# ЛАЗЕРНЫЕ ПУЧКИ ЭРМИТА–ГАУССА С ОРБИТАЛЬНЫМ УГЛОВЫМ МОМЕНТОМ

*Котляр В.В., Ковалёв А.А., Порфирьев А.П.*
*Институт систем обработки изображений РАН,*
*Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ)*

**Аннотация**

Рассмотрены вихревые моды Эрмита–Гаусса (ВЭГ-моды), комплексная амплитуда которых пропорциональна многочлену Эрмита $n$-й степени, аргумент которого зависит от действительного параметра $a$. При $|a|<1$ на вертикальной оси в поперечном сечении пучка имеются $n$ изолированных нулей, которые порождают оптические вихри с топологическим зарядом +1 ($a<0$) или –1 ($a>0$). При $|a|>1$ у ВЭГ-моды аналогичные изолированные нули лежат на горизонтальной оси. При $|a|=1$ все $n$ изолированных нулей собираются на оптической оси в центре пучка и порождают оптический вихрь $n$-го порядка, и ВЭГ-мода совпадает с модой Лагерра–Гаусса порядка $(0,n)$, а при $a=0$ ВЭГ-мода совпадает с модой Эрмита–Гаусса порядка $(0,n)$. Рассчитан орбитальный угловой момент ВЭГ-мод, который зависит от параметра $a$ и меняется от 0 (при $a=0$ и $a\to\infty$) до $n$ ($a=1$). Результаты эксперимента согласуются с теорией.

Ключевые слова: орбитальный угловой момент лазерного пучка, вихревой пучок Эрмита–Гаусса.

## Введение

Моды Эрмита–Гаусса (ЭГ) известны в оптике с 1966 года [1]. Элегантные пучки ЭГ описываются функциями с комплексным аргументом. Эти пучки впервые рассмотрел в 1973 году A.E. Siegman [2]. В [3, 4] рассмотрены обобщённые пучки ЭГ, которые также являются решением параксиального уравнения распространения и имеют явный аналитический вид. Эти пучки при определённых параметрах переходят в моды ЭГ [1] и элегантные пучки ЭГ [2]. В [5] с помощью астигматического модового конвертора мода ЭГ высокого порядка преобразовывалась в моду Лагерра–Гаусса (ЛГ), обладающую фазовой сингулярностью. В [6] был рассмотрен интерференционный модовый π/2-конвертор. В [5] также получена формула, позволяющая получить моду ЛГ как конечную сумму мод ЭГ. Например, для того чтобы получить моду ЛГ с топологическим зарядом 2, требуется сложить минимум три моды ЭГ с определёнными комплексными коэффициентами. В [4] показано, что можно получить световое поле с любым целым ОУМ, сложив только две моды ЭГ с определёнными номерами. В [7] с помощью астигматического модового конвертора формировались пучки Эрмита–Лагерра–Гаусса, обладающие дробным ОУМ.

В данной работе рассмотрены вихревые моды Эрмита–Гаусса (ВЭГ-моды). Эти пучки являются суперпозицией ($n$+1)-й моды ЭГ. Комплексная амплитуда ВЭГ-мод пропорциональна многочлену Эрмита $n$-й степени, аргумент которого зависит от действительного параметра $a$. При $|a|<1$ на вертикальной оси в поперечном сечении пучка имеются $n$ изолированных нулей, которые порождают оптические вихри с топологическим зарядом +1 ($a<0$) или –1 ($a>0$). При $|a|>1$ у ВЭГ-моды аналогичные изолированные нули лежат на горизонтальной оси. При $|a|=1$ все $n$ изолированных нулей собираются на оптической оси в центре пучка и порождают оптический вихрь $n$-го порядка и ВЭГ-мода совпадает с модой Лагерра–Гаусса порядка $(0,n)$, а при $a=0$ ВЭГ-мода совпадает с модой Эрмита–Гаусса порядка $(0,n)$. Рассчитан орбитальный угловой момент (ОУМ) ВЭГ-мод, который зависит от параметра $a$ и меняется от 0 (при $a=0$ и $a\to\infty$) до $n$ ($a=1$). Показано, что две моды с разными номерами $n$ и $m$ – ортогональны, а две моды с одинаковым номером, но разными значениями параметра $a$ не ортогональны.

