

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТРАЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ОТ ДИФРАКЦИОННЫХ РЕШЁТОК, НАНЕСЁННЫХ НА ПРОИЗВОЛЬНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

С.И. Харитонов^{1,2}, Н.Л. Казанский^{1,2}, Л.Л. Досколович^{1,2}, Ю.С. Стрелков^{1,2}

¹ Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ), Самара, Россия

² Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия

Аннотация

В работе описан математический аппарат, позволяющий моделировать отражение электромагнитной волны от дифракционных решёток, нанесённых на произвольную поверхность. Для решения поставленной задачи использован аналог метода Кирхгофа. В качестве примера рассмотрено отражение от сферической поверхности с дифракционной решёткой. Для моделирования таких систем разработана программа и проведено численное исследование. Рассмотрена возможность обобщения полученных результатов для произвольных дифракционных оптических элементов.

Ключевые слова: дифракция, отражение, интеграл Кирхгофа, интегральная теорема Кирхгофа, дифракционная решётка.

Цитирование: Харитонов, С.И. Моделирование отражения электромагнитных волн от дифракционных решёток, нанесённых на произвольную поверхность / С.И. Харитонов, Н.Л. Казанский, Л.Л. Досколович, Ю.С. Стрелков // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40, № 2. – С. 194-202. – DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-2-194-202.

Введение

В современной науке и технике часто используют приборы, работающие по принципам дифракционной оптики [1, 2].

Многие из них содержат в своей конструкции дифракционный оптический элемент (ДОЭ). Эти элементы представляют собой совокупность большого числа регулярно расположенных щелей или выступов, нанесённых на некоторую поверхность, то есть являются дифракционными решётками [3]. Эти решётки можно разделить по свойствам поверхности на три типа: плоские [3], сферические [1] и решётки, выполненные на более сложных поверхностях свободной формы. В настоящее время отсутствует методика численного исследования работы дифракционной решётки, выполненной на произвольной поверхности. Для решения задач дифракции используется метод, в основе которого лежит интегральная теорема Кирхгофа [4], согласно которой значение функции u , являющейся решением скалярного уравнения Гельмгольца, в произвольной точке $M(x, y, z)$, находящейся внутри замкнутого объема, выражается через значение функции u и ее первой производной на поверхности, ограничивающей данный объем [4]. Метод Кирхгофа является математическим обобщением принципа Гюйгенса–Френеля, основная идея которого состоит в том, что волновое возмущение в некоторой точке пространства M есть результат интерференции волн, испускаемых вторичными источниками [4].

Метод Кирхгофа позволяет получить математическое описание распространения света с учетом дифракции. Геометрооптический подход не позволяет получить точного объяснения поведения системы в случае дифракционно-ограниченной оптической схемы.

Устройства, использующие дифракционные зеркальные решётки, выполненные на сферических поверхностях, рассмотрены в работе [5]. Во многих работах уделено большое внимание дифракционным решеткам на плоской поверхности и мало уде-

ляется внимания решёткам, нанесённым на более сложные поверхности. Данная работа посвящена описанию процесса отражения светового поля от поверхности, на которую нанесен ДОЭ. Использование для решения метода Кирхгофа позволяет определить более точное распределение светового поля на выходе системы, чем в случае геометрической оптики.

Суть подхода, рассмотренного в данной работе, состоит в том, что волновое поле (в общем случае с негладким волновым фронтом) в области ДОЭ, нанесенного на криволинейную поверхность, представляется в виде суперпозиции полей с гладкими волновыми фронтами. Это позволяет применить для расчета соответствующих интегралов асимптотические методы, например, метод стационарной фазы или метод трассировки лучей [6]. В результате получается метод, который содержит преимущества как дифракционного, так и геометрооптического подходов. Это облегчает вычислительную сложность задачи по сравнению с непосредственным применением метода Кирхгофа (а тем более по сравнению с методами, основанными на разностной аппроксимации дифференциальных уравнений) на порядок.

В качестве проверки теоретических результатов была рассмотрена дифракция на решетке, нанесенной на сферическую поверхность. В рамках параксиального приближения были получены аналитические формулы для распределения энергии в области фокусировки. Сравнение результатов с известными подтвердило правильность рассмотренного в работе подхода и модификации метода Кирхгофа.

1. Интеграл Кирхгофа в случае задания начального распределения на криволинейной поверхности

1.1. Постановка задачи

В рамках скалярной теории волновое поле удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U = 0, \tag{1}$$

где координаты x, y, z – декартовы координаты в трёхмерном пространстве.

Пусть на поверхности, заданной в параметрическом виде $r = r(u, v)$, задана комплексная амплитуда:

$$U(u, v) = A(u, v) \exp(ik\Psi(u, v)),$$

где $A(u, v) = \sqrt{I(u, v)}$, $I(u, v)$ – интенсивность, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число и $\Psi(u, v)$ – функция эйконала на рассматриваемой поверхности.

Требуется найти решение уравнения Гельмгольца в окружающем поверхность пространстве.

1.2. Интегральное представление решения

Интегральное представление для решения уравнения Гельмгольца с использованием теоремы Грина имеет следующий вид:

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int ((G(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) \nabla_1 U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_1) \nabla_1 G(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)) \cdot d\mathbf{S}_1). \tag{2}$$

Здесь \mathbf{r} – радиус-вектор точки наблюдения, \mathbf{r}_1 – радиус-вектор точки на поверхности, $d\mathbf{S}_1$ – вектор, который по модулю равен элементу площади поверхности, по которой ведётся интегрирование, а по направлению совпадает с вектором нормали. Точка обозначает скалярное приближение (\bullet).

В качестве функции Грина будем использовать функцию

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) = \frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}. \tag{3}$$

Из формулы (2) следует, что для нахождения поля внутри объема необходимо знать на поверхности поле $U(\mathbf{r}_1)$ и градиент $(\nabla_1 U(\mathbf{r}_1))$.

