АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОРБИТАЛЬНОГО УГЛОВОГО МОМЕНТА СВЕТОВОГО ПОЛЯ КАК СУПЕРПОЗИЦИИ МОД ЭРМИТА–ГАУССА

В.Г. Волостников [1,2]

[1] *Самарский филиал федерального государственного бюджетного учреждения науки Физического института имени П.Н. Лебедева Российской академии наук (СФ ФИАН), Самара, Россия,*

[2] *Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет) (СГАУ), Самара, Россия*

Аннотация

В работе рассмотрено асимптотическое поведение орбитального углового момента для светового поля как суперпозиции пучков Эрмита–Гаусса. Получены аналитические выражения, описывающие асимптотическое поведение орбитального углового момента такого поля. Найдены экстремальные значения орбитального углового момента для суперпозиции из двух, трёх и четырёх мод Эрмита–Гаусса при сохранении структурной устойчивости самого светового поля.

Ключевые слова: когерентная оптика, спиральные пучки света, орбитальный угловой момент.

Цитирование: **Волостников, В.Г.** Асимптотическое поведение орбитального углового момента светового поля как суперпозиции мод Эрмита–Гаусса / В.Г. Волостников // Компьютерная оптика. – 2016. – Т.40, №2. – С. 147-151. – DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-2-147-151.

Введение

Орбитальный угловой момент (ОУМ) электромагнитного поля рассматривался в литературе [1], в частности для лазерных мод Лагерра–Гаусса [2]. Как интегральный инвариант и специфическая характеристика светового поля, он представляет интерес для оптических микроманипуляций, передачи информации и т.п. [3, 4]. Насколько известно автору, понятие «оптический вихрь» было впервые введено в работе [5], и зачастую наличие ОУМ отождествляют с присутствием таких вихрей в световом поле. Как показано в работе [6], это не всегда справедливо. С другой стороны, хотя вращающиеся при распространении поля, или спиральные пучки [7, 8], обладают, как правило, ненулевым ОУМ, вращение не есть необходимое условие для его наличия. Это легко понять, если вспомнить, что параметры вращения определяются только индексами составляющих мод, тогда как ОУМ зависит также и от их весовых коэффициентов [7]. Более того, структурно устойчивые невращающиеся световые поля, обладающие ненулевым ОУМ, представляют отдельный интерес. В работе [9] рассматривался частный случай таких полей в виде суперпозиции двух мод Эрмита–Гаусса, а в работе [10] было показано, что в случае суперпозиции из трёх мод и более модуль удельного ОУМ может быть больше, чем максимальный модовый индекс в суперпозиции. Однако в [10] не ставилась и не решалась задача поиска максимальных значений модуля ОУМ. Целью данной работы является исследование асимптотического поведения ОУМ при стремлении индексов составляющих мод к бесконечности и поиск условий экстремальности ОУМ.

1. ОУМ для суперпозиции двух мод Эрмита–Гаусса

Рассмотрим сначала некоторое обобщение работы [9]. Найдём выражение для ОУМ следующей суперпозиции:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= HG_N(x)\times HG_M(y)+ \\ &+i\times A_1 HG_{N+1}(x)\times HG_{M-1}(y), \end{aligned} \tag{1}$$

где $HG_{N,M} = H_{N,M}(x, y)\times\exp(-((x^2+y^2)/2))$ – моды Эрмита–Гаусса, $H_{N,M}(x, y)$ – полиномы Эрмита $H_N(x)\times H_M(y)$. Легко видеть, что данное выражение имеет известный вид из [9] при $M=N+1$.

Найдём значение удельного ОУМ для (1) [10]:

$$\begin{aligned} M_l &= \mathrm{Re}[-x(\varepsilon E_x\overline{B_l}-\overline{B_x}\varepsilon E_l)-y(\varepsilon E_y\overline{B_l}-\varepsilon E_l\overline{B_y})] = \\ &= -\frac{\varepsilon}{8\pi c k_0}\mathrm{Im}\left(xF\frac{\partial\overline{F}}{\partial y}-yF\frac{\partial\overline{F}}{\partial x}\right). \end{aligned}$$

Мощность светового поля определяется выражением:

$$E=\iint F\overline{F}dxdy=\frac{\pi}{2}\sum_{N,M}(C_{N,M}\overline{C}_{N,M}\times 2^{N+M}N!M!).$$