## 1. Комплексная амплитуда ВЭГ-моды

Комплексная амплитуда ЭГ – моды имеет вид [1]:

$$E_{nm}(x,y,z)=i^{n+m}\left[\frac{w}{w(z)}\right]^2\times \\ \times H_n\left[\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right]H_m\left[\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right]\times \\ \times\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}+\frac{ik\left(x^2+y^2\right)}{2R(z)}\right]\times \\ \times\exp\left[-i(n+m+1)\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{z_0}\right)\right], \tag{1}$$

где

$$z_0=\frac{kw^2}{2}, \\ w(z)=w\left[1+\left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]^{1/2}, \\ R(z)=z\left[1+\left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right], \tag{2}$$

$w$ – это радиус перетяжки Гауссова пучка, $R(z)$ – радиус кривизны волнового фронта Гауссова пучка, $z_0$ – длина Рэлея, $k$ – волновое число света, $H_n(x)$ – многочлен Эрмита. Пучки ЭГ (1) не имеют ОУМ. Линейная комбинация пучков ЭГ с действительными коэффициентами тоже будет иметь ОУМ, равный нулю. Отличным он нуля ОУМ может быть только для линейной комбинации пучков ЭГ с комплексными коэффициентами [4, 5]. Рассмотрим линейную комбинацию мод ЭГ (1) при $z=0$ с определёнными коэффициентами:

$$U_n(x,y,z)=i^n\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\times \\ \times\sum_{k=0}^{n}\frac{n!(ia)^k}{k!(n-k)!}H_k(x)H_{n-k}(y), \tag{3}$$

где $a$ – действительный параметр. В (3) ввели безразмерные координаты $\sqrt{2}x/w\to x$, $\sqrt{2}y/w\to y$ .

Используя справочное выражение из [8]

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n!\,t^k}{k!(n-k)!}H_k(x)H_{n-k}(y)= \\ =\left(1+t^2\right)^{n/2}H_n\left(\frac{tx+y}{\sqrt{1+t^2}}\right), \tag{4}$$

вместо (3) получим выражение для комплексной амплитуды ВЭГ-моды:

$$U_n(x,y,z)=i^n\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\times \\ \times\left(1-a^2\right)^{n/2}H_n\left(\frac{iax+y}{\sqrt{1-a^2}}\right). \tag{5}$$

Так как в сумме (3) сумма номеров ЭГ-мод одинакова для всех слагаемых ($k+(n-k)=n=\text{const}$), то все ЭГ-моды в линейной комбинации (3) имеют одинаковую фазовую скорость (одинаковые фазы Гоу $(n+m+1)\,\mathrm{arctg}(z/z_0)$), и поэтому весь пучок (3) тоже является параксиальной модой и распространяется без изменения поперечной структуры интенсивности (с точностью до масштаба и вращения). Но если исходные ЭГ-моды (1), из которых составлен пучок (5), имеют нулевой ОУМ, то пучок (5) имеет ОУМ, отличный от нуля (если $n\neq 0$).

Из (5) следует, что при $a=0$ ВЭГ-мода совпадает с обычной ЭГ-модой с номерами $(0, n)$, а при $a\to\infty$ ВЭГ-мода совпадает с обычной ЭГ-модой с номерами $(n, 0)$. При $n=0$ ВЭГ-мода (5) совпадает с обычным Гауссовым пучком. Найдём, предел амплитуды (5) при $a\to 1$. Член многочлена Эрмита $H_n(x)$ имеет максимальную степень, равную $(2x)^n$, поэтому при $a=1$ из (5) получим:

$$U_n(x,y,z)=i^n2^n\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)(ix+y)^n= \\ =(-2)^n\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)r^n\exp(-in\varphi). \tag{6}$$

где $r=(x^2+y^2)^{1/2}$, $\varphi=\mathrm{arctg}(y/x)$.

Из (6) следует, что ВЭГ-мода при $a=1$ совпадает с обычной модой Лагерра–Гаусса с номером $(0, n)$.

### 2. Орбитальный угловой момент ВЭГ-моды

Получим выражение для ОУМ светового поля (5). Найдём ОУМ такого пучка по формуле [9]:

$$J_z=\mathrm{Im}\iint_{\mathbb{R}^2}E^*\left(x\frac{\partial E}{\partial y}-y\frac{\partial E}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{7}$$

Строго говоря, в (7) показан не весь ОУМ, а только усреднённая по поперечной плоскости его проекция (определённая с точностью до константы) на оптическую ось. ОУМ (7) сохраняется по мере распространения пучка [9], и поэтому его можно вычислять в любой плоскости, например, при $z=0$. Подставив (3) в (7), получим:

$$J_z=-\pi 2^n n!\left[2na\left(1+a^2\right)^{n-1}\right]. \tag{8}$$

При выводе (8) воспользовались свойством ортогональности функций Эрмита–Гаусса [8]:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-x^2\right)H_n(x)H_m(x)\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}2^n n!\delta_{nm}\,, \tag{9}$$

где $\delta_{nm}$ – символ Кронекера. Для того, чтобы ОУМ не зависел от мощности лазерного излучения, рассмотрим нормированный на интенсивность ОУМ. Мощность пучка (3) описывается выражением:

$$I=\iint_{\mathbb{R}^2}E^*E\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi 2^n n!\left(1+a^2\right)^n. \tag{10}$$

