s)=aG(s)-2bG^3(s), \quad (16)$$

где

$$a=\frac{\gamma E_o^2\left(2\beta_o+\gamma E_o^2/2\right)}{2\left(1+|\beta_2|\beta_o v^2\right)}, \quad (17)$$

$$b=\frac{\gamma\beta_o}{1+|\beta_2|\beta_o v^2}. \quad (18)$$

Так как быстрые пространственные осцилляции уже отделены, то величина $\gamma E_o^2/2$ в формуле (11) является малой добавкой к волновому числу β_o. Поэтому вторым слагаемым в скобках числителя формулы (17) можно пренебречь по сравнению с $2\beta_o$:

$$a\cong\frac{\gamma E_o^2\beta_o}{1+|\beta_2|\beta_o v^2}. \quad (19)$$

Автономное уравнение (16) легко решается, и его локализованное решение имеет вид:

$$G=\sqrt{\frac{a}{b}}\frac{1}{ch\,(s\sqrt{a})}.$$

Подставляя сюда (14), (18) и (19), находим

$$G=\frac{E_o}{ch\left[\left(z-z_o-vt\right)\sqrt{\dfrac{\gamma E_o^2\beta_o}{1+|\beta_2|\beta_o v^2}}\right]}.$$

Подставляя это выражение в (11), получим

$$A(z,t)=\frac{E_o\exp\left\{iz\gamma E_o^2/2\right\}}{ch\left[\left(z-z_o-vt\right)\sqrt{\dfrac{\gamma E_o^2\beta_o}{1+|\beta_2|\beta_o v^2}}\right]}. \quad (20)$$

Это решение представляет собой волновой пакет, движущийся с постоянной скоростью, зависящей от пикового значения напряжённости согласно формуле (15), и в нём присутствует центральное волновое число β_o, что коренным образом отличает его от формулы (5). В пределе $\beta_o \to \infty$ формула (20) переходит в (5), т.е. является более общей. Учитывая, что для кварца $\lambda \approx 1{,}55$ мкм; $\beta_2 = -20$ пс^2/км; $n = 1{,}45$, $v = c/n$, находим, что $|\beta_2|\beta_o v^2 \approx 0{,}005$. Так как эта величина стоит под знаком радикала, то ею можно пренебречь по сравнению с единицей и получить из (20) более простое приближённое решение уравнения (10):

$$A(z,t) = \frac{E_o \exp\left\{ i z \gamma E_o^2 / 2 \right\}}{ch\left[\left(z - z_o - vt \right) E_o \sqrt{\gamma \beta_o} \right]}. \tag{21}$$

Формула (21) получается из (20) при $\beta_2 \to 0$. Таким образом, решение (20) уравнения (10) пертурбативно как по β_o, так и по β_2.

Заключение

В заключение отметим, что, хотя (21) и (5) являются различными предельными случаями решения (20), формула (21) более физична, чем (5).

Литература

1. **Агравал, Г.П.** Нелинейная волоконная оптика. – М.: Мир, 1996. – 324 с.
2. **Agrawal, G.P.** Nonlinear Fiber Optics. – Academic Press, 2007. – 478 p.
3. **Agrawal, G.P.** Nonlinear Fiber Optics. – Academic Press, 2013. – 629 p.
4. **Алименков И.В.** Решение в квадратурах уравнения распространения импульсов в оптических волокнах / И.В. Алименков, Ю.Ж. Пчёлкина // Компьютерная оптика. – 2013. – Т. 37,№. 3. – С. 294-296.

References

1. **Agrawal, G.P.** Nonlinear Fiber Optics. – Moscow: “Mir” Publisher, 1996. – 324 p. – (In Russian).
2. **Agrawal, G.P.** Nonlinear Fiber Optics. – Academic Press, 2007. – 478 p.
3. **Agrawal, G.P.** Nonlinear Fiber Optics. – Academic Press, 2013. – 629 p.
4. **Alimenkov, I.V.** Solution of pulse- propagation equation for optical fiber in quadratures / I.V. Alimenkov, Y.G. Pchelkina // Computer Optics. – 2013.–Vol. 37, N 3.– P. 294- 296.

SOLUTION OF EXPANDED PULSE – PROPAGATION EQUATION FOR OPTICAL FIBERS

I.V. Alimenkov, Yu.G. Pchelkina

S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (National Research University)

Abstract

It is found the solution of expanded pulse – propagation equation for optical fibers.

Key words: optical fiber, expanded pulse – propagation equation, solitonic solution.

Сведения об авторах

Алименков Иван Васильевич, 1949 года рождения. В 1977 году с отличием окончил Куйбышевский государственный университет по специальности «Физика». Кандидат физико-математических наук, работает в должности доцента кафедры прикладной математики СГАУ. Область научных интересов – нелинейная физика.

E-mail: i-alimenkov@mail.ru .

Ivan Vasilyievich Alimenkov, (1949 b.) majoring in Physics. In 1977 he graduated with honours from Kuibyshev State University. Candidate in Physics and Mathematics, works as associated professor of Applied Mathematics sub-department SSAU. Research interests – nonlinear physics.

Пчёлкина Юлия Жиганшевна, 1980 года рождения. В 2002 году окончила Ульяновский государственный университет по специальности «Прикладная математика». Кандидат физико-математических наук, работает в должности доцента кафедры прикладной математики СГАУ. Область научных интересов – нелинейные уравнения.

E-mail: musina@yandex.ru .

Yuliya Giganshevna Pchelkina, (1980 b.) majoring in Applied Mathematica. In 2002 she graduated from Ulyanovsk State University. Candidate in Physics and Mathematics, works as associated professor of Applied Mathematics sub-department SSAU. Research interests – nonlinear equations.

Поступила в редакцию 10 декабря 2013 г.