Тогда удельный ОУМ будет следующим:

$$\frac{L_l}{E}=-\frac{2A_1\times(N+1)!\times M!}{N!\times M!+A_1^2\times(N+1)!\times(M-1)!}. \tag{2}$$

Эту формулу вряд ли можно исследовать на асимптотику, т.к. N и M в общем случае – независимые переменные. Данную трудность можно преодолеть, если ввести некую зависимость между N и M. Тогда, деля ОУМ на соответствующий номер моды, можно получить асимптотические выражения. Пусть, например, $N = M$. Тогда (1) примет вид:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= HG_N(x)\times HG_N(y)+ \\ &+i\times A_1 HG_{N+1}(x)\times HG_{N-1}(y). \end{aligned} \tag{3}$$

Удельный ОУМ будет следующим:

$$\begin{aligned} \frac{L_l}{E} &= -\frac{2A_1\times(N+1)!\times N!}{N!\times N!+A_1^2\times(N+1)!\times(N-1)!} = \\ &= -\frac{2A_1\times(N+1)}{1+A_1^2\times\dfrac{N+1}{N}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Из (4) легко видеть, что, во-первых, максимум модуля ОУМ достигается при неединичном весовом коэффициенте ($A_1 = \sqrt{N/(N+1)}$), а во-вторых, он не превышает ОУМ из [9],

$$\sqrt{N} \times \sqrt{N+1} < N+1. \tag{5}$$

Если поделить удельный ОУМ на N+1 и устремить N к бесконечности, то, как легко видеть, этот случай и суперпозиция из [9] станут эквивалентными.

2. ОУМ светового поля для суперпозиции из трёх мод Эрмита–Гаусса

Пусть теперь световое поле представляет собой суперпозицию из трёх мод Эрмита–Гаусса:

$$\begin{aligned} &F(x,y) = HG_N(x) \times HG_{N+1}(y) + \\ &+ i\,\mathrm{A}_1\, HG_{N+1}(x) \times HG_N(y) + \\ &+ i^2 A_2 \times HG_{N+2}(x) \times HG_{N-1}(y). \end{aligned} \tag{6}$$

Для удельного ОУМ получим [10]:

$$\frac{L_l}{E} = -\frac{2A_1(N+1) + 2A_1A_2(N+2)}{1 + A_1^2 + A_2^2 \dfrac{N+2}{N}}. \tag{7}$$

Асимптотическое выражение для (7) после деления на N+2 будет:

$$L_A = \Big(\frac{L_l}{E(N+2)}\Big)_{N\to\infty} = -\frac{2A_1 + 2A_1A_2}{1 + A_1^2 + A_2^2}. \tag{8}$$

Найдём для него необходимые условия существования максимума модуля:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial A_1}(L_A) = 0 = 2(1 + A_2) \times (1 + A_1^2 + A_2^2) - \\ &-2 \times (A_1 + A_1A_2) \times 2A_1, \\ &\frac{\partial}{\partial A_2}(L_A) = 0 = 2A_1 \times (1 + A_1^2 + A_2^2) - \\ &-2A_1(1 + A_2) \times 2A_2. \end{aligned} \tag{9}$$

Решая (9), найдём:

$$A_1^2 = A_2^2 + 1, A_2 = 1, A_1^2 = 2. \tag{10}$$

Отсюда легко найти асимптотическое выражение для ОУМ:

$$L_A = -\sqrt{2}\,. \tag{11}$$

Таким образом, экстремальное значение модуля L_A будет в $\sqrt{2}$ раз больше, чем в [9]. С физической точки зрения это вполне понятно, т.к. произошёл качественный скачок в характере суперпозиции: средний член – это соседний для первого и третьего. На взгляд автора, поучительным является рассмотрение и несколько иной суперпозиции, нежели (6). Возьмём следующую комбинацию из трёх мод:

$$\begin{aligned} &F(x,y) = -iA_{-1}HG_{N-1}(x) \times HG_{N+2}(y) + \\ &+ HG_N(x) \times HG_{N+1}(y) + i\,\mathrm{A}_1\, HG_{N+1}(x) \times HG_N(y). \end{aligned} \tag{12}$$

Составив и решив систему, аналогичную (9), найдём:

$$\begin{aligned} &L_A = \Big(\frac{L_l}{E(N+2)}\Big)_{N\to\infty} = -\frac{2A_{-1} + 2A_1}{1 + A_1^2 + A_1^2}, \\ &\left|L_A\right|_{\max} = \sqrt{2}, \\ &A_{-1}^2 = A_1^2, A_1 = A_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, экстремальное значение L_A определяется не столько функциональной зависимостью от весовых коэффициентов, сколько структурой суперпозиции: комбинация (12) так же, как и (8), состоит из трёх соседних по индексам мод. Существенно, однако, что при эквивалентности результатов последний вариант бывает проще для вычислений. Это будет видно ниже.