Поэтому нормированный ОУМ (ОУМ, делённый на мощность пучка) для ВЭГ-моды равен:

$$\frac{J_z}{I}=-\frac{2an}{1+a^2}\,. \tag{11}$$

Интересно, что ОУМ (11) совпадает с ОУМ пучков, состоящих из линейной комбинации всего двух мод ЭГ, которые были рассмотрены авторами ранее в [4]. Из (11) следует, что при $a=1$ ОУМ ВЭГ-мод равен целому числу

$$\frac{J_z}{I}=-n\,. \tag{12}$$

Из (12) следует, что так как при $a=1$ ВЭГ-мода совпадает с обычной модой Лагерра–Гаусса с номером $(0, n)$ (6), то и ОУМ будет равен по модулю топологическому заряду оптического вихря $\exp(in\varphi)$.

Заметим, что при некоторых значениях $n$ ОУМ будет равен целому числу и при значениях $a\neq 1$. Например, при $a=1/2$ ОУМ (11) будет целым числом при $n$, кратных 5: при $n=5$ $J_z/I=-4$, при $n=15$ $J_z/I=-12$ и т.д. Из (11) следует, что при $a=0$ и $a\to\infty$ ОУМ равен нулю.

### 3. Численное моделирование

Перепишем (5) в размерных переменных:

$$E_n(x,y,z=0)=i^n\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w^2}\right)\times \\ \times\left(1-a^2\right)^{n/2}H_n\left[\frac{\sqrt{2}(iax+y)}{w\sqrt{1-a^2}}\right]. \tag{13}$$

По формуле (13) была рассчитана интенсивность и фаза в начальной плоскости ($z=0$) для ВЭГ-мод с разными значениями параметра $a$. На рис. 1 показаны результаты расчёта. Параметры расчёта следующие: длина волны монохроматического света $\lambda=532$ нм, топологический заряд (или номер многочлена Эрмита) $n=3$, радиус перетяжки Гауссова пучка с начальной плоскости $w=10\lambda$, размер области расчёта – $50\lambda \le x, y \le +50\lambda$.

На рис. 1 показаны интенсивность (рис. 1*а, б, в*) и фаза (рис. 1*г, д, е*) ВЭГ-моды в начальной плоскости ($z=0$) при разных значениях $a$: 0,5 (рис. 1*а, г*); 1,5 (рис. 1*б, д*); 1 (рис. 1*в, е*). На рис. 2*а* показано сечение интенсивности из рис. 1*а* при $x=0$.

