

## СРАВНЕНИЕ РАЗНЫХ ПОДХОДОВ К ФОРМИРОВАНИЮ «ИДЕАЛЬНОГО» ОПТИЧЕСКОГО ВИХРЯ

В.В. Котляр<sup>1,2</sup>, А.А. Ковалёв<sup>1,2</sup>, А.П. Порфирьев<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Институт систем обработки изображений РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Самара, Россия,

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия

### Аннотация

Получены точные аналитические выражения, описывающие комплексную амплитуду идеального оптического вихря, сформированного тремя разными оптическими элементами: амплитудно-фазовым с пропусканием, пропорциональным функции Бесселя, оптимальным фазовым с пропусканием, равным знаковой функции от функции Бесселя, и вихревым аксиконом. Показано, что интенсивность света на кольце больше для оптимального фазового элемента. Ширина светового кольца, сформированного вихревым аксиконом, примерно в два раза больше, чем ширина двух других колец. Таким образом, оптимальный элемент является наилучшим кандидатом для формирования идеального оптического вихря. Результаты моделирования подтверждают теоретические выводы, а результаты эксперимента согласуются с теорией и результатами моделирования.

**Ключевые слова:** идеальный оптический вихрь, топологический заряд, радиус и ширина светового кольца, мода Бесселя, аксикон.

**Цитирование:** Котляр, В.В. Сравнение разных подходов к формированию «идеального» оптического вихря / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.П. Порфирьев // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40, № 3. – С. 312-321. – DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-3-312-321.

### Введение

В [1] впервые рассмотрен «идеальный» оптический вихрь (ИОВ) (perfect vortex), который не изменяет своего радиуса при изменении величины топологического заряда. Теоретически такой вихрь описывается в виде ряда из функций Бесселя одного порядка, но разных масштабов. На практике такой ряд заменяют конечной суммой, что приводит к ошибкам при формировании «идеального» оптического вихря. В эксперименте в [1] ИОВ формируют с помощью фазового оптического элемента, состоящего из конечного набора концентрических колец, толщина каждого из которых должна быть как можно меньше, а фазы в каждом кольце линейно зависят от азимутального угла и пропорциональны топологическому заряду. Но, так как амплитуда поля в каждом кольце должна быть разной, ширина каждого кольца, пропорционально амплитуде, тоже должна быть разной. Это приводит к противоречивым требованиям: с одной стороны, ширина кольца должна быть минимальной, чтобы соответствовать ширине дельта-функции, а с другой стороны, ширина каждого кольца должна быть пропорциональна заранее заданной амплитуде. Всё это привело к низкому качеству результатов моделирования (рис. 3 в [1]) и эксперимента (рис. 6 в [1]). В [2] по-другому формируют ИОВ: с помощью конического аксикона и спиральной фазовой пластинки. Однако формула, которая, по мнению авторов, описывает амплитуду сформированного таким образом ИОВ (уравнение (1) в [2]), описывает ИОВ очень приближённо. В [3] используется пространственный модулятор света, на который подаётся фазовая маска в виде комбинации аксикона и спиральной фазовой пластинки. С помощью этой маски формируется пучок Бесселя-Гаусса, который проходит через линзу, выполняющую преобразование Фурье. Этот подход основан также на неточной формуле, описывающей дифракцию на винтовом аксиконе. В

работе [4] исследуется формирование ИОВ с помощью аксикона, но показано, что можно менять радиус ИОВ с помощью простого перемещения аксикона, что устраняет необходимость использования линз с другим фокусным расстоянием. В работе [5] вместо аксикона предлагается формировать ИОВ с помощью амплитудно-фазового оптического элемента, функция пропускания которого аппроксимирует функцию, описывающую амплитуду моды Бесселя  $n$ -го порядка. В [5] наиболее близко подошли к оптимальному фазовому элементу, который предлагается в данной работе.

Цель данной работы – получить формулы, описывающие распределение интенсивности ИОВ, сформированного разными способами, и показать, что интенсивность на кольце ИОВ слабо, но зависит от величины топологического заряда. Мы сравним формирование ИОВ с помощью фокусировки: 1) амплитудно-фазового светового поля, формирующего моду Бесселя, ограниченную по радиусу, 2) фазового светового поля (амплитуда постоянная), описанного в [6], и 3) фазового поля (амплитуда постоянная), сформированного с помощью конического аксикона и спиральной фазовой пластинки [2]. Все три способа отличаются от предложенного в [1]. Мы покажем, что оптимальный фазовый оптический элемент, предложенный в [6], является наилучшим кандидатом для формирования ИОВ.

### 1. Формирование «идеального» оптического вихря с помощью амплитудно-фазового оптического элемента

«Идеальный» оптический вихрь [1] имеет комплексную амплитуду вида:

$$E_0(\rho, \theta) = \delta(\rho - \rho_0) \exp(in\theta), \quad (1)$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака,  $(\rho, \theta)$  – полярные координаты в Фурье-плоскости сферической линзы,  $n$  – целое число, равное топологическому заряду оп-

тического вихря. Из (1) видно, что радиус бесконечно тонкого кольца  $\rho_0$  не зависит от величины топологического заряда  $n$ . Сформировать ИОВ (1) можно с помощью идеальной моды Бесселя, амплитуда которой в начальной плоскости, расположенной на фокусном расстоянии от сферической линзы, имеет вид:

$$F_0(r, \varphi) = J_n(\alpha r) \exp(in\varphi), \quad (2)$$

где размерный параметр  $\alpha$  задает масштаб функции Бесселя первого рода  $n$ -го порядка  $J_n(x)$ .

Это следует из условия ортогональности функций Бесселя на всей действительной оси [7]:

$$\alpha \int_0^{\infty} J_m(\alpha r) J_n\left(\frac{k\rho r}{f}\right) r dr = \delta\left(\alpha - \frac{k\rho}{f}\right), \quad (3)$$

где  $k$  – волновое число монохроматического когерентного света,  $f$  – фокусное расстояние линзы.

Из (3) получим радиус кольца с максимальной интенсивностью ИОВ, который определен в (1):

$$\rho_0 = \frac{\alpha f}{k}. \quad (4)$$

При формировании поля (2) возникают две проблемы. Во-первых, функция Бесселя знакопеременная, и поэтому для ее оптического формирования нужно совмещать амплитудную маску, имеющую пропускание, пропорциональное функции  $|J_n(\alpha r)|$ , и фазовую маску, имеющую пропускание, равное

$$\text{sgn } J_n(\alpha r) = \begin{cases} 1, & J_n(\alpha r) > 0, \\ -1, & J_n(\alpha r) < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Во-вторых, мода Бесселя в (2) должна быть на практике ограничена круглой апертурой радиуса  $R$ . Обе эти причины приводят к искажению ИОВ.