3. ОУМ светового поля для суперпозиции из четырёх мод Эрмита–Гаусса

Рассмотрим теперь следующее световое поле:

$$\begin{aligned} &F = HG_N(x)HG_{N+1}(y) + iA_1HG_{N+1}(x)HG_N(y) + \\ &+ i^2 \times A_2 \times HG_{N+2}(x)HG_{N-1}(y) + i^3 \times \\ &\times A_3 \times HG_{N+3}(x)HG_{N-2}(y), \\ &N \ge 2. \end{aligned} \tag{14}$$

Асимптотическое выражение для него будет следующим:

$$L_A = \Big(\frac{L_l}{E(N+3)}\Big)_{N\to\infty} = -\frac{2A_1 + 2A_1A_2 + 2A_2A_3}{1 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}. \tag{15}$$

Необходимые условия для максимума модуля (15) будут следующими:

$$\begin{cases} 2(1 + A_2)(1 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) - \\ -2(A_1 + A_1A_2 + A_2A_3)2A_1 = 0, \\ 2(A_1 + A_3)(1 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) - \\ -2(A_1 + A_1A_2 + A_2A_3)2A_2 = 0, \\ 2A_2(1 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) - \\ -2(A_1 + A_1A_2 + A_2A_3)2A_3 = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Систему (16) можно несколько упростить, например, следующим образом. Умножим первое уравнение на A_2, затем на A_3 и вычтем из него умноженные, соответственно, на A_1 второе и третье уравнения.

Тогда получим следующую систему:

$$\begin{cases} (1+A_2)(1+A_1^2+A_2^2+A_3^2)- \\ -(A_1+A_1A_2+A_2A_3)2A_1=0, \\ A_2(1+A_2)-A_1(A_1+A_3)=0, \\ A_3(1+A_2)-A_1A_2=0. \end{cases} \quad (17)$$

Решая совместно второе и третье уравнения из (17), получим:

$$\begin{cases} A_3^2=(A_1^2A_2^2)/(1+A_2)^2=A_2^3/(1+2A_2), \\ A_2A_3=(A_1A_2^2)/(1+A_2), \\ A_1^2=(A_2(1+A_2)^2)/(1+2A_2). \end{cases} \quad (18)$$

Подставляя выражения из (18) в первое уравнение из (17), найдём:

$$A_2^2-A_2-1=0. \quad (19)$$

Тогда из (18) и (19) получим:

$$A_2=(1+\sqrt{5})/2,\ A_1=A_2,\ A_3=1. \quad (20)$$

Подставляя значения (20) в (15), найдём экстремальную асимптотическую величину для этого случая:

$$L_A=\left(\frac{L_l}{E(N+3)}\right)_{N\to\infty}=-\frac{2A_1+2A_1A_2+2A_2A_3}{1+A_1^2+A_2^2+A_3^2}=-A_1, \quad (21)$$
$$-A_1\approx-1{,}62.$$

Соотношение (21) легко установить аналогично (18). Интересно отметить, что значение $-L_A$ в этом случае в точности равно величине широко известного т.н. «золотого сечения», а уравнение (19) – уравнение этого сечения.

С физической точки зрения это довольно понятно: с увеличением количества членов в суперпозиции происходит качественный «перелом» в характере роста модуля ОУМ, рост начинает всё более замедляться (например, при пяти и шести членах в суперпозиции $L_A=-\sqrt{3}\approx-1{,}73$, $L_A=-1{,}78$ соответственно).

Приоритетные вопросы, касающиеся «золотого сечения», весьма сложны. Отметим только, что в Интернете есть довольно обширная библиография по этой теме.