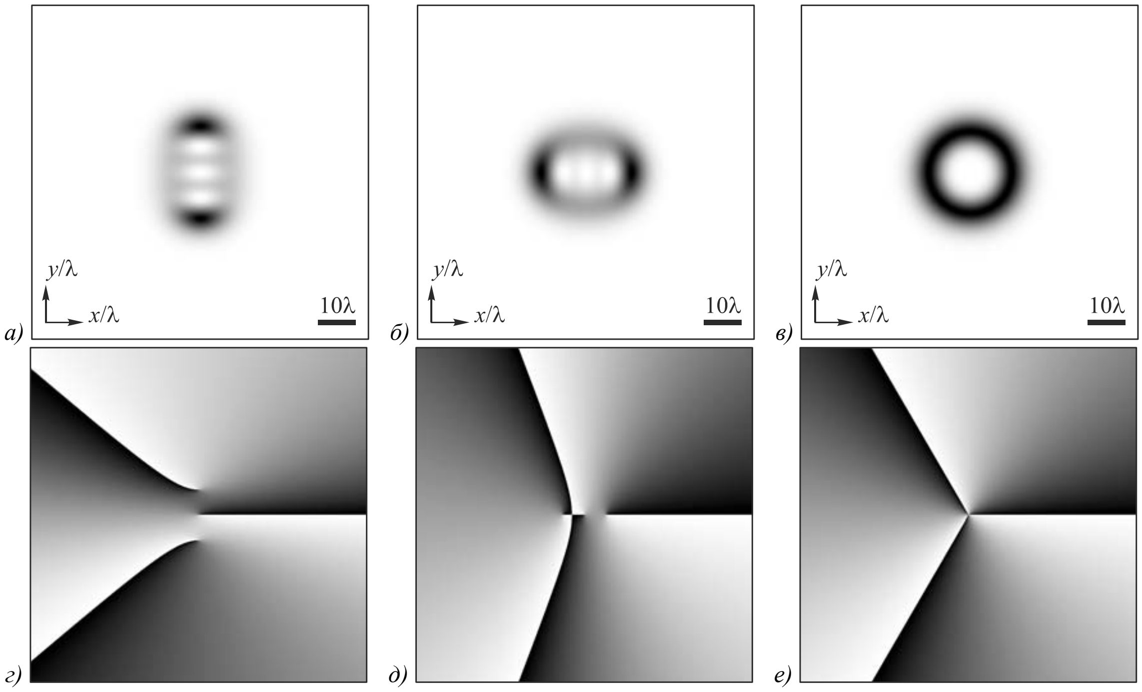



*Рис. 1. Интенсивность (а, б, в) и фаза (г, д, е) ВЭГ-мод в начальной плоскости (z = 0) при разных значениях параметра a: a = 0,5 (а, г); a = 1,5 (б, д); a = 1,001 (в, е)*

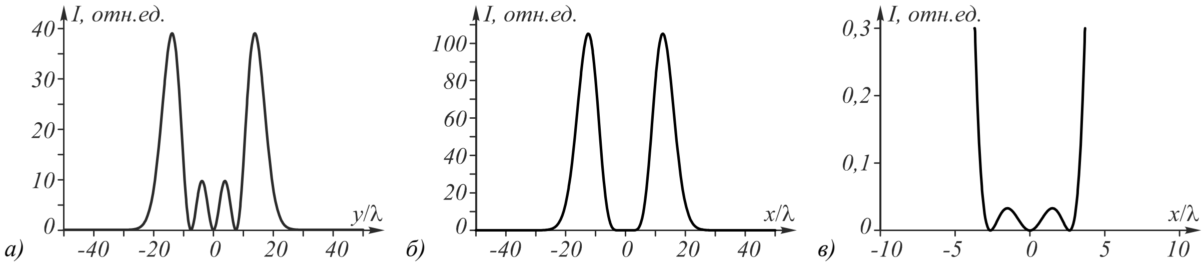



*Рис. 2. Сечение интенсивности ВЭГ-моды при a = 0,5 и x = 0 (а), при a = 1,05 и y = 0: целиком (б) и увеличенный фрагмент (в)*

Из этого рисунка видно наличие трёх нулей интенсивности. На рис. 2*б* показано сечение интенсивности при $a=1{,}05$ и $y=0$, а на рис. 2*в* – увеличенный фрагмент сечения в центре картины (рис. 2*б*) при этих же параметрах. На рис. 2*в* также видно наличие трёх нулей, не видимых на рис. 2*б*. ОУМ, рассчитанный по формуле (11), для показанных мод был равен: $J_z/I=-2{,}4$ (рис. 1*а, г*); $J_z/I=-2{,}77$ (рис. 1*б, д*); $J_z/I=-3$ (рис. 1*в, е*). Зависимость ОУМ от параметра $a$ показана на рис. 3.

Из рис. 3 видно, что для заданного $n$ ОУМ имеет максимальное значение при $a=1$.

### 4. *Изолированные нули интенсивности ВЭГ-моды*

Найдём из (13) координаты изолированных нулей интенсивности ВЭГ-моды в начальной плоскости. Приравняем аргумент многочлена Эрмита значению корня этого многочлена $\gamma_{nk}$, то есть $H_n(\gamma_{nk})=0$. Тогда получим координаты изолированных нулей интенсивности:

$$\begin{cases} x_{nk}=0, \\ y_{nk}=\gamma_{nk}\left(\dfrac{w}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{1-a^2}, \ |a|<1, \end{cases} \tag{14}$$

и

$$\begin{cases} x_{nk}=\gamma_{nk}\left(\dfrac{w}{a\sqrt{2}}\right)\sqrt{a^2-1}, \ |a|>1, \\ y_{nk}=0. \end{cases} \tag{15}$$

Из (14) видно, что при $|a|<1$ у ВЭГ-моды $n$-го порядка (13) есть $n$ изолированных нулей интенсивности, которые лежат на оси $y$ и имеют координаты, пропорциональные корням многочлена Эрмита $\gamma_{nk}$, но уменьшенным в $(1-a^2)^{-1/2}$ раз. При этом при $a=0$, когда ВЭГ-мода совпадает с обычной ЭГ-модой с номером $(0, n)$, нули интенсивности имеют координаты, равные корням $\gamma_{nk}$, и уже не являются изолированными нулями интенсивности, а принадлежат линиям нулевой интенсивности, параллельным оси $x$. С ростом параметра $a$ от 0 до 1 изолированные нули (14) смещаются вдоль оси $y$ к центру ($x=y=0$), и при $a=1$ все нули «сливаются» в один изолированный ноль ($n$-кратно вырожденный) интенсивности в центре координат. Из (15) следует, что аналогичная динамика только вдоль оси $x$ наблюдается у изолированных нулей ВЭГ-моды при $|a|>1$. С ростом $a$ нули интенсивности «удаляются» от центра координат и в пределе при $a\to\infty$ координаты всех нулей совпадают с корнями $\gamma_{nk}$, а сами нули интенсивности принадлежат линиям нулей, параллельным оси $y$.