Рассмотрим выражение для градиента. Функция $U(\mathbf{r}_1)$ представляется в виде

$$U(\mathbf{r}_1) = A(\mathbf{r}_1) \exp(ik\Psi(\mathbf{r}_1)). \tag{4}$$

Здесь $A(\mathbf{r}_1) = \sqrt{I(\mathbf{r}_1)}$, где $I(\mathbf{r}_1)$ – интенсивность волны на поверхности, k – это волновое число и $\Psi(\mathbf{r}_1)$ – это функция эйконала на рассматриваемой поверхности.

В приближении геометрической оптики

$$\nabla U(\mathbf{r}_1) = ik(\nabla\Psi(\mathbf{r}_1))U(\mathbf{r}_1). \tag{5}$$

Подставляя выражение (5) в (2), получаем выражение для поля в виде

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int U(\mathbf{r}_1) \times (ikG(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) \nabla_1 \Psi(\mathbf{r}_1) - \nabla_1 G(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)) d\mathbf{S}_1. \tag{6}$$

Формула (6) представляет собой решение уравнения Гельмгольца при условии, что комплексная

амплитуда поля задана на криволинейной поверхности. Выражение для нормальной производной имеет вид:

$$\nabla_1 G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|) = -\frac{ik \exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|) |\mathbf{r}-\mathbf{r}_1| - \exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|) \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^2}. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (2) и пренебрегая членами, содержащими $(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|)^{-1}$, получаем следующее выражение для поля

$$U(\mathbf{r}) = \frac{ik}{4\pi} \int \left(\left(\nabla_1 \Psi(\mathbf{r}_1) + \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|} \right) U(\mathbf{r}_1) G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|) \bullet d\mathbf{S}_1 \right). \tag{8}$$

Для поверхности, заданной в параметрическом виде, векторный элемент площади на поверхности имеет вид

$$d\mathbf{S} = \mathbf{N}(u, v) du dv = [r_u(u, v) \times r_v(u, v)] du dv. \tag{9}$$

Здесь $\mathbf{N}(u, v)$ – нормаль к рассматриваемой поверхности, $r_u(u, v)$ и $r_v(u, v)$ – производные радиус-вектора поверхности по координатам. $[\times]$ – обозначение векторное произведение векторов.

Выражение для поля принимает вид

$$U(\mathbf{r}) = \frac{ik}{4\pi} \int \left((p(u, v), N(u, v)) + \left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}(u, v)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}(u, v)|}, N(u, v) \right) \right) \times U(u, v) G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}(u, v)|) du dv, \tag{10}$$

$$\mathbf{p}(u, v) = \nabla_1 \Psi(\mathbf{r}_1). \tag{11}$$

Функция $p(u, v)$ находится из системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(u, v)}{\partial u} &= \left(\mathbf{p}(u, v), \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u} \right), \\ \frac{\partial \Psi(u, v)}{\partial v} &= \left(\mathbf{p}(u, v), \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v} \right), \\ (\mathbf{p}(u, v))^2 &= 1. \end{aligned} \tag{12}$$

Система уравнений (12) имеет аналитическое решение для любой поверхности, заданной в параметрическом виде.

2. ДОЭ на криволинейной поверхности

Пусть на поверхности, заданной в параметрическом виде $r = r(u, v)$, задана комплексная амплитуда

$$U(u, v) = A(u, v) \exp(ik\Psi(u, v)),$$

где $A(u, v) = \sqrt{I(u, v)}$, $I(u, v)$ – интенсивность, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, и $\Psi(u, v)$ – функция эйконала на рассматриваемой поверхности. Пусть на кри-

волинейной поверхности находится ДОЭ с высотой микрорельефа, описываемой функцией

$$h(u, v) = (h_0 / 2\pi)\Phi(\text{mod}_{2\pi}(k_d \varphi_d(u, v))), \quad (13)$$

где $\varphi_d(u, v)$ – функция эйконала ДОЭ, λ – длина волны освещающего света, $\varphi_d(u, v)$ – функция эйконала оптического элемента, $\Phi(x)$ – функция нелинейного предсказания. Функция $\Phi(x)$ – описывает технологические погрешности или эффекты квантования ДОЭ. Физический смысл эйкональной функции состоит в следующем: $k_d \varphi_d(u, v)$ представляет собой фазу световой волны в плоскости, непосредственно прилегающей к ДОЭ.

В качестве примера рассмотрим оптический элемент с функцией эйконала $\varphi_d(u, v) = \alpha u$. В этом случае высота микрорельефа описывается выражением

$$h(u) = (h_0 / 2\pi)\text{mod}_{2\pi}(k_d \alpha u). \quad (14)$$

ДОЭ представляет собой дифракционную решётку с треугольным профилем и с периодом $d = 2\pi/k\alpha$.

Пусть на дифракционную решётку, расположенную в плоскости $z = 0$, падает плоская волна с эйконалом $\varphi_0(u, v) = \mathbf{s}^0 \cdot \mathbf{r}$, где \mathbf{s}^0 – вектор направляющего луча, а \mathbf{r} – вектор с координатами $\mathbf{r} = (u, v, 0)$. После прохождения дифракционной решетки на выходе образуются несколько плоских волн с направляющими векторами

$$\mathbf{s}_m = \left(s_x^0 + m \frac{\partial \varphi_d(u, v)}{\partial u}, s_y^0, (s_m)_z \right). \quad (15)$$

Компонента $(s_m)_z$ находится из условия нормировки вектора $|\mathbf{s}_m| = 1$.