То же можно получить несколько проще, взяв «симметричную» комбинацию, аналогичную (12):

$$\begin{aligned} &F(x,y)=-iA_{-2}HG_{N-1}(x)\times HG_{N+2}(y)+ \\ &+A_{-1}HG_N(x)\times HG_{N+1}(y)+i\,\mathrm{A}_1\,HG_{N+1}(x)\times \\ &\times HG_N(y)+i^2\,\mathrm{A}_2\,HG_{N+2}(x)\times HG_{N-1}(y). \end{aligned} \quad (22)$$

Экстремальная величина для ОУМ будет следующей:

$$\begin{aligned} &L_A=\left(\frac{L_l}{E(N+2)}\right)_{N\to\infty}= \\ &=-\frac{2A_{-2}A_{-1}+2A_1A_{-1}+2A_2A_1}{(A_{-2}^2+A_{-1}^2+A_1^2+A_2^2)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Тогда можно найти необходимые условия на экстремум:

$$\begin{cases} 2A_{-1}(A_{-2}^2+A_{-1}^2+A_1^2+A_2^2)- \\ -2(A_{-2}A_{-1}+A_{-1}A_1+A_1A_2)2A_{-2}=0, \\ 2(A_{-2}+A_1)(A_{-2}^2+A_{-1}^2+A_1^2+A_2^2)- \\ -2(A_{-2}A_{-1}+A_{-1}A_1+A_1A_2)2A_{-1}=0, \\ 2(A_{-1}+A_2)(A_{-2}^2+A_{-1}^2+A_1^2+A_2^2)- \\ -2(A_{-2}A_{-1}+A_{-1}A_1+A_1A_2)2A_1=0, \\ 2A_1(A_{-2}^2+A_{-1}^2+A_1^2+A_2^2)- \\ -2(A_{-2}A_{-1}+A_{-1}A_1+A_1A_2)2A_2=0. \end{cases} \quad (24)$$

Из (24) легко получить:

$$\begin{aligned} &A_1=A_{-1},A_2=A_{-2},A_1^2-A_1A_2-A_2^2=0, \\ &A_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}A_2. \end{aligned} \quad (25)$$

Соответственно, экстремальная величина модуля L_A будет той же, что и для (14), т.е. равна величине «золотого сечения».

Заключение

В работе рассмотрено асимптотическое поведение ОУМ для светового поля как суперпозиции мод Эрмита–Гаусса. Получены аналитические выражения, описывающие асимптотическое поведение орбитального углового момента такого поля. Найдены максимальные значения модуля ОУМ для суперпозиции из трёх и четырёх мод Эрмита–Гаусса. Для таких суперпозиций получено, что у них, в отличие от суперпозиции из двух мод, модуль удельного ОУМ может существенно превышать значение максимального индекса в суперпозиции при сохранении структурной устойчивости самого светового поля.

Благодарности

Выражаю благодарность профессору В.В. Котляру за ценное обсуждение работы, А.М. Майоровой и Е.А. Соколовой за помощь в оформлении статьи.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ и частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-02-01055 А) и Министерства образования и науки РФ.

Литература

1. **Джексон, Дж.** Классическая электродинамика / Дж. Джексон; пер. с англ. – М.: Мир, 1965. – 703 с.
2. **Allen, L.** Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian modes / L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J. Spreeuw, J.P. Woerdman // Physical Review A. – 1992. – Vol. 45. – P. 8185-8189.
3. **Yao, A.** Orbital angular momentum: origins, behavior and applications / A.M. Yao, M.J. Padgett // Advances in Optics and Photonics. – 2011. – Vol. 3. – P. 161-204.
4. **Котляр, В.В**. Вихревые лазерные пучки / В.В. Котляр и А.А. Ковалёв. – Самара: Новая техника, 2012. – 248 с.

5. **Абрамочкин, Е.Г.** К вопросу о двумерной фазовой проблеме в оптике в приближении Френеля / Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников, А.Н. Малов. – М., 1987. – 14 с. – Деп. в ВИНИТИ Рос. акад. наук 18.05.87, N 3773-В87.
6. **Abramochkin, E**. Beam transformations and nontransformed beams / E. Abramochkin, V. Volostnikov // Optics Communications. – 1991. – Vol. 83(1-2). – P. 123-135.
7. **Абрамочкин, Е.Г.** Современная оптика гауссовых пучков / Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников. – М.: Физматлит, 2010. – 185 с.
8. **Волостников, В.Г.** Методы анализа и синтеза когерентных световых полей / В.Г. Волостников. – М.: Физматлит, 2014. – 256 с.
9. **Kotlyar, V.V.** Hermite-Gaussian modal laser beams with orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // Journal of the Optical Society of America A. – 2014. – Vol. 31, Issue 2. – P. 274-282.
10. **Волостников, В.Г.** Орбитальный угловой момент светового поля как суперпозиции мод Эрмита-Гаусса/ В.Г. Волостников // Компьютерная оптика. – 2015. – Т. 39, № 4. – С. 459-461. – DOI: 10.18287/0134-2452-2015-39-4-459-461.

