СТРУКТУРНО-УСТОЙЧИВЫЕ ТРЁХМЕРНЫЕ И ДВУМЕРНЫЕ ЛАЗЕРНЫЕ ПОЛОВИННЫЕ ПУЧКИ ПИРСИ

Ковалёв А.А., Котляр В.В., Засканов С.Г. Институт систем обработки изображений РАН, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)

Аннотация

Получено новое решение параксиального уравнения Гельмгольца, описывающее семейство структурно-устойчивых трёхмерных и двумерных половинных пучков Пирси (ППпучки). ПП-пучки обобщают пучки Пирси, полученные в Opt. Express, 20, 18955 (2012), так как известные пучки Пирси равны сумме двух ПП-пучков первого порядка. Угловой спектр плоских волн трёхмерных ПП-пучков отличен от нуля на половине параболы. Установлены свойства ортогональности функций, описывающих комплексные амплитуды ПП-пучков. Для двумерного ПП-пучка показано наличие ускорения в области до фокальной плоскости и замедление за фокусом.

<u>Ключевые слова</u>: параксиальный лазерный пучок, структурно-устойчивый лазерный пучок, пучок Пирси, ускоряющийся пучок.

Введение

Явление дифракции - это одно из проявлений волновой природы света. Когда световой пучок распространяется вдоль оптической оси от начальной плоскости к плоскости наблюдения (обе плоскости параллельны друг другу и перпендикулярны оптической оси), световые поля, исходящие от разных участков начальной плоскости, интерферируют друг с другом и в плоскости наблюдения возникает дифракционная картина, распределение интенсивности в которой в общем случае отличается от распределения в начальной плоскости. Распространение светового пучка в однородной среде описывается уравнением Гельмгольца и его параксиальным приближением уравнением типа Шрёдингера. Несмотря на дифракцию, у этих уравнений существуют решения, описывающие световые поля, которые свободны от этого явления. В первую очередь, это давно известные традиционные и недавно открытые асимметричные пучки Бесселя [1-3], Матье [4] и Эйри [5]. Пучки Бесселя распространяются без дифракции в трёхмерном пространстве, а пучки Эйри – в двумерном. Также не обладают дифракцией плоские волны, так как распределение интенсивности у них не меняется при распространении от одной плоскости к другой. В трёхмерном случае не обладает дифракцией любое световое поле, угловой спектр плоских волн которого отличен от нуля на бесконечно тонком кольце [1]. Наряду с пучками Бесселя и Эйри, интерес представляют параксиальные структурно-устойчивые пучки, инвариантные к распространению. Такие пучки не являются бездифракционными, но при распространении структура их распределения интенсивности в поперечной плоскости не меняется, меняется только масштаб. Наиболее известными пучками такого типа являются пучки Эрмита-Гаусса и Лагерра-Гаусса [6], гипергеометрические моды [7]. В работе [8] рассмотрены пучки Пирси как трёхмерные аналоги пучков Эйри. Распределение комплексных амплитуд таких пучков описывается функцией Пирси [9, 10], определяемой как интеграл от комплексной экспоненты, аргумент которой является полиномом (подобно функции Эйри). Угловой спектр таких пучков представляет собой параболу с фазовой модуляцией. Эти пучки обладают свойством автофокусировки и восстанавливаются после искажения препятствиями. В недавно опубликованной работе [11] предложен виртуальный источник, формирующий пучок Пирси.

В данной работе проводится обобщение функции Пирси и рассматриваются структурно-устойчивые половинные пучки Пирси (ПП-пучки). Обычные пучки Пирси [8] являются суммой двух ПП-пучков первого порядка. Угловой спектр ПП-пучков представляет собой не параболу (как у пучков Пирси из [8]), а только одну её половину. Также рассматриваются двумерные аналоги пучков Пирси, обладающие ускоряющейся (искривлённой) траекторией.