Рассмотрим оптический элемент с эйкональной функцией

$$\varphi_d(u, v) = \alpha u + \beta v. \quad (16)$$

Этот ДОЭ представляет дифракционную решётку со штрихами, направленными не по оси u . Вектор \mathbf{b} , определяющий направление, перпендикулярное направлению штрихов, и период дифракционной решетки d выражаются через параметры α, β по следующим формулам:

$$d = \frac{2\pi}{k\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \mathbf{b} = \nabla_{\perp} \varphi(u, v). \quad (17)$$

На выходе дифракционной решетки образуются множество плоских волн с направляющими векторами

$$\mathbf{s}_m = \left(s_x^0 + m \frac{\partial \varphi_d(u, v)}{\partial u}, s_y^0 + m \frac{\partial \varphi_d(u, v)}{\partial v}, (s_m)_z \right). \quad (18)$$

Компонента $(s_m)_z$ находится из условия нормировки вектора $|\mathbf{s}_m| = 1$.

При прохождении плоской волны через дифракционную решётку образуется несколько плоских волн. Эйконал каждой волны получается как результат сложения эйконала падающей волны – $\varphi_0(u, v)$ и эйконала ДОЭ – $\varphi_d(u, v)$, умноженного на номер ди-

фракционного порядка. Эйконал ДОЭ для порядка m имеет вид:

$$\varphi_m(u, v) = \varphi_0(u, v) + m\varphi_d(u, v). \quad (19)$$

Рассмотрим теперь падение волны с эйконалом $\varphi_0(u, v)$, отличным от эйконала плоской волны. Направление вектора луча определяется

$$\mathbf{s}^0 = \left(\frac{\partial \varphi_0(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_0(u, v)}{\partial v}, (s^0)_z \right). \quad (20)$$

Компонента $(s^0)_z$ находится из условия нормировки вектора $|\mathbf{s}^0| = 1$.

Теперь дифракционная решётка локально изменяет направление луча. В этом случае направление луча на выходе также описывается формулой (19)

$$\mathbf{s}_m = \left(\frac{\partial \varphi_0(u, v)}{\partial u} + m \frac{\partial \varphi_d(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial \varphi_0(u, v)}{\partial v} + m \frac{\partial \varphi_d(u, v)}{\partial v}, (s_m)_z \right). \quad (21)$$

Рассмотрим теперь более общий случай. Пусть волна с эйконалом $\varphi_0(u, v)$, отличным от эйконала плоской волны, падает на ДОЭ с эйкональной функцией, отличной от эйконала дифракционной решетки. В этом случае дифракционный оптический элемент представляет собой дифракционную решётку с изменяющимся по апертуре периодом и направлением штрихов. Сделаем предположение, что изменение направления луча определяется только периодом локальной решетки и направлением штрихов локальной решетки. Отметим, что период решетки и направление штрихов определяются формулами

$$d(u, v) = \frac{2\pi}{k_d |\nabla_{\perp} \varphi_d(u, v)|}, \quad (22)$$

$$\mathbf{b}(u, v) = \nabla_{\perp} \varphi_d(u, v).$$

Направление также определяется формулой (21). Рассмотрим теперь самый общий случай. Пусть волна с эйконалом $\varphi_0(u, v)$, отличным от эйконала плоской волны, падает на ДОЭ с эйкональной функцией, отличной от эйконала дифракционной решетки. Положим, длина волны освещающего пучка отлична от длины волны, которая использовалась при расчете микрорельефа по формуле (13). Направление лучей после прохождения ДОЭ определяется выражением:

$$\mathbf{s}_m = \left(\frac{\partial}{\partial u}(\varphi_m(u, v)), \frac{\partial}{\partial v}(\varphi_m(u, v)), (s_m)_z \right), \quad (23)$$

$$(s_m)_z = \sqrt{1 - \left[\frac{\partial}{\partial u}(\varphi_m(u, v)) \right]^2 - \left[\frac{\partial}{\partial v}(\varphi_m(u, v)) \right]^2},$$

$$\varphi_m(u, v) = \varphi_0(u, v) + \frac{mk_d}{k_0} \varphi_d(u, v). \quad (24)$$

Анализ полученных выражений показывает, что после прохождения ДОЭ на выходе формируется несколько семейств лучей, притом каждому семейству соответствует свой порядок дифракции с номером m .

Формулы (23), (24) получены для ДОЭ, расположенного на плоскости.

При расположении ДОЭ на криволинейной поверхности формула (24) остаётся справедливой, а направление каждого из семейств лучей определяется выражением:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_m(u, v)}{\partial u} &= \left(\mathbf{p}(u, v), \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u} \right), \\ \frac{\partial \varphi_m(u, v)}{\partial v} &= \left(\mathbf{p}(u, v), \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v} \right), \\ (\mathbf{p}(u, v))^2 &= 1. \end{aligned} \tag{25}$$

3. Интеграл Кирхгофа для ДОЭ на криволинейной поверхности

При рассмотрении ДОЭ на криволинейной поверхности рассуждения будут такими же, как в 1-м параграфе, с той лишь разницей, что интеграл Кирхгофа будет записан с использованием новой эйкональной функции вида (24), где $\varphi_0(u, v)$ – эйкональная функция самой поверхности, а $(mk_d/k_0)\varphi_d(u, v)$ – эйконал дифракционного порядка с номером m ДОЭ. В этом случае в интеграле (10) необходимо переопределить функцию $U(u, v)$ следующим образом:

$$U(u, v) = \frac{\exp\left(ik\left(\varphi_0(u, v) + \frac{mk_d}{k_0}\varphi_d(u, v)\right)\right)}{\varphi_0(u, v)}. \tag{26}$$

Ввиду изменения вида эйкональной функции будут внесены соответствующие изменения в систему, определяющую вектор направления.