В этом параграфе далее рассматривается формирование ИОВ с помощью светового поля (2), но ограниченного круглой апертурой радиуса  $R$ :

$$F_1(r, \varphi) = \text{circ}\left(\frac{r}{R}\right) J_n(\alpha r) \exp(in\varphi), \quad (6)$$

где

$$\text{circ}\left(\frac{r}{R}\right) = \begin{cases} 1, & r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad (7)$$

Комплексную амплитуду светового поля (6) в Фурье-плоскости идеальной сферической линзы с фокусным расстоянием  $f$  можно найти с помощью преобразования Фурье в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} E_1(\rho, \theta) &= (-i)^{n+1} \left(\frac{k}{f}\right) e^{in\theta} \int_0^R J_n(\alpha r) J_n\left(\frac{k\rho r}{f}\right) r dr = \\ &= (-i)^{n+1} \left(\frac{kR}{f}\right) e^{in\theta} \times \\ &\times \left[ \frac{\alpha J_{n+1}(\alpha R) J_n(xR) - x J_n(\alpha R) J_{n+1}(xR)}{\alpha^2 - x^2} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

где  $x = k\rho/f$ . Заметим, что по форме поле (8) существенно отличается от заданного ИОВ (1). Но, несмотря на это, радиус кольца с максимальной интенсивностью будет такой же, как (4), и не будет зависеть от топологического заряда. Действительно, из (4) следует, что кольцо с максимальной интенсивностью ИОВ должно иметь радиус, при котором знаменатель в (8) обращается в ноль. Но при  $x = \alpha$  обращается в ноль и числитель. Неопределенность ноль на ноль в (8) при  $x = \alpha$  (в светлом кольце ИОВ с максимальной интенсивностью) можно раскрыть с помощью справочного интеграла [8]:

$$\begin{aligned} \int_0^R J_n^2(\alpha r) r dr &= \\ &= \frac{R^2}{2} \left[ J_n^2(\alpha R) - J_{n-1}(\alpha R) J_{n+1}(\alpha R) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда вместо (8) с учётом (9) и при  $x = \alpha$  получим:

$$\begin{aligned} E_1(\rho = \alpha f k^{-1}, \theta) &= (-i)^{n+1} \left(\frac{kR^2}{2f}\right) e^{in\theta} \times \\ &\times \left[ J_n^2(\alpha R) - J_{n-1}(\alpha R) J_{n+1}(\alpha R) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (10) видно, что максимальная интенсивность на кольце ИОВ при постоянных значениях  $\alpha$  и  $R$  будет зависеть от величины топологического заряда  $n$ , хотя при больших значениях  $\alpha R$  интенсивность почти не будет зависеть от  $n$ , так как, пользуясь асимптотической функцией Бесселя, получим, что

$$\begin{aligned} J_n^2(\alpha R) - J_{n-1}(\alpha R) J_{n+1}(\alpha R) &\approx \\ &\approx \left(\frac{2}{\pi\alpha R}\right) \left[ \cos^2(\alpha R - n\pi/2 - \pi/4) - \right. \\ &- \cos(\alpha R - (n+1)\pi/2 - \pi/4) \times \\ &\times \cos(\alpha R - (n-1)\pi/2 - \pi/4) \left. \right] = \\ &= \left(\frac{2}{\pi\alpha R}\right) \left[ \cos^2(\alpha R - n\pi/2 - \pi/4) + \right. \\ &+ \sin^2(\alpha R - n\pi/2 - \pi/4) \left. \right] = \left(\frac{2}{\pi\alpha R}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Из (11) следует, что интенсивность на кольце с максимальной интенсивностью ИОВ будет асимптотически стремиться при больших значениях  $\alpha R$  к значению, которое не зависит от величины топологического заряда:

$$I_1\left(\rho = \frac{\alpha f}{k}\right) = |E_1|^2 = \left(\frac{kR}{\pi\alpha f}\right)^2. \quad (12)$$

Чтобы в дальнейшем получить точные характеристики ИОВ, выберем специальный масштаб функции Бесселя (5), а именно положим, что  $\alpha R = \gamma_{n,\nu}$ , где  $\gamma_{n,\nu}$  –  $\nu$ -й корень функции Бесселя:  $J_n(\gamma_{n,\nu}) = 0$ . Тогда вместо (8) получим:

$$E_1(\rho, \theta) = (-i)^{n+1} \left( \frac{kR^2}{f} \right) \times \times e^{in\theta} \left[ \frac{\gamma_{n,v} J_{n+1}(\gamma_{n,v}) J_n(xR)}{\gamma_{n,v}^2 - (xR)^2} \right]. \quad (13)$$

Из (13) видно, что нули функции амплитуды (тёмные кольца интенсивности ИОВ) будут совпадать с нулями функции Бесселя  $n$ -го порядка и их радиусы будут равны:

$$\rho_{n,\mu} = \frac{\gamma_{n,\mu} f}{kR}, \quad \mu \neq v, \quad (14)$$

а при  $\mu = v$  будет максимум интенсивности (светлое кольцо ИОВ), равный:

$$I_1 \left( \rho = \frac{\gamma_{n,v} f}{kR} \right) = |E_1|^2 = I_0 J_{n+1}^4(\gamma_{n,v}), \quad (15)$$

где  $I_0 = [kR^2/(2f)]^2$  – интенсивность в центре диска Эйри, то есть в центре картины дифракции Фраунгофера плоской волны единичной амплитуды на круглой апертуре с радиусом  $R$ . Уравнение (15) следует из (10) при  $\alpha R = \gamma_{n,v}$ . Действительно, с учётом (10) с помощью рекуррентных соотношений для функции Бесселя при  $\alpha R = \gamma_{n,v}$  вместо (13) получим:

$$\begin{aligned} E_1 \left( \rho = \frac{\gamma_{n,v} f}{kR} \right) &= \\ &= (-i)^{n+1} e^{in\theta} \left( \frac{kR^2}{2f} \right) \left[ -J_{n-1}(\gamma_{n,v}) J_{n+1}(\gamma_{n,v}) \right] = \\ &= (-i)^{n+1} e^{in\theta} \left( \frac{kR^2}{2f} \right) J_{n+1}^2(\gamma_{n,v}). \end{aligned} \quad (16)$$

Из (16) сразу следует (15). Из (15) видно, что максимальная интенсивность ИОВ зависит от  $n$  и от значения корня  $\gamma_{n,v}$ . Но корни следует выбирать не произвольно, а чтобы выполнялось условие сохранения масштаба функции Бесселя  $\alpha$  и радиуса апертуры  $R$ , то есть чтобы выполнялось условие:

$$\alpha R = \gamma_{n,v} = \gamma_{m,\mu}. \quad (17)$$

Это означает, что для разных топологических зарядов  $n$  и  $m$  нужно выбирать такие корни функции Бесселя в (2), чтобы выполнялось условие (17). В этом случае кольцо с максимальной интенсивностью будет сохранять свой радиус при изменении величины топологического заряда. Заметим, что у функций Бесселя с разными номерами нет точно совпадающих корней, но найти два близких корня всегда можно.

Из (13) можно оценить ширину кольца с максимальной интенсивностью. Она равна расстоянию между двумя нулями функции Бесселя  $n$ -го порядка с номерами  $v-1$  и  $v+1$ :

$$\Delta \rho_0 = \frac{(\gamma_{n,v+1} - \gamma_{n,v-1}) f}{kR} \approx \frac{2\pi f}{kR}. \quad (18)$$

А ширина кольца ИОВ по полуспаду интенсивности примерно в два раза меньше:  $\text{FWHM} = \pi f / (kR)$ .