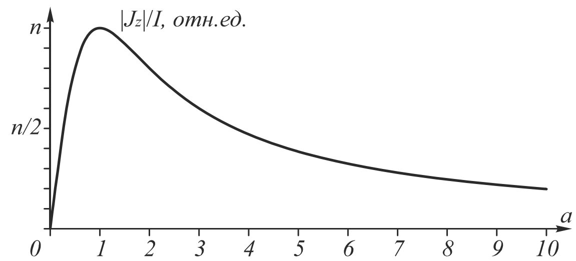



*Рис. 3. Зависимость ОУМ от параметра a*

С каждым изолированным нулём интенсивности ВЭГ-моды связан оптический вихрь с топологическим зарядом -1 при $a>0$ или +1 при $a<0$. Это следует из (6).

При распространении ВЭГ-моды (5) или (13) в аргументе многочлена Эрмита радиус перетяжки Гауссова пучка $w$ нужно заменить на выражение из (2):

$$w(z)=w\left(1+z^2/z_0^2\right)^{1/2}. \tag{16}$$

Подставим (16), например, в (14), получим для координат изолированных нулей:

$$\begin{cases} x_{nk}=0, \\ y_{nk}=\gamma_{nk}\left(\dfrac{w\sqrt{1+z^2/z_0^2}}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{1-a^2}\ , |a|<1. \end{cases} \tag{17}$$

Из (17) следует, что изолированные нули интенсивности (и сама картина интенсивности) ВЭГ-моды меняется при распространении только масштабно: нули интенсивности, оставаясь на оси $y$, удаляются от начала координат с ростом расстояния $z$.

Из (14) и (15) следует замечательное свойство изолированных нулей интенсивности: минимальное расстояние между ними не ограничивается дифракционным пределом и длиной волны, а может быть любым. При значении параметра $a$, отличающегося от единицы на бесконечно малую величину $\delta<<1$, расстояние между крайними изолированными нулями интенсивности для ВЭГ-моды (13) будет меньше величины $\sqrt{2n(n-1)}w\delta$ . Правда, при распространении в пространстве с ростом $z$ расстояние между нулями будет расти: $\sqrt{2n(n-1)}\,w\delta\sqrt{1+z^2/z_0^2}$ .

### 5. Ортогональность ВЭГ-мод

Рассмотрим скалярное произведение двух ВЭГ-мод с разными параметрами $n$, $a$ и $m$, $b$. Можно показать, что имеет место равенство:

$$\begin{aligned} &\left\langle E_{na}, E_{mb}\right\rangle = \\ &=\int\limits_{-\infty}^{\infty} E_n\left(x,y,z=0;a\right)E_m^*\left(x,y,z=0;b\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &=\pi 2^n\left(n!\right)^2\left[\frac{1-(ab)^{n+1}}{1-(ab)}\right]\delta_{nm}, \end{aligned} \tag{18}$$

где $\delta_{nm}$ – символ Кронекера. Из (18) следует, что ВЭГ-моды ортогональны по номеру $n$ и не ортогональны по параметру $a$. При $ab\to 1$ неопределённость в (18) раскрывается: $\langle E_{na}, E_{mb}\rangle=\pi 2^n n!(n+1)!\delta_{nm}$. Интересно заметить, что две ВЭГ-моды с разными номерами $n$ и $m$ будут ортогональны и будут иметь одинаковый ОУМ (но не максимальный) при условии, что параметры $a$ и $b$ удовлетворяют условию:

$$\frac{n}{m}=\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{1+a^2}{1+b^2}\right). \tag{19}$$

Физически это объясняется тем, что ОУМ лазерного пучка зависит не только от числа изолированных нулей, например, с топологическим зарядом +1, но и от того, какие они имеют координаты [4]. Чем дальше нули интенсивности находятся от центра Гауссова пучка, тем меньше их вклад в ОУМ. Максимальный вклад в ОУМ нули интенсивности дают, когда они все «собираются» в один вырожденный ноль в центре Гауссова пучка.