4. Расчёт поля сферической волны, отражённой от сферического зеркала

В случае, когда поверхность сферическая:

$$x = x(u, v) = u,$$

$$y = y(u, v) = v,$$

$$z(u, v) = \sqrt{R^2 - v^2 - u^2},$$

$$\mathbf{N} = \left(\frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}; \frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}; 1 \right),$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u} = \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \right), \tag{27}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v} = \left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}} \right).$$

При расположении точечного источника в точке с координатами $(x_0, 0, 0)$ освещается сферическая поверхность. Функция эйконала в этом случае примет вид $\Psi(u, v) = \sqrt{R^2 - 2ux_0 + x_0^2}$.

Производные эйкональной функции описываются выражениями:

$$\frac{\partial \Psi(u, v)}{\partial u} = \frac{-x_0}{\sqrt{R^2 - 2ux_0 + x_0^2}}, \tag{28}$$

$$\frac{\partial \Psi(u, v)}{\partial v} = 0.$$

Подставляя выражения (25) и (26) в (12), получаем систему уравнений для нахождения $\mathbf{p}(u, v)$.

$$\begin{cases} \frac{-x_0}{\sqrt{R^2 - 2ux_0 + x_0^2}} = p_1(u, v) - \frac{p_3(u, v)u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}, \\ 0 = p_2(u, v) - \frac{p_3(u, v)v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}, \\ p_1(u, v)^2 + p_2(u, v)^2 + p_3(u, v)^2 = 1. \end{cases} \tag{29}$$

Переходим к интегрированию по параметрам и получаем выражение, описывающее отражённое световое поле (см. приложение Б).

Выражение (11) определяет собой вектор направления лучей при их движении через рассматриваемую оптическую систему.

В случае сферической зеркальной поверхности легко перейти от последней системы к квадратному уравнению, выразив из первых двух уравнений системы (29) p_1 и p_2 через p_3 , а затем подставив в третье уравнение системы. Результатом будут два вектора, определяющих направление отражения волны от рассматриваемой поверхности, однако правильный физический смысл будет иметь только один, который будет получаться из того решения квадратного уравнения, которое меньше нуля.

Моделирование заключалось в численном расчёте интеграла Кирхгофа и дальнейшем его сравнении с парааксиальным приближением.

Для моделирования с помощью интеграла Кирхгофа были использованы следующие формулы.

Точка наблюдения:

$$\mathbf{r} = (x, y, z).$$

Точка на поверхности сферического зеркала:

$$\mathbf{r}(u, v) = \left(u, v, \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \right), \tag{30}$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}(u, v) = \left(x - u; y - v; z - \sqrt{R^2 - u^2 - v^2} \right). \tag{31}$$

Далее будем считать, что $z = 0$. Расстояние от точки на поверхности до точки наблюдения определяется выражением:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}(u, v)| = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2 + (R^2 - u^2 - v^2)}. \tag{32}$$

Функция Грина:

$$G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}(u, v)|) = \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}(u, v)|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(u, v)|}. \tag{33}$$

Функция, описывающая поле от точечного источника на сферической поверхности, имеет вид:

$$U(u, v) = \frac{\exp(ik\Psi(u, v))}{\Psi(u, v)}. \tag{34}$$

Подставляем $\mathbf{p}(u, v)$, а также выражения (32), (31) в формулу (10), получаем выражение для поля в плоскости (x, y) (см. приложение А).

В параксиальном приближении выражение для поля сферической волны, отражённой от сферического зеркала, имеет вид:

$$U(x, y) = -\frac{2ikab}{\pi R^2} e^{2ikR} e^{\frac{ikx_0^2}{2R}} e^{\frac{ik(x^2+y^2)}{2R}} \times \text{sinc}\left(k\frac{a(x+x_0)}{R}\right) \text{sinc}\left(k\frac{by}{R}\right), \tag{35}$$

где x_0 – положение на оси абсцисс источника, a, b – размеры исследуемой области по оси абсцисс и ординат соответственно.

Подробный вывод аналитики смотри в приложении Б.

Моделирование проводилось для зеркальной дифракционной решётки, выполненной на сферической поверхности радиусом 30λ . График амплитуды для этой системы, отражающей свет длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм, представлен на рис. 1.

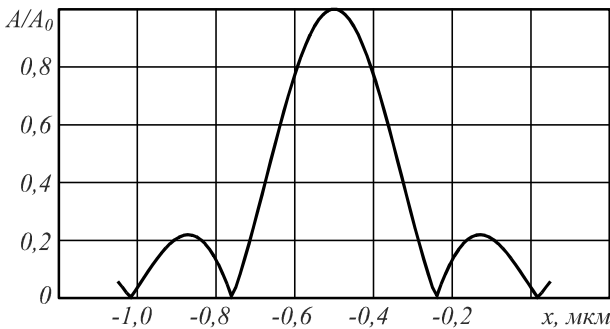


Рис. 1. График амплитуды в плоскости $y = 0$ в случае численного решения

На следующем рисунке представлен график амплитуды рассматриваемой системы, но описанной аналитически (рис. 2).

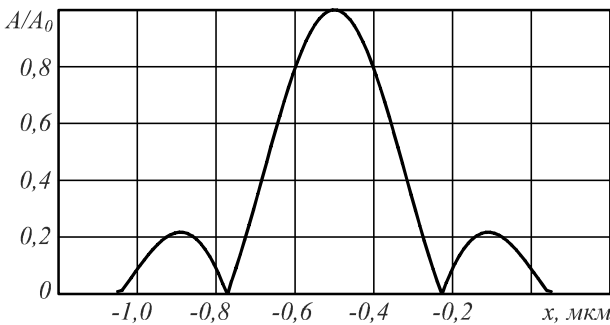


Рис. 2. График амплитуды в плоскости $y = 0$ в случае аналитического решения

В процессе численного моделирования результаты показали, что при удалении источника от зеркала оба решения приближаются друг к другу.