1. Трёхмерные половинные пучки Пирси

Комплексная амплитуда параксиальных световых пучков Пирси [8] в начальной плоскости имеет вид:

$$E(x, y, z = 0) = \operatorname{Pe}\left(\frac{x}{x_0}, \frac{y}{y_0}\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[is^4 + is^2\left(\frac{y}{y_0}\right) + is\left(\frac{x}{x_0}\right)\right] \mathrm{d}s.$$
(1)

В [8] показано, что при распространении структура пучка не меняется, происходит лишь сдвиг центра пучка вдоль одной декартовой координаты и масштабирование по обеим декартовым координатам, причём масштаб по осям x и y разный:

$$E(x, y, z) = \frac{1}{(1 - z/z_e)^{1/4}} \times \operatorname{Pe}\left(\frac{x}{x_0 \left(1 - z/z_e\right)^{1/4}}, \frac{y - y_0 z/(2kx_0^2)}{y_0 \left(1 - z/z_e\right)^{1/2}}\right),$$
(2)

где $z_e = 2ky_0^2$.

При $z = z_e$ комплексная амплитуда имеет вид:

$$E(x, y, z_e) = \sqrt{\frac{i\pi}{y/y_0 - (y_0/x_0)^2}} \exp\left[\frac{-iy_0 x^2}{4(x_0^2 y_0 - y_0^3)}\right].$$

В конце работы [8] приводится обобщение пучков (1) в виде пучков с комплексной амплитудой в начальной плоскости, описываемой функцией

$$U(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i(s^{2n} + ys^n + xs^m)] ds,$$
(3)

причём при n = 2m такие пучки являются структурноустойчивыми. Числа n и m должны быть целыми. Требование целочисленности следует из того, что интеграл в (3) берётся по всей числовой оси, поэтому при дробных значениях n и m при s < 0 экспонента может стать вещественной и устремиться к бесконечности при $s \rightarrow -\infty$.

Вывод выражения (2) из (1) осуществляется с помощью преобразования Френеля, при вычислении которого используется замена переменной интегрирования, причём пределы интегрирования не меняются, так как они бесконечны. Однако, если бы нижний предел был равен нулю, при замене переменных пределы также не поменялись бы, поэтому наряду с (1) и (3) можно рассмотреть половинный пучок Пирси *v*-го порядка, который также не меняет свою структуру при распространении и который в начальной плоскости имеет комплексную амплитуду:

$$E(x, y, z = 0) = HPe_{\nu}\left(\frac{x}{x_0}, \frac{y}{y_0}\right) =$$

$$= \int_0^{+\infty} \exp\left[is^{4\nu} + is^{2\nu}\left(y/y_0\right) + is^{\nu}\left(x/x_0\right)\right] ds.$$
(4)

В произвольной плоскости комплексная амплитуда такого пучка примет вид:

$$E(x, y, z) = \frac{1}{(1 - z/z_e)^{1/(4v)}} \times$$

$$\times HPe_v \left(\frac{x}{x_0 (1 - z/z_e)^{1/4}}, \frac{y - y_0 z/(2kx_0^2)}{y_0 (1 - z/z_e)^{1/2}} \right).$$
(5)

Заметим, что в отличие от (3) в (4) уже не требуется целочисленности параметра v, так как интеграл берётся только по положительным значениям переменной интегрирования s.

Дифракционная картина пучков (5) в поперечной плоскости имеет вид наклонных световых линий, дифракционной толщины (рис. 1*a*). Функция $HPe_v(x/x_0, y/y_0)$ была рассчитана тем же способом, что и в работе [8], т.е. использовался поворот контура интегрирования в комплексной плоскости, только вместо замены переменных $s \rightarrow s' \exp(i\pi/8)$ была замена $s \rightarrow s' \exp(i\pi/(8v))$. При вычислении были использованы следующие параметры: длина волны $\lambda = 532$ нм, $x_0 = y_0 = \lambda, v = 1$.

Угловой спектр ПП-пучка *v*-го порядка имеет вид:

$$\tilde{E}(k_{x},k_{y}) = \begin{cases} \frac{x_{0}y_{0}}{p}(-k_{x}x_{0})^{\frac{1-\nu}{\nu}}\exp(ik_{x}^{4}x_{0}^{4}) \times \\ \times \delta(k_{x}^{2}x_{0}^{2}+k_{y}y_{0}), k_{x}x_{0} < 0, \\ 0, k_{x}x_{0} \ge 0. \end{cases}$$
(6)

Как и в работе [8], угловой спектр (6) отличен от нуля на параболе $k_x^2 x_0^2 + k_y y_0$, однако не на всей параболе, а только на её половине (при $k_x x_0 < 0$).