### 6. Эксперимент

Для формирования вихревых ВЭГ-пучков использована оптическая схема, представленная на рис. 4. Для вывода изображений фаз был использован пространственный модулятор света SLM PLUTO-VIS (разрешение $1920\times 1080$ пикселов, размер пикселя – 8 мкм). Выходной пучок твердотельного лазера Laser ($\lambda=532$ нм) ослаблялся с помощью фильтров нейтральной плотности F. Система из микрообъектива MO (40×, NA = 0,6), линзы $L_1$ ($f=350$ мм) и пинхола PH (размер отверстия – 40 мкм) была использована для получения однородного Гауссового профиля интенсивности освещающего SLM лазерного пучка. Кроме того, это позволяло произвести расширение пучка, для того чтобы он полностью покрывал дисплей модулятора. Диафрагма $D_1$ позволяла менять радиус пучка, падающего на дисплей модулятора света. Отражённый от модулятора пучок с помощью делителя пучка BS и прямоугольной призмы RP направлялся на линзу $L_2$ ($f_3=350$ мм). Данная линза в сочетании с диафрагмой $D_2$ была использована для высокочастотной оптической фильтрации. Далее с помощью линзы $L_3$ ($f_2=150$ мм) строилось изображение на матрице CMOS-камеры MDCE-5A (1/2", разрешение $1280\times 1024$ пикселов). Расстояние между диафрагмой $D_2$ и линзой $L_3$ было больше фокусного расстояния линзы, равного 150 мм, это позволяло получить сходящий световой пучок, при этом фокус системы получался на расстоянии около 550 мм от плоскости $z=0$, сопряжённой с плоскостью дисплея модулятора. Для разделения в пространстве нулевого и первого порядков дифракции было использовано сложение исходной фазовой функции с линейной фазовой маской.

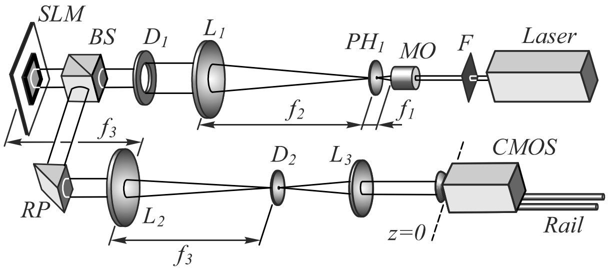



*Рис.4. Оптическая схема для формирования световых ВЭГ-пучков: Laser – твердотельный лазер (λ = 532 нм), F – фильтр нейтральной плотности, МО – микрообъектив (40×, NA = 0,6), PH – пинхол (40 мкм), $L_1$, $L_2$ – линзы с фокусным расстоянием $f_2=f_3=350$ мм, $L_3$ – линза с фокусным расстоянием $f_4=150$ мм, BS – делитель пучка, SLM – пространственный модулятор света PLUTO_VIS, RP – прямоугольная призма, D – диафрагма, CMOS – CMOS-камера MDCE-5A (1280 × 1024), Rail – оптические рельсы*

Изображение фазы, использованной в эксперименте, имело размер $1024\times1024$ пикселов, таким образом, размер выведенного на дисплей модулятора фазового элемента составил примерно $8{,}2\times8{,}2$ мм. Диаметр освещающего пучка в ходе экспериментов составил около 3 мм. Данные параметры эксперимента позволили сформировать ВЭГ-пучок, изображения которого на различных расстояниях от SLM показаны на рис. 5. Данные изображения были сформированы с помощью фазового распределения, представленного на рис. 5*а* (линейная фаза не показана). Из представленных изображений видно, что сформированный лазерный пучок похож на рассчитанный (рис. 1*а*) и сохраняет свою структуру при распространении в пространстве с точностью до масштаба.

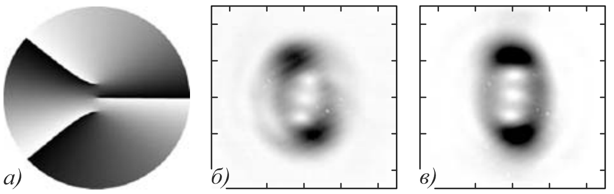



*Рис. 5. Некодированная фаза для формирования ВЭГ-пучка (n = 3) (а) и экспериментально сформированные распределения интенсивности (негативы) на различных расстояниях: 400 мм (б); 550 мм (в). Шаг сетки на изображениях равен 0,3 мм, топологический заряд оптического вихря n = 3*

На рис. 6 показана кодированная фаза ($n=10$), которая учитывает амплитуду ВЭГ-пучка при $z=0$. Поэтому картины интенсивности, зарегистрированные на разных расстояниях от модулятора (рис. 6*в*, *г*, *д*), во-первых, также сохраняют свой вид при распространении, а во-вторых, более точно воспроизводят распределение интенсивности идеального ВЭГ-пучка (рис. 6*б*).