5. Расчёт поля сферической волны, отражённой от сферического зеркала с дифракционной решёткой

Для описания отражения от сферической дифракционной решётки достаточно изменить выше описанную функцию источника (34), добавив в аргумент экспоненты функцию, определяющую характер поверхности дифракционной решётки.

$$U(u, v) = \frac{\exp(ik\phi_0(u, v))}{\phi_0(u, v)}. \tag{36}$$

Новой функцией источника будет формула (26). Запишем ее в более компактном виде:

$$U(u, v) = \frac{\exp(ik\phi_0(u, v) + m\phi(u))}{\phi_0(u, v)}, \tag{37}$$

где m – исследуемый дифракционный порядок.

Здесь добавленная в аргумент функция имеет вид:

$$\phi(u) = (\Delta x / R) \times u, \tag{38}$$

где Δx и R – шаг и радиус поверхности решётки соответственно.

Методика численного моделирования практически не отличается от описанной в предыдущем параграфе за исключением новой функции, описывающей источник (37). Так же изменится и аналитическое решение (35), которое теперь примет следующей вид:

$$U(x, y) = -\frac{2ikab}{\pi R^2} \exp\left(ikR\left(2 + \frac{x_0^2}{2R^2} + \frac{x^2 + y^2}{2R^2}\right)\right) \times \text{sinc}\left(k\frac{a(x+x_0 - m\Delta x R)}{R}\right) \text{sinc}\left(k\frac{by}{R}\right).$$

Для моделирования работы дифракционной решётки был проведён расчёт трёх порядков дифракции, а именно $-1, 0, 1$, для различных расстояний и наборов длин волн. На рис. 3а представлено численное решение для нулевого порядка дифракции, на рис. 3б – для того же порядка, но для аналитики. Для рис. 3г, е – численное решение, соответственно, первый и минус первый порядки дифракции. Для рис. 3в, д – аналитическое решение, соответственно, первый и минус первый порядки дифракции.

Сравнение результатов для аналитического и численного решений представлено на рис. 4, где сплошная линия соответствует численному решению, а пунктирная – аналитическому.

Заключение

Разработанный метод может быть использован при расчете характеристик оптических схем, содержащих ДОЭ на криволинейной поверхности. Данный подход может быть обобщен на случай векторного электромагнитного поля. Описанный математический аппарат позволяет моделировать отражение от дифракционных решёток, нанесённых на произвольную поверхность. Для решения поставленной задачи использован аналог метода Кирхгофа. В качестве примера было рассмотрено отражение от дифракционной решётки сферической поверхности.

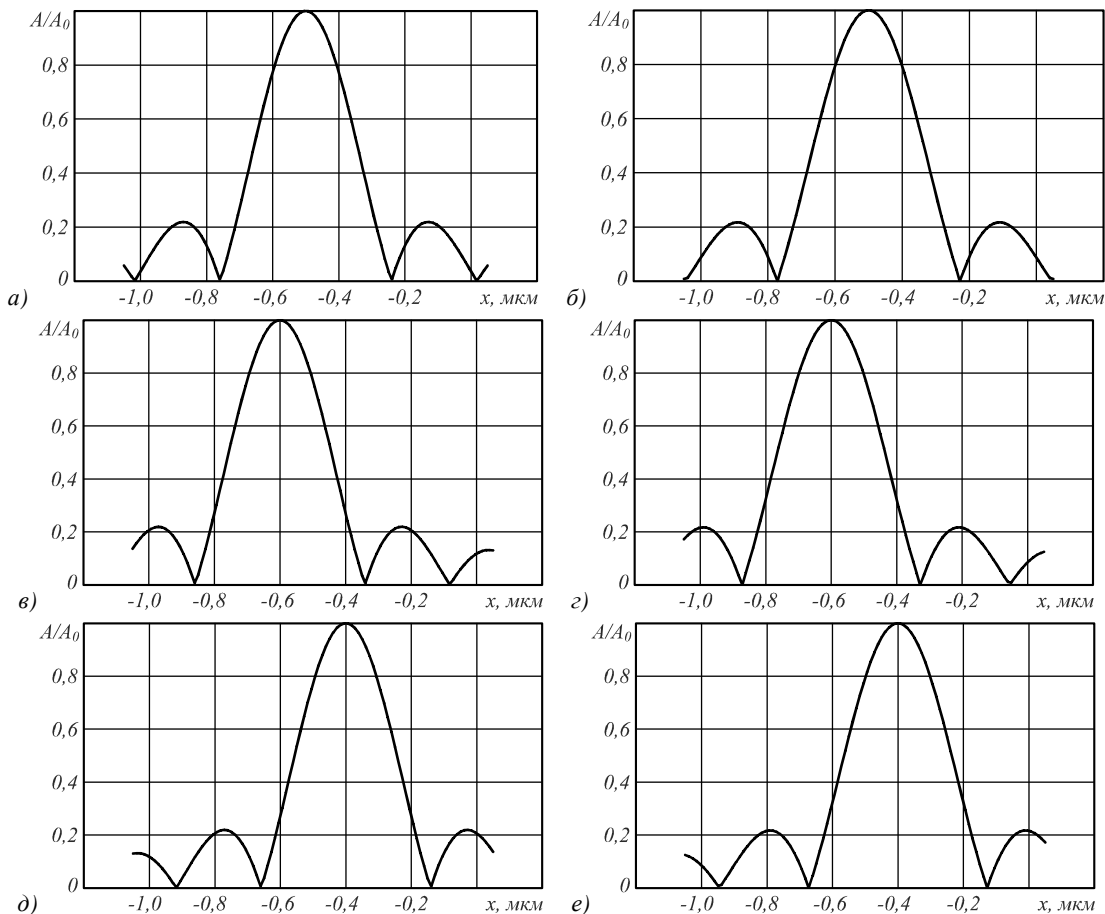


Рис. 3. График амплитуды в плоскости $y = 0$ для $-1, 0, 1$ порядков дифракции для численного и аналитического методов решения

