

ДИФРАКЦИОННАЯ ОПТИКА, ОПТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

ПУЧКИ ЛАГЕРРА–ГАУССА С КОМПЛЕКСНЫМ СМЕЩЕНИЕМ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

А.А. Ковалёв^{1,2}, В.В. Котляр^{1,2}, С.Г. Засканов², Д.С. Калинкина^{1,2}

¹ Институт систем обработки изображений РАН, Самара, Россия,

² Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ), Самара, Россия

Аннотация

Рассмотрено обобщение семейства лазерных мод Лагерра–Гаусса с асимметричным распределением интенсивности. При распространении асимметричного пучка Лагерра–Гаусса в однородном пространстве уменьшается асимметрия главного (центрального) светового кольца и повышается контраст остальных колец. Число световых колец совпадает с числом колец стандартной (симметричной) моды Лагерра–Гаусса. С помощью разложения в угловой спектр плоских волн аналитически рассчитана мощность асимметричных пучков Лагерра–Гаусса и проекция их орбитального углового момента на оптическую ось. Установлено, что нормированный орбитальный угловой момент (орбитальный угловой момент на фотон) полностью определяется топологическим зарядом и отношением смещений к радиусу перетяжки Гауссова пучка. Получены условия, при которых нормированный орбитальный угловой момент совпадает с топологическим зарядом (как у оптических вихрей).

Ключевые слова: теория дифракции, оптические вихри, распространение в пространстве, мода Лагерра–Гаусса, орбитальный угловой момент, мощность, комплексное смещение.

Цитирование: Ковалёв, А.А. Пучки Лагерра–Гаусса с комплексным смещением в декартовых координатах / А.А. Ковалёв, В.В. Котляр, С.Г. Засканов, Д.С. Калинкина // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40, № 1. – С. 5–11. – DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-1-5-11.

Введение

Моды Лагерра–Гаусса (ЛГ) составляют класс хорошо изученных оптических полей. Форма поперечного сечения интенсивности этих полей инвариантна к распространению в однородной среде и обладает радиальной симметрией. Моды ЛГ нашли применение в таких областях, как оптическое манипулирование микрообъектами, квантовая оптика, оптические коммуникации. Каждая мода из этого класса характеризуется двумя индексами – радиальным и азимутальным, задающим орбитальный угловой момент (ОУМ).

Несмотря на давнюю известность и большой объём проведённых исследований в отношении мод ЛГ, до сих пор появляются публикации по изучению их свойств [1–5], их формированию [6] и применению [7–9].

Так, в [1] рассматривается распространение композитных вихревых пучков, представляющих собой соосную суперпозицию мод ЛГ с совпадающими положением и размером перетяжки. Были сформированы поля, состоящие из эквидистантных массивов одиночных или парных теневых пятен, расположенных на световых кольцах. В [2] исследуется физический смысл радиального индекса мод ЛГ, а в [3] – пространственное распределение интенсивности острогофокусированного пучка ЛГ в зависимости от состояния однородной (линейной и круговой) поляризации и топологического заряда. Показано, что наибольшее влияние состояние поляризации оказывает на продольную компоненту электрического вектора светового поля, а наибольшее визуальное различие в картине общей интенсивности в зависимости от поляризации наблюдается при использовании вихревой фазы первого порядка. В [4] исследуется непараксиальное распространение мод ЛГ в присут-

ствии апертуры. Установлено, что дифракция на апертуре вызывает существенное искажение поля в ближней зоне, однако она незначительно влияет на распределение интенсивности в дальней зоне (если только апертура не закрывает существенную часть пучка). В [5] рассматриваются свойства световых полей, обладающих ОУМ и не имеющих радиальной симметрии, в присутствии гармонического потенциала. В [6] предлагается метод формирования мод ЛГ в резонаторе твёрдотельного лазера. В [7] показано, что при использовании моды ЛГ вместо обычного Гауссова пучка уменьшается доплеровская ширина линии в спектре поглощения атомов рубидия-85 и рубидия-87, а в [8] рассматривается применение мод ЛГ для уменьшения влияния теплового шума в детекторах гравитационных волн. В [9] исследуется использование мод ЛГ для организации спин-орбитального взаимодействия в ультрахолодных атомах.