Оценим эффективность формирования ИОВ с помощью светового поля (6). Если осветить круглую апертуру радиуса  $R$  плоской волной с единичной интенсивностью, то мощность падающего света на оптический элемент с пропусканием (6) будет пропорциональна площади круга:  $W_0 = \pi R^2$ . А мощность света, прошедшего оптический элемент с пропусканием (6), пропорциональна правой части (9), умноженной на  $2\pi$ , и с учётом (11) для больших  $\alpha R$  равна  $W_1 = 2R/\alpha$ . Поэтому эффективность формирования ИОВ с помощью (6) будет не больше, чем  $\eta = W_1/W_0 = 2/(\pi\alpha R)$ . Из этой формулы следует, что с увеличением радиуса апертуры эффективность уменьшается.

## 2. Формирование «идеального» оптического вихря с помощью оптимального фазового оптического элемента

Под оптимальным мы понимаем такой оптический элемент, который направляет наибольшую часть энергии света в кольцо заданного радиуса. В [6] описан такой оптический элемент, пропускание которого равно:

$$F_2(r, \varphi) = \text{circ} \left( \frac{r}{R} \right) \text{sgn} J_n(\alpha r) \exp(in\varphi). \quad (19)$$

В (19) знаковая и апертурная функции определены в (5) и (6). Амплитуда поля в фокусе сферической линзы, сформированная оптическим элементом с пропусканием (19), но при  $n=0$ , получена в [6]. Ниже мы получим выражение для амплитуды при любом целом  $n$ . Будем исходить из того, что круг радиусом  $R$  можно разделить на  $N$  колец с радиусами  $r_m$ , в которых происходит смена знака функции (5):

$$r_m = \frac{\gamma_{n,m}}{\alpha}, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad r_N = R. \quad (20)$$

Комплексную амплитуду поля в фокусе линзы, сформированного оптическим элементом с функцией пропускания (19), можно выразить как сумму от вкладов каждого такого кольца ( $r_0 = 0$ ):

$$\begin{aligned} E_2(\rho, \theta) &= \\ &= (-i)^{n+1} \left( \frac{k}{f} \right) e^{in\theta} \sum_{m=0}^{N-1} (-1)^m \int_{r_m}^{r_{m+1}} J_n \left( \frac{k\rho r}{f} \right) r dr. \end{aligned} \quad (21)$$

Если положить в (21)  $\rho = \alpha f/k$ , то аргумент функции Бесселя в (21) не будет зависеть от физических параметров  $f$  и  $k$  и будет равен  $\alpha r$ . Положим (без ограничения общности) параметр масштаба  $\alpha$  таким, чтобы функция Бесселя на краю апертуры имела ноль, то есть  $\alpha R = \gamma_{n,N}$ . Величина интегралов в (21) для колец, у которых  $m$  – чётное, будет положительным, и сомножитель  $(-1)^m$  тоже будет положительный, а для колец, у которых  $m$  – нечётное, величина интегралов в (21) будет отрицательна, и сомножитель  $(-1)^m$  тоже будет от-

рицательным. То есть при  $\rho_0 = \gamma_{n,N}f/(kR)$  все слагаемые суммы будут положительны и вклад в поле на кольце радиуса ИОВ будет максимальный, и фазовый оптический элемент (19) действительно является оптимальным с точки зрения формирования максимальной интенсивности на кольце заданного радиуса  $\rho_0 = \gamma_{n,N}f/(kR)$ . Чтобы радиус кольца ИОВ не зависел от топологического заряда, надо выбирать близкие корни функции Бесселя, аналогично (17):  $\gamma_{n,N} = \gamma_{m,M}$ . Сделанные выше замечания по поводу (21) означают, что интенсивность на кольце ИОВ равна следующему выражению ( $\alpha R = \gamma_{n,N}$ ):

$$I_2\left(\rho = \frac{\alpha f}{k}\right) = |E_2|^2 = \left(\frac{k}{f}\right)^2 \left(\int_0^R |J_n(\alpha r)| r dr\right)^2. \quad (22)$$

Далее получим явный вид интенсивности в фокусе сферической линзы для начального поля (19). В каждом кольце, ограниченном радиусами  $(r_m, r_{m+1})$  из (20), радиальное пропускание функции (19) будет постоянным и менять знак от кольца к кольцу. Поэтому дифракцию Фраунгофера плоской волны на каждом кольце поля (19) можно описать следующей комплексной амплитудой [9]:

$$\begin{aligned} E_m(\rho, \theta) &= (-i)^{n+1} \left(\frac{k}{f}\right) e^{in\theta} \int_{r_m}^{r_{m+1}} J_n\left(\frac{kpr}{f}\right) r dr = \\ &= (-i)^{n+1} \left(\frac{1}{n!(n+2)}\right) e^{in\theta} \times \\ &\left[ \left(\frac{kr_{m+1}^2}{f}\right) x_{m+1}^n {}_1F_2\left(\frac{n+2}{2}, \frac{n+4}{2}, n+1, -x_{m+1}^2\right) - \right. \\ &\left. - \left(\frac{kr_m^2}{f}\right) x_m^n {}_1F_2\left(\frac{n+2}{2}, \frac{n+4}{2}, n+1, -x_m^2\right) \right], \end{aligned} \quad (23)$$

где  $m = 1, 2, \dots, N-1$ ,  $x_m = kpr_m/(2f) = k\rho\gamma_{n,m}/(2\alpha f)$ ,  ${}_1F_2(a, b, c, x)$  – гипергеометрическая функция [8]. Полное световое поле в фокусе сферической линзы от всех кольцевых апертур с радиусами (20) для исходного поля (19) получается суммированием всех вкладов (23) аналогично (21):

$$\begin{aligned} E_2(\rho, \theta) &= -(-i)^{n+1} \left[\frac{k}{n!(n+2)\alpha^2 f}\right] e^{in\theta} \times \\ &\times \left[ 2 \sum_{m=1}^{N-1} (-1)^m \gamma_{n,m}^2 x_m^n {}_1F_2\left(\frac{n+2}{2}, \frac{n+4}{2}, n+1, -x_m^2\right) - \right. \\ &\left. - (-1)^N \gamma_{n,N}^2 x_N^n {}_1F_2\left(\frac{n+2}{2}, \frac{n+4}{2}, n+1, -x_N^2\right) \right], \end{aligned} \quad (24)$$

где  $x_N = k\rho R/(2f)$ . Подстановка в (24) величины радиуса ИОВ  $r_0 = \gamma_{n,N}f/(kR)$  приводит к независимости выражения во вторых квадратных скобках от физических параметров задачи ( $\alpha, k, f$ ), так как все аргументы будут пропорциональны корням функции Бесселя:

$$x_m = \frac{kpr_m}{2f} = \frac{k\rho\gamma_{n,m}}{2\alpha f} = \frac{\gamma_{n,m}}{2}.$$