Сведения об авторе

Волостников Владимир Геннадьевич, 1951 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник СФ ФИАН и по совместительству ведущий научный сотрудник Самарского государственного аэрокосмического университета (СГАУ). Область научных интересов: фазовая проблема в оптике, оптика Гауссовых пучков, сингулярная оптика, оптические вихри.

Поступила в редакцию 26 февраля 2016 г. Окончательный вариант – 20 апреля 2016 г.

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF ANGULAR MOMENTUM OF THE LIGHT FIELD AS A SUPERPOSITION OF HERMITE-GAUSSIAN MODES

V.G.Volostnikov [1,2]

[1] Lebedev Physical Institute, Samara, Russia,

[2] Samara State Aerospace University, Samara, Russia

Abstract

An asymptotic behavior of orbital angular momentum (OAM) for the light field as superposition of Hermite-Gaussian modes is considered. An analytical formula for the OAM of such fields is obtained. For a three- and four mode superposition it was found that their OAM can be larger than the maximum index in the superposition while the structural stability of the light field is retained.

Keywords: coherent optics, spiral beams, orbital angular momentum.

Citation: Volostnikov VG. Asymptotic behavior of angular momentum of the light field as a superposition of Hermite-Gaussian modes. Computer Optics 2016; 40(2): 147-51. – DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-2-147-151.

Acknowlegments: I wish to thank Professor V. Kotlyar for the useful discussion of the work, A. Maiorova and E. Sokolova for their help in preparing the manuscript. The work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and partly supported by RFBR (project No. 16-02-01055 A) the Ministry of Education and Science of the Russian Federation.

References

[1] Jackson J. The classical electrodynamics [In Russian]. Moscow: Mir Publiser; 1965.

[2] Allen L, Beijersbergen MW, Spreeuw RJ, Woerdman JP. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian modes. Physical Review A 1992; 45: 8185-8189. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.

[3] Yao A, Padgett MJ. Orbital angular momentum: origins, behavior and applications. Adv Opt Photon 2011; 3: 161-204. DOI: 10.1364/AOP.3.000161.

[4] Kotlyar VV, Kovalev AA. Vortex Laser Beams [In Russian]. Samara: Novaya Technika; 2012.

[5] Abramochkin E, Volostnikov V, Malov A. About two-dimension phase retrieval problem in Fresnel approximation. [In Russian]. Moscow; 1987. Deposited in VINITI 18.05.87, Number 3773-B87-14.

[6] Abramochkin E, Volostnikov V. Beam transformations and nontransformed beams. Optics Communications 1991; 83(1-2): 123-135. DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.

[7] Abramochkin EG, Volostnikov VG. The modern optics of the Gaussian beams [In Russian]. Moscow: Fizmatlit Publisher; 2010.

[8] Volostnikov VG. The methods of analysis and synthesis of coherent light fields [In Russian]. Moscow: Fizmatlit Publisher; 2014.

[9] Kotlyar VV, Kovalev AA. Hermite-Gaussian modal laser beams with orbital angular momentum. JOSA A. 2014; 31(2): 274-281. DOI: 10.1364/JOSA A.31.000274.

[10] Volostnikov VG. Orbital angular momentum of light field as the superposition of Hermite-Gaussian modes. Computer Optics 2015: 39(4), 459-461. DOI: 10.18287/0134-2452-2015-39-4-459-4618.

Authors' information

Vladimir Gennadievich Volostnikov (b. 1951), Phys.-math. Doctor, professor, chief researcher in Samara Branch FIAS and leading researcher in Samara State Aerospace University. The area of scientific interest: phase retrieval in optics, Gaussian beam optics, singular optics, optical vortices.

Received February 26, 2015. The final version – April 20, 2016.