Пучок Пирси с начальным полем (1) является линейной комбинацией ПП-пучков (4) первого порядка:

$$\operatorname{Pe}\left(\frac{x}{x_0}, \frac{y}{y_0}\right) = \operatorname{HPe}_1\left(\frac{x}{x_0}, \frac{y}{y_0}\right) + \operatorname{HPe}_1\left(-\frac{x}{x_0}, \frac{y}{y_0}\right).$$
(7)

Это также видно и из рис. 1a, 6: пучок Пирси из [8] является результатом интерференции ПП-пучка из рис. 1a и его зеркального отражения относительно плоскости x=0. Заметим, что слагаемые в (7) описывают два пучка, при распространении которых их амплитуды приобретают лишь множитель, зависящий от y_0^2 , т.е. одинаковый для обоих пучков. Поэтому коэффициенты в линейной комбинации могут быть произвольными, и, тем не менее, пучок будет сохранять свою структуру. В частности, можно рассмотреть в (7) вместо суммы разность, и тогда получится пучок, аналогичный пучку Пирси в [8], но в центре вместо максимума интенсивности будет минимум. Интенсивность разницы двух симметричных относительно плоскости x=0 ПП-пучков показана на рис. 1a.



Рис. 1. Распределение интенсивности (негатив) ПП-пучка при v = 1 (a), полного пучка Пирси из [8] (б) и разности симметричных ПП-пучков с нулевой интенсивностью в плоскости x = 0 (в)

На рис. 2 показаны те же дифракционные картины, что и на рис. 1, но для случая дробного порядка v = 1,5.

Из рис. 2 видно, что с ростом порядка функции Пирси v дифракционная картина принципиально не изменилась, хотя при v = 1,5 к краю картины локальные максимумы интенсивности спадают быстрее.



Рис. 2. Распределение интенсивности (негатив) ПП-пучка при v = 1,5 (а), полного пучка Пирси из [8] (б) и разности половинных ПП-пучков с нулевой интенсивностью в плоскости x = 0 (в)

Заметим, что при получении (5) из (4) замену переменной интегрирования можно делать только для $z < z_e$, в противном случае пределы становятся мнимыми. Однако можно показать, что

$$E\left(x,\frac{y_{0}^{3}}{x_{0}^{2}}+\eta,z_{e}+\zeta\right)=E^{*}\left(-x,\frac{y_{0}^{3}}{x_{0}^{2}}-\eta,z_{e}-\zeta\right),$$
 (8)

т.е. подобно пучку Пирси [8] после прохождения пучка через плоскость $z = z_e$ распределение интенсивности является зеркальным отражением распределения интенсивности до плоскости $z = z_e$ относительно плоскостей x = 0 и $y = y_0^{3/x_0^2}$.

В заключение данного раздела заметим, что комплексные амплитуды двух трёхмерных ПП-пучков с параметрами (x_{01}, y_{01}) и (x_{02}, y_{02}) ортогональны при условии, что $y_{02}/y_{01} \neq x_{02}^2/x_{01}^2$. Это условие может быть получено как непосредственно с помощью скалярного произведения функций $\text{HPe}_{\nu}(x/x_{01}, y/y_{01})$ и $\text{HPe}_{\nu}(x/x_{02}, y/y_{02})$, так и из того, что при данном условии угловые спектры плоских волн (6) отличны от нуля на разных непересекающихся параболах.