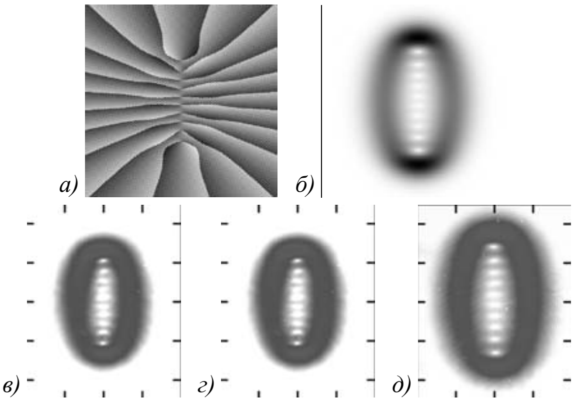



*Рис. 6. Кодированная фаза для формирования ВЭГ-пучка (n = 10) (а), расчётная амплитуда (негатив) (б) и экспериментально сформированные распределения интенсивности (негативы) на различных расстояниях: 100 мм (в); 150 мм (г); 200 мм (д). Шаг сетки на изображениях равен 0,5 мм*

## Заключение

В заключении укажем, что двухпараметрическое $(n,a)$ семейство ВЭГ-мод (13) можно обобщить на трёхпараметрическое семейство $(n,a,b)$, используя формулу сложения многочленов Эрмита [10, 8.958], [11, с. 254]:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\frac{(ia)^k(b)^{n-k}}{k!(n-k)!}H_k(x)H_{n-k}(y)=\\&=(n!)^{-1}\left(b^2-a^2\right)^{n/2}H_n\left(\frac{iax+by}{\sqrt{b^2-a^2}}\right).\end{aligned}\qquad(20)$$

С учётом (20), вместо (13) будем иметь:

$$\begin{aligned}&E_{nab}(x,y,z=0)=i^n\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w^2}\right)\times\\&\times\left(b^2-a^2\right)^{n/2}H_n\left[\frac{\sqrt{2}(iax+by)}{w\sqrt{b^2-a^2}}\right],\end{aligned}\qquad(21)$$

где *a*, *b* – действительные числа. Уравнение (21) описывает комплексную амплитуду обобщённых ВЭГ-пучков, ОУМ которых достигает максимума при $a=b$. Заметим, что замена $a'=a/b$ сводит пучки (21) к пучкам (13).

В работе получены следующие результаты. Рассмотрены вихревые моды Эрмита–Гаусса (ВЭГ-моды), комплексная амплитуда которых пропорциональна многочлену Эрмита *n*-й степени, аргумент которого зависит от действительного параметра *a*. При $|a|<1$ на вертикальной оси в поперечном сечении пучка имеется *n* изолированных нулей, которые порождают оптические вихри с топологическим зарядом +1 ($a<0$) или –1 ($a>0$). При $|a|>1$ у ВЭГ-моды аналогичные изолированные нули лежат на горизонтальной оси. При $|a|=1$ все *n* изолированных нулей собираются на оптической оси в центре пучка и порождают оптический вихрь *n*-го порядка и ВЭГ-мода совпадает с модой Лагерра–Гаусса порядка $(0,n)$, а при $a=0$ ВЭГ-мода совпадает с модой Эрмита–Гаусса порядка $(0,n)$. Рассчитан орбитальный угловой момент (ОУМ) ВЭГ-мод, который зависит от параметра $a$ и меняется от 0 (при $a=0$ и $a\to\infty$) до $n$ ($a=1$). Показано, что две ВЭГ-моды ортогональны, если имеют разные значения номера $n$, и не ортогональны, если имеют разные значения параметра $a$ и одинаковый номер $n$. Экспериментально с помощью жидкокристаллического пространственного фазового модулятора света сформированы ВЭК-пучки с топологическим зарядом $n=3$, 10, которые согласуются с расчётными и сохраняет свою структуру при распространении.

### *Благодарности*

Авторы выражают благодарность профессору В.Г. Волостникову за указание на то, что моды (5) являются частным случаем пучков Эрмита-Лагерра-Гаусса [7], и что при $a\to\infty$ амплитуда пучка (5) тоже стремится к бесконечности.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, а также грантов РФФИ 13-07-97008, 14-29-07133.