Поэтому из (24) можно получить зависимость максимальной интенсивности на кольце ИОВ от этих параметров:

$$I_2\left(\rho = \frac{\alpha f}{k}\right) = |E_2|^2 \sim \left(\frac{k}{\alpha^2 f}\right)^2. \quad (25)$$

Зависимость (25) совпадает с (12), если учесть, что  $\alpha R = \gamma_{n,N}$ . Заметим, что значения аргументов гипергеометрических функций в каждом слагаемом (24) на кольце с максимальной интенсивностью ИОВ зависят от корней функции Бесселя  $n$ -го порядка ( $x_m = \gamma_{n,m}/2$ ). Поэтому если изменить топологический заряд ИОВ, то изменятся корни функции Бесселя и значения аргументов. Это приведет к изменению модуля амплитуды (24), а значит, и к изменению интенсивности на кольце ИОВ. Величину этого изменения можно оценить только с помощью моделирования. Так как оптический элемент (19) фазовый и при изменении топологического заряда  $n$  радиус апертуры  $R$  не изменяется и не изменяется радиус ИОВ, то изменение интенсивности (22) поля (24) на кольце этого радиуса  $r_0 = \gamma_{n,N}f/(kR)$  означает перераспределение энергии между кольцом ИОВ и боковыми лепестками. Заметим, что зависимость интенсивности на кольце ИОВ от номера  $n$  следует также прямо из (22), так как для функций Бесселя разного порядка интеграл будет иметь разное значение.

### 3. Формирование «идеального» оптического вихря с помощью конического аксикона

В [2] ИОВ формируется с помощью конического аксикона и спиральной фазовой пластинки. В [2] представлена только экспериментальная часть и нет теории. Поэтому мы восполним этот пробел. Вместо (6) и (19) в данном параграфе рассмотрим оптический элемент с комплексной функцией пропускания в виде:

$$F_3(r, \varphi) = \text{circ}\left(\frac{r}{R}\right) \exp(i\alpha r + in\varphi). \quad (26)$$

Оптический элемент (26) впервые был рассмотрен в [10] как элемент, формирующий световые трубки. Здесь  $\alpha$  уже не масштабный параметр функции Бесселя, а параметр аксикона, связанный с половиной угла  $\psi$  при вершине конической волны, которая формируется этим аксиконом, выражением:  $\alpha = k \sin \psi$ . Хотя аксикон  $\exp(i\alpha r)$  приближенно формирует функцию Бесселя нулевого порядка с масштабом как раз равным  $\alpha$ . Это следует, например, из следующего известного равенства [7]:

$$\exp(i\alpha r) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(\alpha r). \quad (27)$$

В [2] предполагают, что световое поле (26) будет формировать в фокусе сферической линзы ИОВ, распределение амплитуды которого описывается функцией:

$$E_3(\rho, \theta) \sim \exp\left[-\frac{(\rho - \rho_0)^2}{\Delta\rho^2}\right] \exp(in\theta). \quad (28)$$

Это сильное упрощение, и на самом деле комплексная амплитуда ИОВ в фокусе сферической линзы описывается как Фурье-преобразование от функции (26) и имеет вид гораздо более сложный, чем функция (28). Покажем это. Дифракция Фраунгофера светового поля (26) описывается следующим выражением [10]:

$$E_3(\rho, \theta) = (-i)^{n+1} \left(\frac{k}{f}\right) e^{in\theta} \times \int_0^R \exp(i\alpha r) J_n\left(\frac{k\rho r}{f}\right) r dr. \quad (29)$$

Из (29) можно видеть, что при значении радиуса (4) (радиус кольца с максимальной интенсивностью ИОВ) в интеграле масштабы двух функций сомножителей выравниваются. Тогда получим:

$$E_3\left(\rho = \frac{\alpha f}{k}, \theta\right) = (-i)^{n+1} \left(\frac{k}{f}\right) e^{in\theta} \int_0^R \exp(i\alpha r) J_n(\alpha r) r dr = (-i)^{n+1} \left(\frac{k}{f}\right) e^{in\theta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \int_0^R J_m(\alpha r) J_n(\alpha r) r dr. \quad (30)$$

Второе равенство в (30) получено с учётом (27). Из (30) можно заключить, что для ИОВ, сформированного в фокусе линзы с помощью оптического элемента (26), интенсивность на кольце радиуса (4) будет максимальной, так как функции-сомножители под первым интегралом в (30) максимально согласованы между собой по масштабу. Поэтому больше будет площадь пересечений отдельно между положительными и отдельно между отрицательными составляющими этих функций. Интенсивность поля (30) будет много больше, чем интенсивность на кольце ИОВ (12), сформированного амплитудно-фазовым элементом (6), так как интенсивность (12) является вкладом только одного слагаемого из ряда в (30) при  $m=n$ . Приведённые выше рассуждения носят качественный характер. Ниже с помощью численного моделирования показано, что радиус кольца с максимальной интенсивностью и её величина немного меняются при изменении топологического заряда.

С другой стороны, интенсивность на кольце ИОВ (30) будет меньше, чем интенсивность на кольце ИОВ (22), сформированного оптимальным фазовым элементом (19), так как:

$$I_3\left(\rho = \frac{\alpha f}{k}\right) = |E_3|^2 = \left(\frac{k}{f}\right)^2 \left| \int_0^R \exp(i\alpha r) J_n(\alpha r) r dr \right|^2 < \left(\frac{k}{f}\right)^2 \left| \int_0^R |J_n(\alpha r)| r dr \right|^2 = I_2\left(\rho = \frac{\alpha f}{k}\right). \quad (31)$$

Из (31) видно, что интенсивность  $I_3$  зависит от порядка  $n$  функции Бесселя при постоянных  $\alpha, f, R$ . Так как оба оптических элемента (19) и (26) фазовые и с одинаковым радиусом  $R$ , а интенсивность на кольцах с одинаковым радиусом (4) разная, как следует из (31), это означает, что ширина кольца ИОВ (30) больше, чем ширина кольца ИОВ (21). Физически это можно объяснить так. Световое кольцо (21) формируется оптическим элементом (19), который частично представляет собой бинарную фазовую кольцевую решётку, формирующую в основном  $+1$  и  $-1$  порядки дифракции, которые дают вклад в каждую точку кольца ИОВ (21). То есть вся круглая апертура радиуса  $R$  даёт вклад в формирование кольца, и поэтому его ширина примерно равна, как и ширина кольца (8), выражения (18) или дифракционному пределу  $\text{FWHM} = \pi f / (kR)$ . А световое кольцо ИОВ (30) формируется аксиконом (26), и в каждую точку кольца даёт вклад только половина апертуры от 0 до  $R$ . Поэтому ширина кольца (30) примерно в 2 раза шире, чем кольца (21) и (8). Моделирование это подтверждает.