2. Двумерные половинные пучки Пирси

Аналогично (4) можно рассмотреть 2D ПП-пучки, комплексная амплитуда которых в начальной плоскости имеет вид:

$$E(x,0) = \int_{0}^{+\infty} \exp\left[is^{p}\left(\frac{x}{x_{0}}\right) + is^{2p}\right] ds =$$

$$= \mathrm{HPe}_{p}^{2D}\left(\frac{x}{x_{0}}\right).$$
(9)

С помощью преобразования Френеля можно показать, что на некотором расстоянии *z* комплексная амплитуда станет равна

$$E(x,z) = \int_{0}^{+\infty} \exp\left[is^{p}\left(\frac{x}{x_{0}}\right) + i\left(1 - \frac{z}{2kx_{0}^{2}}\right)s^{2p}\right] \mathrm{d}s \quad (10)$$

Сделаем замену переменной интегрирования $s = (1 - z/z_e)^{-1/(2p)}t$, где $z_e = 2kx_0^2$. Тогда вместо (10) получим для комплексной амплитуды 2D ПП-пучка:

$$E(x,z) = \frac{1}{(1-z/z_e)^{1/(2p)}} \times$$

$$\times \text{HPe}_p^{2D} \left(\frac{x}{x_0 (1-z/z_e)^{1/2}} \right).$$
(11)

Как и в трёхмерном случае, здесь замену переменной интегрирования можно делать только для $z < z_e$. В противном случае пределы становятся мнимыми. Но из (10) следует, что

$$E(x, z_e + \zeta) = E^*(-x, z_e - \zeta), \qquad (12)$$

где ζ – расстояние вдоль оси *z* от фокальной плоскости, т.е. после прохождения 2D ПП-пучка через плоскость *z* = *z*_e распределение его интенсивности является зеркальным отражением распределения интенсивности до плоскости *z* = *z*_e относительно оптической оси.

Из (11) видно, что в начале распространения (до фокальной плоскости $z = z_e$) в любой поперечной плоскости $z < z_e$ координаты максимумов интенсивности 2D ПП-пучка определяются по формуле:

$$x_{\max} = y_m x_0 \sqrt{1 - \frac{z}{z_e}} , \qquad (13)$$

где y_m – координата *m*-го максимума функции $\left| \text{HPe}_p^{2D}(x) \right|^2$. Дважды продифференцировав (13) по *z*, получим, что при $z < z_e$ будет выполняться неравенство $(dx_{\text{max}}/dz)(d^2x_{\text{max}}/dz^2) > 0$, что свидетельствует о наличии ускорения траектории пучка перед фокусировкой. Из свойства симметрии (12) следует, что после прохождения через плоскость $z = z_e$ 2D ПП-пучок начнёт распространяться с замедлением.

Рассмотрим распространение 2D ПП-пучка при p=2. Пусть $\lambda=532$ нм, $x_0=\lambda$. Тогда $z_e=4\pi\lambda$. На расстоянии $z = 3z_e/4$ пучок сужается в два раза, в нашем случае это расстояние равно $z=3\pi\lambda$. Максимальная интенсивность при этом увеличивается в два раза. В плоскости $z_{e} = 4\pi\lambda$ поле (11) «бесконечно» сужается, и возникает фокус. Для выбранных параметров интенсивность в начальной плоскости имеет вид, показанный на рис. За. Моделирование проводилось конечно-разностным методом распространения пучка (ВРМ-методом) в области $-80\lambda \le x \le 80\lambda$, $0 \le z \le 30\lambda$. На рис. 36 показано рассчитанное распределение интенсивности в плоскости Oxz. На рис. 36, г показаны сечения интенсивности (рис. 3*б*) при z=0 (рис. 3*в*) и $z=75\lambda/8$ ($\approx 3\pi\lambda$) (рис. 3*г*). Из рис. 3 видно, что пучок действительно сузился в два раза: при z=0 координата четвёртого нуля равна примерно -10λ , а при $z = 75\lambda/8$ она равна примерно -5λ . Максимальная интенсивность на рис. Зг в два раза выше максимальной интенсивности на рис. Зв.

Кроме того, видно, что и на рис. 3*e*, и на рис. 3*e* интенсивность второго максимума примерно в два раза меньше интенсивности главного максимума, что также демонстрирует изменение светового пучка при распространении только в масштабе, но не в структуре.



Рис. 3. Распределение интенсивности 2D ПП-пучка, рассчитанное BPM-методом: сечение интенсивности вдоль оси x при z = 0 (а), интенсивность в плоскости Oxz (негатив) (б), сечения интенсивности вдоль оси x при z = 0 (в)(увеличенная картинка (а)) и при z = 75 Å/8 (г)

В заключение данного раздела заметим, что в отличие от трёхмерных пучков комплексные амплитуды двух 2D ПП-пучков с параметрами x_{01} и x_{02} не ортогональны.