### *Литература (References)*

1. **Kogelnik, H.** Laser beams and resonators / H. Kogelnik, T. Li // Proceedings of the IEEE. – 1966. – Vol. 54. – P. 1312-1329.
2. **Siegman, A.E.** Hermite-Gaussian functions of complex argument as optical beam eigenfunction / A.E. Siegman // Journal of the Optical Society of America. – 1973. – Vol. 63. – P. 1093-1094.
3. **Pratesi, R.** Generalized Gaussian beams in free space / R. Pratesi, L. Ronchi // Journal of the Optical Society of America A. – 1977. – Vol. 67. – P. 1274-1276.
4. **Kotlyar, V.V.** Hermite–Gaussian modal laser beams with orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // Journal of the Optical Society of America A. – 2014. – Vol. 31. – P. 274–282.
5. **Abramochkin, E.G.** Beam transformation and nontransformed beams / E.G. Abramochkin, V.G. Volostnikov // Optics Communications. – 1991. – Vol. 83. – P. 123-125.
6. **Beijersbergen, M.W.** Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum / M.W. Beijersbergen, L. Allen, H.E.L.O. van der Veen, J.P. Woerdman // Optics Communications. – 1993. – Vol. 96. – P. 123-132.
7. **Abramochkin, E.G.** Generalized Gaussian beams / E.G. Abramochkin, V.G. Volostnikov // Journal of Optics A: Pure and Applied Optics. – 2004. – Vol. 6. – P. S157-S161.
8. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев – М.: Наука, 1981. – 798 с. (**Prudnikov, A.P.** Integrals and series. Special functions / A.P. Prudnikov, J.A. Brychkov, O.I. Marichev. – Moscow: "Science" Publisher, 1983. – 798 p. – (In Russian).
9. **Khonina, S.N.** An analysis of the angular momentum of a light field in terms of angular harmonics / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, P. Paakkonen, J. Simonen, J. Turunen // Journal of Modern Optics. – 2001. – Vol. 48. – P. 1543-1557.
10. **Gradshteyn, I.S.** Table of Integrals, Series, and Products 5 Edition / I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik. – New York: Academic, 1996. – 1762 p.
11. **Magnus, W.** Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics / W. Magnus, F. Oberhettinger, R.P. Sony. – 3-d ed. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1966. – 508 p.

## HERMITE-GAUSSIAN LASER BEAMS WITH ORBITAL ANGULAR MOMENTUM

*V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev*
*Image Processing Systems Institute, Russian Academy of Sciences,*
*Samara State Aerospace University*

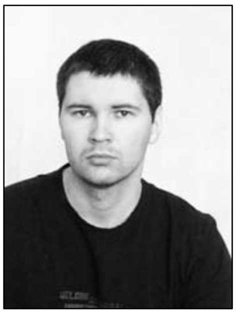
### *Abstract*

We consider vortex Hermite-Gaussian modes (VHG-modes) with their complex amplitude being proportional to an $n$-th order Hermite polynomial dependant on a real parameter $a$. When $|a| < 1$, there are $n$ isolated intensity nulls on the horizontal axis in the beam's cross-section. These nulls generate optical vortices with a topological charge of +1 ($a$ <0) or -1 ($a$ > 0). If $|a| > 1$, the VHB-mode has analogous isolated nulls on the vertical axis. When $|a| = 1$, all $n$ isolated nulls appear on the optical axis in the center of the beam and generate an $n$-th order optical vortex. In this case, the VHG-mode coincides with a Laguerre-Gaussian mode of order (0, $n$). For $a = 0$, the VHG-mode coincides with a Hermite-Gaussian mode of order (0, $n$). We calculate the orbital angular momentum of the VHB-modes, which depends on a parameter $a$ and varies from 0 (at $a = 0$ and $a \to \infty$) to $n$ (at $a = 1$).

Key words: orbital angular momentum of a laser beam, vortex Hermite-Gaussian beam.

### *Сведения об авторах*

*Сведения об авторе* ***Котляр Виктор Викторович*** *см. стр. 613 этого номера.*



**Ковалёв Алексей Андреевич,** 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений Института систем обработки изображений РАН. В списке научных работ более 80 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, сингулярная оптика, фотонно-кристаллические устройства. E-mail: alanko@smr.ru .

**Alexey Andreevich Kovalev** (b. 1979), graduated (2002) from S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (SSAU)), majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree (2012). He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences (IPSI RAS), holding a

part-time position of assistent at SSAU's Technical Cybernetics sub-department. He is co-author of more than 80 scientific papers. Research interests are mathematical diffraction theory, singular optics, and photonic crystal devices.

**Порфирьев Алексей Петрович,** 1987 года рождения, в 2010 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (СГАУ) по специальности «Прикладные математика и физика». Кандидат физико-математических наук (2013 год). Ассистент кафедры технической кибернетики СГАУ, научный сотрудник лаборатории микро- и нанотехнологий Института систем обработки изображений РАН (ИСОИ РАН). Область научных интересов: дифракционная оптика, оптическое манипулирование.

E-mail: *porfirev.alexey@smr.ru* .

**Alexey Petrovich Porfirev** (b. 1987) graduated (2010) from Samara State Aerospace University (SSAU), majoring in Applied Physics and Mathematics. Candidate in Physics and Mathematics (2013). Currently he is a assistant professor in Technical Cybernetics department of SSAU and a researcher in Micro- and Nanotechnologies laboratory of the Image Processing Systems Institute of the RAS (IPSI RAS). His current research interests include diffractive optics and optical manipulation.

*Поступила в редакцию 1 октября 2014 г.*