Чтобы получить явное выражение для амплитуды поля (29), экспоненту под интегралом в (29) разложим в ряд Тейлора и получим:

$$E_3(\rho, \theta) = (-i)^{n+1} \left(\frac{k}{f}\right) e^{in\theta} \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^m}{m!} \int_0^R r^m J_n\left(\frac{k\rho r}{f}\right) r dr. \quad (32)$$

Интегралы под знаком суммы в (32) можно найти в справочнике [8], поэтому вместо (32) можно записать [11]:

$$E_3(\rho, \theta) = \frac{(-i)^{n+1}}{n!} \left(\frac{kR^2}{f}\right) e^{in\theta} x^n \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\alpha R)^m}{(m+n+2)m!} \times {}_1F_2\left(\frac{m+n+2}{2}, \frac{m+n+4}{2}, n+1, -x^2\right), \quad (33)$$

где  $x = k\rho R / (2f)$ ,  ${}_1F_2(a, b, c, x)$  – гипергеометрическая функция [8]. Если ИОВ, сформированный оптимальным элементом (19), описывался конечной суммой гипергеометрических функций (24), то ИОВ, сформированный аксиконом (26), описывается рядом из таких функций (33) и ничего общего не имеет с выражением (28) из [2]. Световое кольцо с максимальной интенсивностью ИОВ имеет радиус (4). Для сохранения радиуса кольца ИОВ при изменении топологического заряда  $n$  по-прежнему следует выбирать близкие корни  $\alpha R = \gamma_{n,N} \approx \gamma_{m,M}$ . Аргумент  $x$  в (33) на кольце с максимальной интенсивностью будет равен  $x = \alpha R / 2 = \gamma_{n,N} / 2$ . Поэтому и аргумент  $x$ , и всё выражение под знаком суммы в (33) не будут зависеть от физических параметров  $k, f, R$ . Следовательно, аналогично (25), можно написать выражение для зависимости максимальной интенсивности на кольце ИОВ (31) от физических параметров:

$$I_3\left(\rho = \frac{\alpha f}{k}\right) = |E_3|^2 \sim \left(\frac{kR^2}{f}\right)^2. \quad (34)$$

Зависимость (34) одинаковая для всех трёх рассматриваемых элементов (6), (19) и (26).

**4. Результаты моделирования**

В данном параграфе приведены результаты моделирования формирования ИОВ с помощью трёх рассмотренных в предыдущих параграфах оптических элементов. Эти результаты согласуются с предсказаниями теории, описанной в параграфах 1–3. Моделирование проводилось при следующих параметрах: длина волны излучения  $\lambda = 532$  нм, радиус круглой апертуры  $R = 20\lambda$ , фокусное расстояние идеальной сферической линзы  $f = 100\lambda$ , масштабный параметр функции Бесселя  $\alpha$  был выбран таким образом, что выполнялось равенство:  $\alpha R = \gamma_{1,20} = 63,6114$ , где  $\gamma_{1,20}$  – 20-й корень функции Бесселя ( $\nu = 20$ ) первого порядка ( $n = 1$ ). Проводилось сравнение формирования ИОВ для двух разных топологических зарядов  $n = 1$  и  $n = 14$ . Остальные параметры моделирования сохранялись. При этом для функции Бесселя 14-го порядка ( $n = 14$ ) выбирался 14-й корень ( $\nu = 14$ ), так как  $\gamma_{14,14} \approx \gamma_{1,20} = 63,6114$ . На рис. 1 показаны модули двух функций Бесселя  $|J_1(\gamma_{1,20}x/R)|$  и  $|J_{14}(\gamma_{14,14}x/R)|$ , ограниченные радиусом  $R$ . Из рис. 1 видно, что при  $x = R$  обе функции Бесселя имеют ноль.

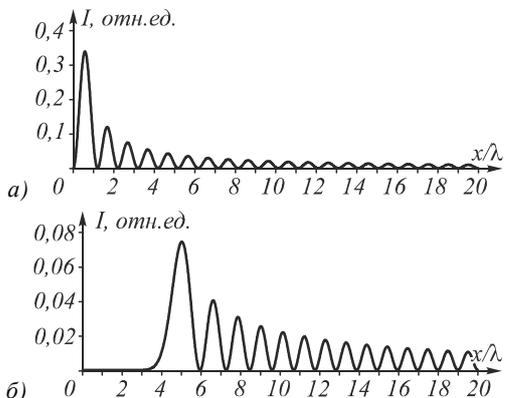


Рис. 1. Модули функций Бесселя  $|J_1(\gamma_{1,20}x/R)|$  (а) и  $|J_{14}(\gamma_{14,14}x/R)|$  (б), ограниченные радиусом  $R$

На рис. 2 показаны распределения интенсивности ИОВ в Фурье-плоскости сферической линзы, полученные при начальном световом поле с комплексной амплитудой (6) при разных топологических зарядах  $n = 1$  и  $n = 14$ . Характеристики рассчитанных ИОВ для начального поля (6) приведены в табл. 1. Из табл. 1 видно, что радиус ИОВ при изменении топологического заряда не изменился. Радиус кольца ИОВ, рассчитанный по формуле (4) при выбранных параметрах моделирования, равен  $\rho_0 = \alpha f/k \approx 50,62\lambda$ . Это значение радиуса кольца отличается от значения радиуса в табл. 1 всего на 3%. Максимальная интенсивность ИОВ уменьшилась всего на 5% при увеличении топологического заряда вихря почти на порядок.

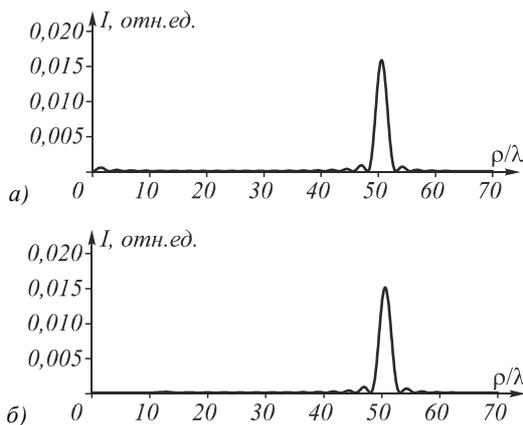


Рис. 2. Распределения интенсивности ИОВ при  $n = 1$  (а) и  $n = 14$  (б) для начального светового поля (6).

По оси ординат произвольные единицы, а по оси абсцисс радиус в длинах волн

Заметим, что согласно формуле (12) при выбранных параметрах моделирования максимальная интенсивность на рис. 2 должна быть равна  $I_1(\rho_0) = [kR/(\pi\alpha f)]^2 \approx 0,015816$ . Это число согласуется со значением интенсивности из табл. 1 (разница 0,1%). И так как радиус кольца и радиус апертуры  $R$  оптического элемента не изменились, то не должна измениться и ширина кольца. Из табл. 1 видно, что, действительно, ширина кольца не меняется при изменении топологического заряда оптического вихря. Согласно (18) ширина кольца при выбранных параметрах моделирования должна быть равна  $\text{FWHM} = 5/2\lambda$ . Это значение на 11% отличается от значения ширины кольца из табл. 1.