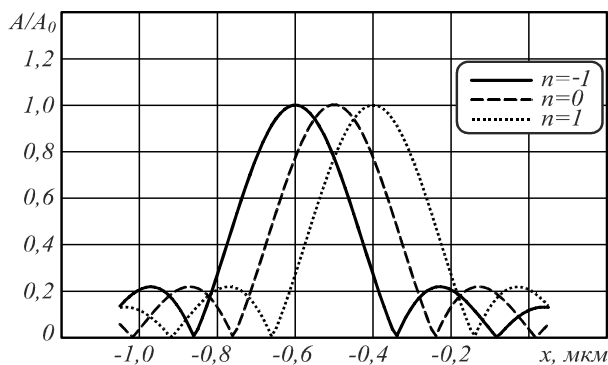


Рис. 4. Совмещение графиков амплитуды в плоскости $y = 0$ для $-1, 0, 1$ порядков дифракции для численного и аналитического методов решения

Для моделирования таких систем была разработана программа и проведено численное исследование. Рассмотрена возможность обобщения полученных результатов для произвольных дифракционных оптических элементов.

Приложение А. Решение системы уравнений для поиска направляющего вектора

Направляющий вектор $\vec{p}(u, v)$ легко найти из системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{u-x}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}(u,v)|} = p_1(u,v) - \frac{p_3(u,v)u}{\sqrt{R-u^2-v^2}}, \\ \frac{v-y}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}(u,v)|} = p_2(u,v) - \frac{p_3(u,v)v}{\sqrt{R-u^2-v^2}}, \\ p_1(u,v)^2 + p_2(u,v)^2 + p_3(u,v)^2 = 1. \end{cases} \quad (A.1)$$

Для компактности решения введём обозначения:

$$\begin{aligned} a &= \frac{u-x_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}(u,v)|}, & b &= \frac{v-y_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}(u,v)|}, \\ c &= -\frac{u}{\sqrt{R-u^2-v^2}}, & d &= -\frac{v}{\sqrt{R-u^2-v^2}}. \end{aligned} \quad (A.2)$$

Теперь перепишем систему (A.1) с помощью (A.2):

$$\begin{cases} a = p_1(u,v) + cp_3(u,v), \\ b = p_2(u,v) + dp_3(u,v), \\ p_1(u,v)^2 + p_2(u,v)^2 + p_3(u,v)^2 = 1. \end{cases} \quad (A.3)$$

Выражать будем p_1 и p_2 из первых двух уравнений системы (A.3), чтобы при подстановке их в третье уравнение той же системы получить квадратное уравнение:

$$\begin{cases} a - cp_3(u, v) = p_1(u, v), \\ b - dp_3(u, v) = p_2(u, v), \\ (a - cp_3(u, v))^2 + (b - dp_3(u, v))^2 + \\ + p_3(u, v)^2 = 1, \end{cases} \quad (A.4)$$

$$(a - cp_3(u, v))^2 + (b - dp_3(u, v))^2 + p_3(u, v)^2 = 1, \quad (A.5)$$

$$a^2 - 2acp_3(u, v) + (cp_3(u, v))^2 + b^2 - 2bdp_3(u, v) + (dp_3(u, v))^2 + p_3^2(u, v) = 1. \quad (A.6)$$

После всех преобразований (A.5, A.6) получаем уравнение (A.7), в котором опять же целесообразно сделать замену для его более компактной записи.

$$p_3^2(u, v)(1 + d^2 + c^2) - 2p_3(u, v)(ac + bd) + (a^2 + b^2 - 1) = 0. \quad (A.7)$$

Введём новые обозначения:

$$\begin{aligned} A &= (1 + d^2 + c^2); \quad B = -2(ac + bd); \\ C &= (a^2 + b^2 - 1). \end{aligned} \quad (A.8)$$

Решение уравнения (A.7) получим в виде:

$$\begin{aligned} p_{3,1} &= \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \\ p_{3,2} &= \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \end{aligned} \quad (A.9)$$

Значения этих корней легко получить, подставив в A.9 обозначения (A.8).

Распространение луча от источника происходит в положительном направлении, значит, отражённый луч будет двигаться в отрицательном направлении, а значит, нужно брать p_3 со знаком минус.

Приложение Б. Получение парааксиального приближения для зеркальной поверхности

Значение интеграла

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}) &= \frac{ik}{4\pi} \int ((\mathbf{p}(u, v), \mathbf{N}(u, v)) + \\ &+ \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}(u, v)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(u, v)|}, \mathbf{N}(u, v) \right)) \times \\ &\times U(u, v) G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}(u, v)|) du dv \end{aligned} \quad (B.1)$$

может быть получено в парааксиальном приближении. Для получения парааксиального приближения предполагаем, что радиус поверхности достаточно большой.

В этом случае для выражения $|\mathbf{r} - \mathbf{r}(u, v)|$ возможно следующее:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}(u, v)| \approx R \left(1 + \frac{x^2 + y^2 - 2ux - 2vy}{2R^2} \right). \quad (B.2)$$

Формула (B.1) справедлива в том случае, когда $|\mathbf{r} - \mathbf{r}(u, v)|$ является аргументом экспоненты.