Заключение

В работе получены следующие результаты:

 получено новое решение параксиального уравнения Гельмгольца (уравнения типа Шрёдингера), описывающее трёхпараметрическое семейство структурно-устойчивых трёхмерных половинных пучков Пирси (уравнения (4), (5));

- показано, что полный пучок Пирси из [8] является суммой двух симметричных половинных пучков Пирси первого порядка (уравнение (7)); с помощью линейной комбинации из двух симметричных половинных пучков Пирси с разными амплитудами можно формировать новые структурно-устойчивые пучки, которые не будут ни полными пучками Пирси [8], ни половинными пучками Пирси;
- получена формула для амплитуды углового спектра плоских волн трёхмерных половинных пучков Пирси (уравнение (6)); амплитуда спектра отлична от нуля на половине параболы;
- получено условие ортогональности комплексных амплитуд трёхмерных половинных пучков Пирси: ортогональны половинные пучки Пирси, Фурьеспектр которых лежит на непересекающихся параболах; установлено, что двумерные пучки Пирси не ортогональны;
- получено решение двумерного параксиального уравнения Гельмгольца, описывающее двумерный аналог структурно-устойчивых половинных пучков Пирси (уравнения (9), (11));
- показано, что двумерный половинный пучок Пирси, как и трёхмерный, обладает свойством автофокусировки, а также ускоряющейся траекторией до фокальной плоскости (рис. 36).

Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантов Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-3970.2014.9) и молодого доктора наук (МД-1929.2013.2), а также грантов РФФИ 13-07-97008 и 14-07-31092.

Литература

- Durnin, J. Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory // Journal of the Optical Society of America A. - 1987. - V. 4(4). - P. 651-654.
- Котляр, В.В. Бездифракционные асимметричные элегантные пучки Бесселя с дробным орбитальным угловым моментом / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, В.А. Сойфер // Компьютерная оптика – 2014. – Т. 38, № 1. – С. 4-10.
- Kotlyar, V.V. Asymmetric Bessel modes / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // Optics Letters. – 2014. – V. 39(8). – P. 2395-2398.
- Gutierrez-Vega, J.C. Experimental demonstration of optical Mathieu beams / J.C. Gutiérrez-Vega, MD Iturbe-Castillo, G.A. Ramırez, E. Tepichin, R.M. Rodriguez-Dagnino, S. Chávez-Cerda, G.H.C. New // Optics Communications. – 2001. – V. 195(1). – P. 35-40.
- Berry, M.V. Nonspreading wave packets / M.V. Berry, N.L. Balazs // American Journal of Physics. – 1979. – V. 47(3). – P. 264-267.
- Siegman, A.E. Lasers / A.E. Siegman. University Science, 1986.
- Kotlyar, V.V. Hypergeometric modes / V.V. Kotlyar, R.V. Skidanov, S.N. Khonina, V.A. Soifer // Optics Letters. – 2007. – V. 32. – P. 742-744.
- Ring, J. Auto-focusing and self-healing of Pearcey beams / J. Ring, J. Lindberg, A. Mourka, M. Mazilu, K. Dholakia

and M. Dennis // Optics Express. - 2012. - V. 20. -P. 18955-18966.

- 9. Pearcey, T. The structure of an electromagnetic field in the neighbourhood of a cusp of a caustic / T. Pearcey // Philosophical Magasine. - 1946. - V. 7(37). - P. 311-317.
- 10. Berry, M.V. Integrals with coalescing saddles [Electronical Resource] / M.V. Berry and C.J. Howls. http://dlmf.nist.gov/36.2. - Digital Library of Mathematical Functions, National Institute of Standards and Technology, 2012.
- 11. Deng, D. Virtual Source of a Pearcey beam / D. Deng, C. Chen, X. Zhao, B. Chen, X. Peng, Y. Zheng // Optics Letters. - 2014. - V. 39(9). - P. 2703-2706.