Табл. 1. Сравнение параметров ИОВ, сформированного начальным световым полем (6) при разных топологических зарядах  $n$

Топологический заряд	$n = 1$	$n = 14$
Радиус кольца с максимальной интенсивностью, $\rho_0, \lambda$	50,781563	50,781563
Максимальная интенсивность в относительных единицах, $I_{\max}$	0,0157968	0,0150522
Толщина кольца по полуспаду интенсивности, FWHM, $\lambda$	2,244489	2,244489

Рассмотрим теперь формирование ИОВ с помощью оптимального фазового элемента (19). На рис. 3 показаны распределения интенсивности ИОВ при  $n = 1$  (а) и  $n = 14$  (б) для начального светового поля (19). В табл. 2 приведены рассчитанные параметры ИОВ на рис. 3. Из табл. 2 видно, что радиус кольца ИОВ стал немного меньше, чем на рис. 2 (меньше всего на 0,3%). Радиус не изменился при увеличении топологического заряда в 14 раз. Интенсивность на кольце почти в 100 раз больше, чем интенсивность для ИОВ на рис. 2. Эту интенсивность можно рассчитать по формуле (22). Заметим, что с увеличением топологического заряда в 14 раз интенсивность на кольце уменьшилась всего на 2%. Толщина кольца стала меньше примерно на 14% по сравнению с шириной кольца на рис. 2. Толщина кольца сохраняется при изменении топологического заряда

оптического вихря. Из рис. 3 видно, что увеличились боковые лепестки.

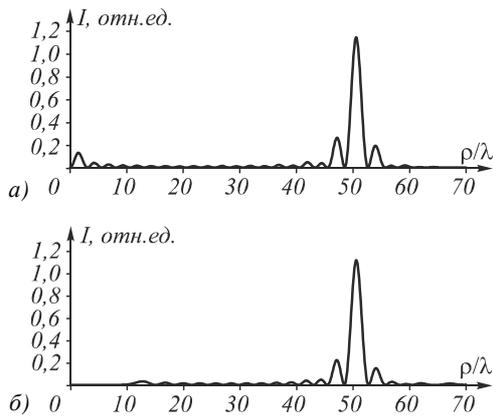


Рис. 3. Распределения интенсивности ИОВ при  $n = 1$  (а) и  $n = 14$  (б) для начального светового поля (19).

По оси ординат произвольные единицы, а по оси абсцисс радиус в длинах волн

Табл. 2. Сравнение параметров ИОВ, сформированного оптимальным фазовым элементом (19) при разных топологических зарядах  $n$

Топологический заряд	$n = 1$	$n = 14$
Радиус кольца с максимальной интенсивностью, $\rho_0, \lambda$	50,641283	50,641283
Максимальная интенсивность в относительных единицах, $I_{\max}$	1,140685	1,1181689
Толщина кольца по полуспаду интенсивности, FWHM, $\lambda$	1,9639279	1,9639279

Далее рассмотрим формирование ИОВ с помощью вихревого аксикона (26). На рис. 4 показаны распределения интенсивности ИОВ при  $n = 1$  (а) и  $n = 14$  (б) для начального светового поля (26), а в табл. 3 внесены рассчитанные параметры этого ИОВ.

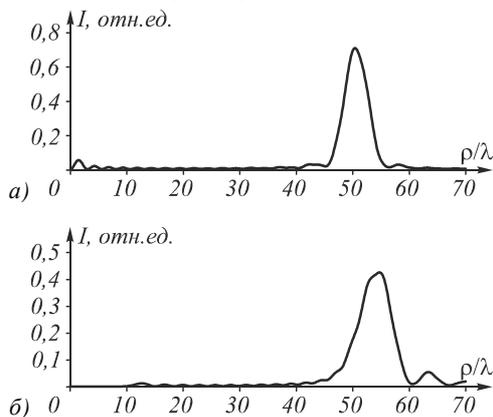


Рис. 4. Распределения интенсивности ИОВ при  $n = 1$  (а) и  $n = 14$  (б) для начального светового поля (26).

По оси ординат произвольные единицы, а по оси абсцисс радиус в длинах волн

Из рис. 4 и табл. 3 видно, что ширина кольца ИОВ, сформированного вихревым аксиконом (26) в фокусе сферической линзы, примерно в 2,5 раза больше, чем ширина кольца на рис. 2.

И, кроме того, с увеличением топологического заряда вихря в 14 раз ширина кольца увеличивается в 1,3 раза.

Табл. 3. Сравнение параметров ИОВ, сформированного вихревым аксиконом (26) при разных топологических зарядах  $n$

Топологический заряд	$n = 1$	$n = 14$
Радиус кольца с максимальной интенсивностью, $\rho_0, \lambda$	50,501002	54,849699
Максимальная интенсивность в относительных единицах, $I_{\max}$	0,7070332	0,4249419
Толщина кольца по полуспаду интенсивности, FWHM, $\lambda$	4,9098196	6,5931864

Увеличение ширины кольца (рис. 4) с ростом номера  $n$  приводит к уменьшению интенсивности на этом кольце. Из табл. 3 видно, что максимальная интенсивность на кольце ИОВ (рис. 3) уменьшается в 1,7 раза с ростом номера  $n$  в 14 раз. И даже сам радиус кольца с максимальной интенсивностью увеличивается при этом на 8 %.

Таким образом, моделирование показало, что из трёх рассмотренных вариантов формирования ИОВ оптимальный фазовый элемент (19) является лучшим вариантом, так как в этом случае формируется наиболее узкое световое кольцо (FWHM =  $1,96\lambda = 0,39\lambda f/R$ ) с максимальной интенсивностью на кольце в 1,6 раз большей, чем интенсивность на кольце ИОВ, сформированного вихревым аксиконом (26).

## 5. Эксперимент

Для экспериментального исследования элементов, формирующих ИОВ, мы использовали оптическую схему, показанную на рис. 5.

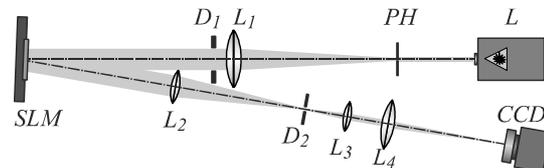


Рис. 5. Экспериментальная схема установки:

$L$  – твердотельный лазер ( $\lambda = 532$  нм),  $PH$  – пинхол (размер отверстия 40 мкм),  $L_1, L_2, L_3$  и  $L_4$  – линзы с фокусными расстояниями ( $f_1 = 250$  мм,  $f_2 = 350$  мм,  $f_3 = 150$  мм,  $f_4 = 500$  мм),  $D_1$  и  $D_2$  – диафрагма,  $SLM$  – пространственный модулятор света PLUTO VIS,  $CCD$  – видеокамера LOMO TC-1000

В качестве источника излучения был выбран твердотельный лазер  $L$  ( $\lambda = 532$  нм), формирующий фундаментальный Гауссов пучок. Пучок лазера, расширенный и коллимированный с помощью системы, состоящей из пинхола  $PH$  (размер отверстия 40 мкм) и линзы  $L_1$  ( $f_1 = 250$  мм), падал на дисплей модулятора  $SLM$  (PLUTO VIS, разрешение –  $1920 \times 1080$  пикселей, размер пикселя – 8 мкм). Диафрагма  $D_1$  была использована для того, чтобы отделить центральное светлое пятно от окружающих его светлых и темных колец, возникающих при дифракции на пинhole. Далее с помощью системы линз  $L_2$  ( $f_2 = 350$  мм) и  $L_3$  ( $f_3 = 150$  мм) и диафрагмы  $D_2$  мы осуществляли пространственную фильтрацию промодулированного по фазе лазерного пучка, отражённого от дисплея модулятора. С помощью линзы  $L_4$  ( $f_4 = 500$  мм) лазерный пучок фокусировался на матрице видеокамеры  $CCD$  LOMO TC 1000 (размер пикселя

1,67 × 1,67 мкм). Для формирования ИОВ мы использовали фазовые шаблоны, показанные на рис. 6, которые выводились на дисплей модулятора света. Для того чтобы разнести в пространстве непромодулированный пучок, отражённый от модулятора, и промодулированный по фазе пучок, на исходный фазовый шаблон элемента дополнительно накладывали линейную фазовую маску.