Иначе имеем:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}(u, v)| \approx R. \quad (B.3)$$

Учитывая формулы (B.2, B.3) и подставляя их в систему уравнений (A.1), определяющую направляющий вектор \mathbf{p} , получим:

$$\begin{cases} \frac{u-x}{R} = p_1(u, v) - \frac{p_3(u, v)u}{\sqrt{R-u^2-v^2}}, \\ \frac{v-y}{R} = p_2(u, v) - \frac{p_3(u, v)v}{\sqrt{R-u^2-v^2}}, \\ p_1^2(u, v) + p_2^2(u, v) + p_3^2(u, v) = 1. \end{cases} \quad (B.4)$$

Далее принципиальных отличий от решения этой системы, описанного в приложении А, нет. Поэтому сразу запишем ее решение (B.5) в случае очень большого R :

$$p_1 = 0; p_2 = 0; p_3 = \pm 1. \quad (B.5)$$

Нормаль в случае парааксиального приближения запишется в следующем виде:

$$\mathbf{N} = \left(\frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}; \frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}; 1 \right) = (0; 0; 1). \quad (B.5)$$

Разность векторов:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}(u, v) = (0; 0; R). \quad (B.6)$$

Подставляя (B.6, B.5) в скалярные произведения, входящие в формулу B.1:

$$\left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}(u, v)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(u, v)|}, \mathbf{N}(u, v) \right) = \left(\frac{(0; 0; R)}{R}, (0; 0; 1) \right) = 1, \quad (B.7)$$

$$(\mathbf{p}(u, v), \mathbf{N}(u, v)) = 1. \quad (B.8)$$

Подставляя (B.7, B.8) в формулу B.1, получаем:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}) &= \frac{ik}{2\pi} \int U(u, v) \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}(u, v)|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(u, v)|} du dv = \\ &= \frac{ik}{2\pi R^2} \int \left(\exp \left(ikR \left(1 + \frac{x_0^2 - 2ux_0 + x^2 + y^2 - 2ux - 2vy}{2R^2} \right) \right) \right) du dv. \end{aligned}$$

Внутри экспоненты: $\phi_0(u, v) = R \left(1 + \frac{x_0^2 - 2ux_0}{2R^2} \right)$.

Вне экспоненты: $\phi_0(u, v) = R$,

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}) &= \frac{ik}{2\pi R^2} e^{2ikR} e^{\frac{ikx_0^2}{2R}} e^{\frac{ik(x^2+y^2)}{2R}} \times \\ &\times \int \exp \left(-ik \frac{u(x+x_0) + vy}{R} \right) du dv. \end{aligned}$$

Пусть

$$\text{Const} = \frac{ik}{2\pi R^2} e^{2ikR} e^{\frac{ikx_0^2}{2R}} e^{\frac{ik(x^2+y^2)}{2R}},$$

$$\begin{aligned}
 U(\mathbf{r}) &= \text{Const} \iint_D \exp\left(-ik \frac{u(x+x_0)}{R}\right) \exp\left(-ik \frac{vy}{R}\right) du dv = \text{Const} \int_{u_1}^{u_2} \exp\left(-ik \frac{u(x+x_0)}{R}\right) du \int_{v_1}^{v_2} \exp\left(-ik \frac{vy}{R}\right) dv = \\
 &\quad / \text{ пусть пределы будут симметричными } / \\
 &= \frac{\text{Const } R^2}{k^2 y(x+x_0)} \left(\exp\left(-ik \frac{a(x+x_0)}{R}\right) - \exp\left(-ik \frac{-a(x+x_0)}{R}\right) \right) \left(\exp\left(-ik \frac{by}{R}\right) - \exp\left(-ik \frac{-by}{R}\right) \right) = \\
 &= \frac{\text{Const } R^2}{k^2 y(x+x_0)} \left(-\exp\left(-ik \frac{a(x+x_0)}{R}\right) + \exp\left(ik \frac{a(x+x_0)}{R}\right) \right) \left(-\exp\left(-ik \frac{by}{R}\right) + \exp\left(ik \frac{by}{R}\right) \right) = \\
 &= \frac{-4 \text{Const } R^2}{k^2 y(x+x_0)} \sin\left(k \frac{a(x+x_0)}{R}\right) \sin\left(k \frac{ay}{R}\right) = -4ab \text{Const} \text{sinc}\left(k \frac{a(x+x_0)}{R}\right) \text{sinc}\left(k \frac{by}{R}\right).
 \end{aligned}
 \tag{Б.9}$$

Формула Б.9 представляет собой паракиальное приближение.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 14-31-00014.

Литература

1. **Mouroulis P.** Convex grating types for concentric imaging spectrometers / P. Mouroulis, D.W. Wilson, P.D. Maker, R.E. Muller // Applied Optics. – 1998. – Vol. 37(31). – P. 7200-7208.
2. **Загрубский А.А.** Спектральные приборы / А.А. Загрубский, Н.М. Цыганенко, А.П. Чернова. – СПб.: Санкт-

- Петербургский государственный университет, 2007. – 76 с.
3. **Hutley M.C.** Diffraction Gratings / M.C. Hutley – N.Y.: Academic Press Inc. Publishers, 1982. – 150 p.
4. **Борн М.** Основы оптики / М. Борн, Э. Вольф; пер. с англ. – Изд. 2-е, испр. – М.: Наука, 1973. – 345 с.
5. **Christopher P.** Diffraction grating handbook / P. Christopher, E. Loewen – N.Y.: Newport Corporation, 2005. – 86 p.
6. **Зоммерфельд А.** Оптика / А. Зоммерфельд; пер. с нем. – М.: Иностранная Литература, 1953. – 488 с.
7. **Белл, Р.Дж.** Введение в Фурье-спектроскопию / Р.Дж. Белл; пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 49 с.

Сведения об авторах

Харитонов Сергей Иванович, 1961 года рождения. Доктор физико-математических наук, доцент кафедры технической кибернетики, старший научный сотрудник лаборатории дифракционной оптики Учреждения Российской академии наук Институт систем обработки изображений РАН. 1984 г. – окончил физический факультет Самарского государственного университета. 1993 г. – защитил кандидатскую диссертацию на тему «Асимптотические методы дифракционного расчёта фокусаторов лазерного излучения». 2010 г. – защитил докторскую диссертацию на тему «Асимптотические методы расчёта дифракции когерентного электромагнитного излучения на дифракционных оптических элементах». Область научных интересов: дифракционная, квантовая оптика, физика плазмы. В списке научных работ С.И. Харитонова 87 статей, 5 авторских свидетельств и патентов. E-mail: prognoz2007@gmail.com.