References

- 1. Durnin, J. Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory // Journal of the Optical Society of America A. - 1987. - V. 4(4). - P. 651-654.
- 2. Kotlyar, V.V. Diffraction-free asymmetric elegant Bessel beams with fractional orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // Computer Optics. - 2014. - V. 38(1). - P. 4-10.
- 3. Kotlyar, V.V. Asymmetric Bessel modes / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // Optics Letters. - 2014. -V. 39(8). - P. 2395-2398.
- 4. Gutierrez-Vega, J.C. Experimental demonstration of optical Mathieu beams / J.C. Gutiérrez-Vega, MD Iturbe-Castillo,

G.A. Ramirez, E. Tepichin, R.M. Rodriguez-Dagnino, S. Chávez-Cerda, G.H.C. New // Optics Communications. -2001. - V. 195(1). - P. 35-40.

- 5. Berry, M.V. Nonspreading wave packets / M.V. Berry, N.L. Balazs // American Journal of Physics. - 1979. -V. 47(3). – P. 264-267.
- 6. Siegman, A.E. Lasers / A.E. Siegman. University Science, 1986.
- 7. Kotlyar, V.V. Hypergeometric modes / V.V. Kotlyar, R.V. Skidanov, S.N. Khonina, V.A. Soifer // Optics Letters. - 2007. - V. 32. - P. 742-744.
- 8. Ring, J. Auto-focusing and self-healing of Pearcey beams / J. Ring, J. Lindberg, A. Mourka, M. Mazilu, K. Dholakia and M. Dennis // Optics Express. - 2012. - V. 20. -P. 18955-18966.
- 9. Pearcey, T. The structure of an electromagnetic field in the neighbourhood of a cusp of a caustic / T. Pearcey // Philosophical Magasine. - 1946. - V. 7(37). - P. 311-317.
- 10. Berry, M.V. Integrals with coalescing saddles [Electronical Resource] / M.V. Berry and C.J. Howls. - http://dlmf.nist.gov/36.2. - Digital Library of Mathematical Functions, National Institute of Standards and Technology, 2012.
- 11. Deng, D. Virtual Source of a Pearcey beam / D. Deng, C. Chen, X. Zhao, B. Chen, X. Peng, Y. Zheng // Optics Letters. - 2014. - V. 39(9). - P. 2703-2706.

STRUCTURALLY STABLE THREE-DIMENSIONAL AND TWO-DIMENSIONAL LASER HALF PEARCEY BEAMS

A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar, S.G. Zaskanov Image Processing Systems Institute, Russian Academy of Sciences, Samara State Aerospace University

Abstract

We obtain a new solution of the paraxial Helmholtz equation that describes a family of threedimensional and two-dimensional structurally stable half-Pearcey beams (HP-beams). HP-beams generalize Pearcey beams obtained in Opt. Express, 20, 18955 (2012), since these Pearcey beams can be considered as the sum of two first-order HP-beams. Three-dimensional HP-beams have angular spectrum of plane waves, which is non-zero at a half of parabola. For functions of HP-beams complex amplitudes, the orthogonality properties have been revealed. For two-dimensional HP-beam acceleration and deceleration of trajectory has been shown for areas before and beyond the focal plane respectively.

Key words: paraxial laser beam, structurally stable laser beam, Pearcey beam, accelerating beam.

Сведения об авторах

Сведения об авторах Котляр Виктор Викторович и Ковалёв Алексей Андреевич см. стр. 169 этого номера.



Засканов Станислав Германович, 1990 года рождения. В 2013 году получил степень магистра в Самарском государственном аэрокосмическом университете имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладные математика и физика». Обучается в аспирантуре на кафедре технической кибернетики СГАУ. Область научных интересов: обработка изображений, распознавание образов, рентгеновская оптика, нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика.

E-mail: icekilla@yandex.ru.

Stanislav Zascanov (b. 1990). Received a master's degree in Samara State Aerospace University (2013) in Applied Mathematics and Physics. He is a post-graduate student at Technical Cybernetics subdepartment of Samara State Aerospace University. Major fields of research: image processing, pattern recognition, x-ray optics, nanophotonics, diffractive computer optics.

Поступила в редакцию 21 марта 2014 г.