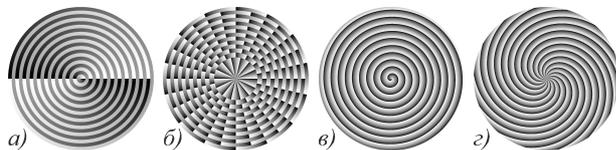


Рис. 6. Фазовые шаблоны оптических элементов для формирования ИОВ с топологическим зарядом  $n = 1$  (а, в) и  $n = 14$  (б, г). На рисунках (а, б) представлены оптимальные фазовые элементы, на рисунках (в, г) – вихревые аксиконы

На рис. 7 показаны распределения интенсивности, сформированные в фокусе линзы  $L_4$  с помощью фазовых масок, соответствующих оптимальным фазовым элементам с топологическими зарядами 1 и 14. Значения параметров сформированных ИОВ представлены в табл. 4.

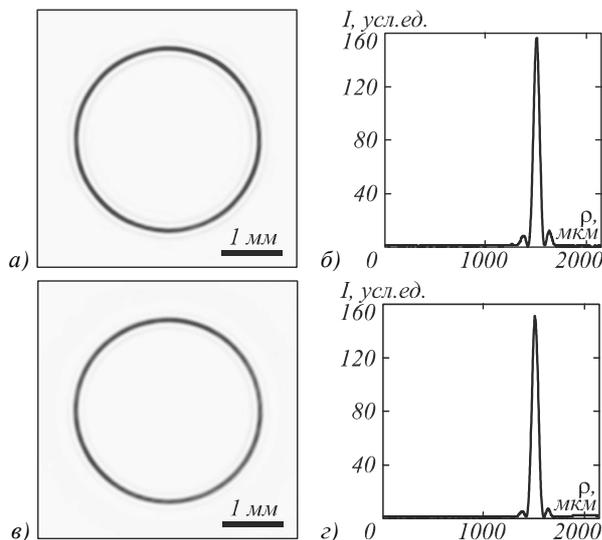


Рис. 7. Распределения интенсивности ИОВ (негатив, левая колонка) и соответствующие им сечения от центра картинки до края (правая колонка) в случае использования оптимального фазового элемента с топологическим зарядом  $n = 1$  (а, б) и  $n = 14$  (в, г)

Табл. 4. Сравнение параметров ИОВ, сформированного оптимальным фазовым элементом с топологическим зарядом  $n = 1$  и  $n = 14$

Топологический заряд	$n = 1$	$n = 14$
Радиус кольца с максимальной интенсивностью, мкм	1491,0 ± 2,0	1496,5 ± 2,0
Максимальная интенсивность, усл. ед.	156,0 ± 0,5	151,0 ± 0,5
Толщина кольца по полуспаду интенсивности, мкм	70,0 ± 2,0	73,0 ± 2,0

На рис. 8 показаны распределения интенсивности, сформированные в фокусе линзы  $L_4$  с помощью фазовых масок, соответствующих вихревым аксиконам с

топологическими зарядами 1 и 14. Значения параметров сформированных ИОВ представлены в табл. 5.

Таким образом, из анализа экспериментальных измерений параметров ИОВ следует, что относительные значения параметров сформированных пучков находятся в хорошем соответствии с представленными результатами моделирования.

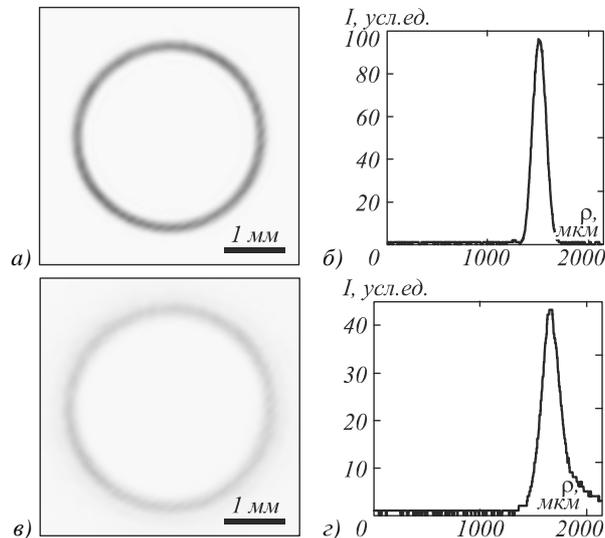


Рис. 8. Распределения интенсивности ИОВ (негатив, левая колонка) и соответствующие им сечения от центра картинки до края (правая колонка) в случае использования вихревого аксикона с топологическим зарядом  $n = 1$  (а, б) и  $n = 14$  (в, г)

Табл. 5. Сравнение параметров ИОВ, сформированного вихревым аксиконом с топологическим зарядом  $n = 1$  и  $n = 14$

Топологический заряд	$n = 1$	$n = 14$
Радиус кольца с максимальной интенсивностью, мкм	1498,0 ± 2,0	1655,0 ± 2,0
Максимальная интенсивность, усл. ед.	96,0 ± 0,5	43,0 ± 0,5
Толщина кольца по полуспаду интенсивности, мкм	158,0 ± 2,0	206,0 ± 2,0

### Заключение

В работе получены точные аналитические выражения, описывающие комплексную амплитуду светового поля идеального оптического вихря, сформированного тремя разными оптическими элементами: амплитудно-фазовым с пропуском, пропорциональным комплексной функции, описывающей моду Бесселя, оптимальным фазовым элементом и вихревым аксиконом. Показано, что применение любого из этих трёх оптических элементов приводит к формированию светлых колец с одним и тем же радиусом, который слабо зависит от топологического заряда оптического вихря. Интенсивность света на кольце больше (при прочих равных условиях) для оптимального фазового элемента. Для оптимального фазового элемента интенсивность света на кольце слабо зависит от величины топологического заряда (табл. 4), а для вихревого аксикона и при моделировании (табл. 3), и в эксперименте (табл. 5) интенсивность на

кольце уменьшается почти в два раза при увеличении топологического заряда с 1 до 14. Ширина светового кольца, сформированного вихревым аксиконом, примерно в 2 раза больше, чем ширина двух других колец. Таким образом, оптимальный элемент (19), рассмотренный впервые в [6], является наилучшим кандидатом для формирования идеального оптического вихря. Результаты моделирования подтверждают теоретические выводы, а результаты эксперимента согласуются с теорией и результатами моделирования.

#### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-9498.2016.9), а также грантов РФФИ 14-29-07133, 15-07-01174, 15-37-20723, 15-47-02492, 16-29-11698.

#### Литература

1. **Ostrovsky, A.S.** Generation of the “perfect” optical vortex using a liquid-crystal spatial light modulator / A.S. Ostrovsky, C. Rickenstorff-Parrao, V. Arrizon // *Optics Letters*. – 2013. – Vol. 38(4). – P. 534-536.
2. **Chen, M.** Dynamics of microparticles trapped in a perfect vortex beam / M. Chen, M. Mazilu, Y. Arita, E.M. Wright, K. Dholakia // *Optics Letters*. – 2013. – Vol. 38(22). – P. 4919-4922.
3. **Vaity, P.** Perfect vortex beam: Fourier transformation of a Bessel beam / P. Vaity, L. Rusch // *Optics Letters*. – 2015. – Vol. 40. – P. 597-600.
4. **Jabir, M.V.** Generation of “perfect” vortex of variable size and its effect in angular spectrum of the down-converted photons / M.V. Jabir, N. Apurv Chaitanya, A. Aadhi, G.K. Samanta // *Scientific Reports*. – 2016. – Vol. 6. – 21877.
5. **García-García, J.** Simple technique for generating the perfect optical vortex / J. García-García, C. Rickenstorff-Parrao, R. Ramos-García, V. Arrizón, A. Ostrovsky // *Optics Letters*. – 2014. – Vol. 39(18). – P. 5305-5308.
6. **Fedotowsky, A.** Optimal filter design for annular imaging / A. Fedotowsky, K. Lehovc // *Applied Optics*. – 1974. – Vol. 13(12). – P. 2919-2923.
7. **Корн, Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1968. – 720 с.
8. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1983. – 750 с.
9. **Kotlyar, V.V.** Diffraction of a plane, finite-radius wave by a spiral phase plate / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, A.A. Kovalev, V.A. Soifer, H. Elfstrom, J. Turunen // *Optics Letters*. – 2006. – Vol. 31(11). – P. 1597-1599.
10. **Kotlyar, V.V.** Diffraction of a finite-radius plane wave and a Gaussian beam by a helical axicon and a spiral phase plate / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, R.V. Skidanov, O.Yu. Moiseev, V.A. Soifer // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2007. – Vol. 24(7). – P. 1955-1964.
11. **Kotlyar, V.V.** Sidelobe contrast reduction for optical vortex beams using a helical axicon / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer, C.S. Tuvey, J.A. Davis // *Optics Letters*. – 2007. – Vol. 32(8). – P. 921-923.

#### Сведения об авторах

Сведения об авторе **Ковалёв Алексей Андреевич** см. стр. 309 этого номера.

Сведения об авторах **Котляр Виктор Викторович** и **Порфирьев Алексей Петрович** см. стр. 310 этого номера.

ГРНТИ: 29.31.15.

Поступила в редакцию 25 мая 2016 г. Окончательный вариант – 14 июня 2016 г.

## GENERATING A PERFECT OPTICAL VORTEX: COMPARISON OF APPROACHES

V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>, A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>, A.P. Porfirev<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Image Processing Systems Institute of RAS, – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, Samara, Russia

<sup>2</sup>Samara National Research University, Samara, Russia

### Abstract

We derived exact analytical relationships to describe the complex amplitude of a perfect optical vortex generated by means of three different optical elements, namely, (i) an amplitude-phase element with the transmission function proportional to a Bessel function, (ii) an optimal phase element with transmission equal to the sign function of a Bessel function, and (iii) a vortex axicon. The doughnut intensity was shown to be highest when using an optimal phase element. The vortex-axicon-aided intensity ring was found to be about twice as wide as when generated using two other elements under analysis. Thus, the optimal filter was shown to be best suited for generating a perfect optical vortex. Simulation results were shown to corroborate theoretical predictions, with the experiment being in agreement with theory and simulation.

**Keywords:** perfect optical vortex, topological charge, radius and width of an intensity ring, Bessel mode, vortex axicon.

**Citation:** Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Generating a perfect optical vortex: comparison of approaches. *Computer Optics* 2016; 40(3): 312-21. – DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-3-312-321.

**Acknowledgements:** The work was partially funded by the Russian Federation Ministry of Education and Science, Presidential grant for Support of Leading scientific schools (NSH-

9498.2016.9) and Russian Foundation of Basic Research grants (14-29-07133, 15-07-01174, 15-37-20723, 15-47-02492, 16-29-11698).

### *References*

- [1] Ostrovsky AS, Rickenstorff-Parrao C, Arrizon V. Generation of the "perfect" optical vortex using a liquid-crystal spatial light modulator. *Opt Lett* 2013; 38(4): 534-536.
- [2] Chen M, Mazilu M, Arita Y, Wright EM, Dholakia K. Dynamics of microparticles trapped in a perfect vortex beam. *Opt Lett* 2013; 38(22): 4919-4922.
- [3] Vaity P, Rusch L. Perfect vortex beam: Fourier transformation of a Bessel beam. *Opt Lett* 2015; 40: 597-600.
- [4] Jabir MV, Apurv Chaitanya N, Aadhi A, Samanta GK. Generation of "perfect" vortex of variable size and its effect in angular spectrum of the down-converted photons. *Scientific Reports* 2016; 6: 21877.
- [5] García-García J, Rickenstorff-Parrao C, Ramos-García R, Arrizón V, Ostrovsky A. Simple technique for generating the perfect optical vortex. *Opt Lett* 2014; 39(18): 5305-5308.
- [6] Fedotowsky A, Lehovec K. Optimal filter design for annular imaging. *Appl Opt* 1974; 13(12): 2919-2923.
- [7] Korn GA, Korn TM. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, New York: McGraw-Hill Book Co., 1961.
- [8] Prudnikov AP, Brychkov YA, Marichev OI. *Integrals and Series, Special Functions*. New York: Gordon and Breach; 1981.
- [9] Kotlyar VV, Khonina SN, Kovalev AA, Soifer VA, Elfstrom H, Turunen J. Diffraction of a plane, finite-radius wave by a spiral phase plate. *Opt Lett* 2006; 31(11): 1597-1599.
- [10] Kotlyar VV, Kovalev AA, Skidanov RV, Moiseev OYu, Soifer VA. Diffraction of a finite-radius plane wave and a Gaussian beam by a helical axicon and a spiral phase plate. *J Opt Soc Am A* 2007; 24(7): 1955-1964.
- [11] Kotlyar VV, Kovalev AA, Soifer VA, Tuvey CS, Davis JA. Sidelobe contrast reduction for optical vortex beams using a helical axicon. *Opt Lett* 2007; 32(8): 921-923.

---

### *Authors' information*

The information about authors **Alexey Andreevich Kovalev**, **Victor Victorovich Kotlyar** and **Alexey Petrovich Porfirev** you can find on page 311 of this issue.

---

*Received May 25, 2016. The final version – June 14, 2016.*

---