Из приведённого выше обзора новейшей литературы о модах ЛГ видно, что они не только находят новые прикладные применения, но и являются основой для построения новых видов световых полей, которые пока только изучаются теоретически. Наряду с исследованием различных суперпозиций известных лазерных пучков, новые их виды можно получать простым смещением комплексной амплитуды в декартовых координатах на комплексные расстояния. Так, например, выражение для поля точечного источника с мнимой координатой сводится к параксиальному Гауссову пучку в том случае, когда мнимое расстояние от источника до вещественного пространства во много раз превосходит длину волны света [10]. Аналогичным образом могут быть получены асимметричные бездифракционные моды Бесселя, распре-

деление интенсивности которых в поперечной плоскости имеет вид световой дуги (полумесяца), а не набора световых колец [11].

В данной работе, также пользуясь приёмом комплексного смещения в декартовых координатах, теоретически и численно исследуются асимметричные пучки Лагерра–Гаусса. Подобно стандартным модам ЛГ, их распределение интенсивности в поперечной плоскости состоит из конечного (в отличие от мод Бесселя) числа световых колец, но распределение на кольцах неравномерное, причём при распространении в однородной среде возрастает яркость на периферийном кольце. Аналитически рассчитан ОУМ и мощность асимметричного пучка ЛГ. Такие пучки могут быть сформированы из пучков Гаусса с помощью пространственного модулятора света [12] и применяться для создания новых видов оптических ловушек для перемещения микрочастиц по искривлённым траекториям.

1. Асимметричные параксиальные пучки Лагерра–Гаусса

Комплексная амплитуда стандартного пучка Лагерра–Гаусса в начальной плоскости в полярных координатах имеет вид [13]:

$$E(r, \varphi, z = 0) = \left(\frac{\sqrt{2}r}{w}\right)^n \times L_m^n\left(\frac{2r^2}{w^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + in\varphi\right), \tag{1}$$

где (r, φ, z) – цилиндрические координаты, w – радиус перетяжки Гауссова пучка, n – топологический заряд оптического вихря, $L_m^n(x)$ – присоединённый многочлен Лагерра.

Если сместить пучок на расстояние x_0 вдоль координаты x и на расстояние y_0 вдоль координаты y (смещения x_0 и y_0 могут быть комплексными величинами), то в декартовых координатах амплитуда пучка равна:

$$E(x, y, z = 0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{w}\right)^n \times \left[(x - x_0) + i(y - y_0)\right]^n \exp\left(-\frac{\rho^2}{w^2}\right) L_m^n\left(\frac{2\rho^2}{w^2}\right), \tag{2}$$

где $\rho^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$.

При распространении в свободном пространстве на произвольном расстоянии z комплексная амплитуда такого светового пучка примет вид:

$$E(x, y, z) = \frac{w(0)}{w(z)} \left[\frac{\sqrt{2}}{w(z)}\right]^n \times \left[(x - x_0) + i(y - y_0)\right]^n L_m^n\left[\frac{2\rho^2}{w^2(z)}\right] \times \exp\left[-\frac{\rho^2}{w^2(z)} + \frac{ik\rho^2}{2R(z)} - i(n + 2m + 1)\zeta(z)\right], \tag{3}$$

где

$$w(z) = w\sqrt{1 + (z/z_R)^2}, \tag{4}$$

$$R(z) = z\left[1 + (z_R/z)^2\right],$$

$$\zeta(z) = \arctan(z/z_R),$$

$z_R = kw^2/2$ – расстояние Рэлея, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число света с длиной волны λ .