Казанский Николай Львович, 1958 года рождения. В 1981 году с отличием окончил Куйбышевский авиационный институт (КуАИ, ныне – Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (1996 год), профессор, работает врио директора Института систем обработки изображений РАН (ИСОИ РАН), профессором кафедры технической кибернетики СГАУ. Ведущий научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории прорывных технологий дистанционного зондирования Земли в СГАУ, заведующий базовой (СГАУ в ИСОИ РАН) кафедрой высокопроизводительных вычислений. Является членом международных научных обществ SPIE и IAPR. Н.Л. Казанский – специалист в области дифракционной оптики, математического моделирования, обработки изображений и нанофотоники. В списке научных работ Н.Л. Казанского 240 статей, 10 монографий, 46 авторских свидетельств и патентов. Страница в интернете: <http://www.ipsi.smr.ru/staff/kazansky.htm>. E-mail: kazansky@smr.ru.

Сведения об авторе **Досколович Леонид Леонидович** см. стр.171 этого номера.

Стрелков Юрий Станиславович, 1992 года рождения. Магистрант 2-го года обучения 6-го факультета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва. E-mail: ghost_strelkov@mail.ru.

Поступила в редакцию 2 февраля 2016 г.
Окончательный вариант – 13 апреля 2016 г.

**MODELING THE REFLECTION OF THE ELECTROMAGNETIC WAVES
AT A DIFFRACTION GRATING GENERATED ON A CURVED SURFACE***S.I. Kharitonov^{1,2}, N.L. Kazanskiy^{1,2}, L.L. Doskolovich^{1,2}, Y.S. Strelkov^{1,2}*¹ Samara State Aerospace University, Samara, Russia,² Image Processing Systems Institute,
Russian Academy of Sciences, Samara, Russia**Abstract**

This article describes mathematical tools that allow one to simulate the reflection at diffraction gratings generated on an arbitrary surface. To solve this problem an analog of the Kirchhoff method was used. As an example, we considered reflection at a grating generated on a spherical surface. For modeling such systems we developed a program that allowed us to carry out a numerical experiment. We discussed a possibility of generalization of the results onto arbitrary diffractive optical elements.

Keywords: diffraction, reflection, Kirchhoff's integral, Kirchhoff's integral theorem, diffraction grating.

Citation: Kharitonov SI, Kazanskiy NL, Doskolovich LL, Strelkov YS. Modeling the reflection of the electromagnetic waves at a diffraction grating generated on a curved surface. *Computer Optics*. 2016; 40(2): 194-202. DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-2-194-202.

Acknowledgement: The work was funded by the Russian Science Foundation (RSF), grant No. 14-31-00014.

References

- [1] Mouroulis P, Wilson DW, Maker PD, Muller RE. Convex grating types for concentric imaging spectrometers. *Applied Optics* 1998; 37(31): 7200-7208.
- [2] Zagrubsky AA, Tsyganenko NM, Chernoff AP. *Spectral Instruments* [In Russian]. Saint Petersburg: Saint Petersburg State University Publisher; 2007.
- [3] Hutley MC. *Diffraction Gratings*. New York: Academic Press Inc; 1982.
- [4] Born M, Wolf E. *Principles of optics*. Oxford: Pergamon press; 1968.
- [5] Christopher P, Loewen E. *Diffraction grating handbook*. New York: Newport Corporation; 2005.
- [6] Sommerfeld A. *Optics*. Academic Press; 1950.
- [7] Bell RJ. *Introductory Fourier transform spectroscopy*. New York: Academic Press Inc; 1972.

Authors' information

Sergey Ivanovich Kharitonov (b.1961), Senior Researcher of Diffractive Optics Laboratory of the Image Processing Systems Institute of RAS, Doctor of Physical and Mathematical Sciences. 1984 – graduated from the Physics department of the Samara State University. 1993 – defended his dissertation "Asymptotic methods of calculation of the diffraction of laser radiation Focuser". 2010 – defended his doctoral thesis on "Asymptotic methods for calculating the diffraction of coherent electromagnetic radiation in diffractive optical elements". Research interests: diffraction, quantum optics, plasma physics. The list of scientific papers S.I. Kharitonov's 87 articles, 5 patents. E-mail: prognoz2007@gmail.com.

Nikolay Lvovich Kazanskiy (b. 1958), graduated with honours (1981) from S. P. Korolyov Kuibyshev Aviation Institute (presently, S. P. Korolyov Samara State Aerospace University (SSAU)), majoring in Applied Mathematics. He received his Candidate in Physics & Maths (1988) and Doctor in Physics & Maths (1996) degrees from Samara State Aerospace University. He is the vice-director for research and the head of Diffractive Optics laboratory at the Samara Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences (IPSI RAS), holding a part-time position of professor at SSAU's Technical Cybernetics sub-department. Leading researcher at the Breakthrough Technologies for Earth's Remote Sensing laboratory in S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (National Research University), holding the chair of SSAU's base sub-department of High-Performance Computing at IPSI RAS. He is a SPIE- and IAPR member. He is co-author of 240 scientific papers, 7 monographs, and 35 inventions and patents. His current research interests include diffractive optics, mathematical modeling, image processing, and nanophotonics. Web site: <http://www.ipsi.smr.ru/staff/kazansky.htm>. E-mail: kazansky@smr.ru.

The information about author **Leonid Leonidovich Doskolovich** you can find on page 171 of this issue.

Yurii Stanislavovich Strelkov (b. 1992), undergraduate of second year of study of 6th faculty of Samara State Aerospace University named after S.P. Korolyov. E-mail: ghost_strelkov@mail.ru.

Received February 2, 2016. The final version – April 13, 2016.