Если смещения x_0 и y_0 не являются действительными величинами, то величины ρ^2 , $w(z)$, $R(z)$ уже не имеют того физического смысла, что при вещественных смещениях x_0 и y_0 , т.е. это не расстояние до оптической оси, не ширина пучка и не радиус кривизны волнового фронта. Кроме того, в отличие от стандартных мод Лагерра–Гаусса, в поперечном сечении интенсивность такого пучка не имеет радиальной симметрии. На рис. 1 приведены результаты расчёта поперечной интенсивности пучка (3) в разных плоскостях при следующих значениях параметров: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w = 2\lambda$, индекс пучка $(m, n) = (8, 7)$, поперечные смещения $x_0 = 0, y_0 = 0,2\lambda i$, расстояния вдоль оптической оси равны $z = 0\lambda$ (рис. 1а), 12λ (рис. 1б), 20λ (рис. 1в), 40λ (рис. 1г), 60λ (рис. 1д), 80λ (рис. 1е).

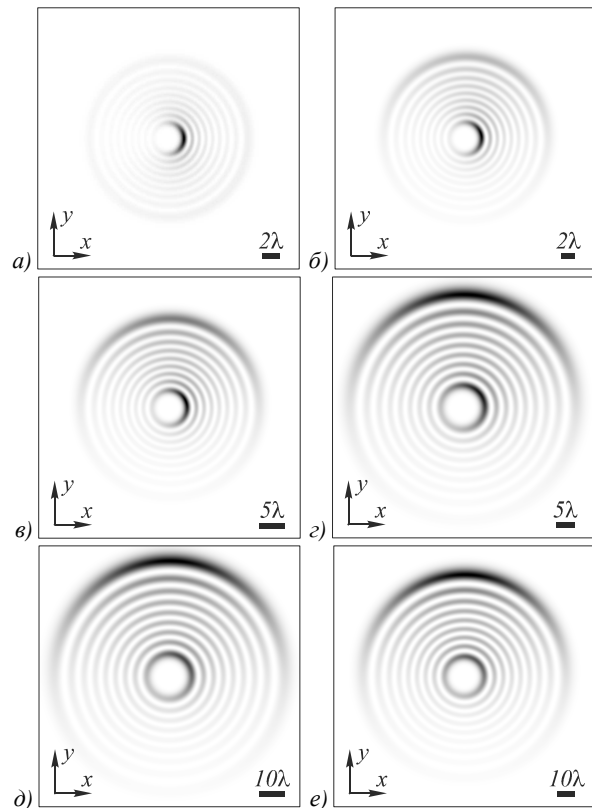


Рис. 1. Поперечное распределение интенсивности асимметричного пучка ЛГ в разных плоскостях при следующих значениях параметров: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w = 2\lambda$, индекс пучка $(m, n) = (8, 7)$, поперечные смещения $x_0 = 0, y_0 = 0,2\lambda i$, расстояния вдоль оптической оси равны $z = 0\lambda$ (а), 12λ (б), 20λ (в), 40λ (г), 60λ (д), 80λ (е)

Размер расчётной области равен $2R$, где $R = 15\lambda$ (рис. 1а), 20λ (рис. 1б), 25λ (рис. 1в), 35λ (рис. 1г), 50λ

(рис. 1d), 75λ (рис. 1e). Расстояние Рэлея при заданных параметрах равно $z_R = kw^2/2 = 4\pi\lambda$.

Из рис. 1 видно, что при распространении асимметричного пучка ЛГ уменьшается асимметрия главного (центрального) светового кольца и повышается контраст остальных колец. Число световых колец совпадает с числом колец стандартной (симметричной) моды ЛГ.

2. Мощность смещённого пучка Лагерра-Гаусса

Мощность произвольного парааксиального светового пучка может быть вычислена как через комплексную амплитуду E , так и через угловой спектр плоских волн A :

$$W = \iint_{\mathbb{R}^2} E^* E dx dy = \lambda^2 \iint_{\mathbb{R}^2} A^* A d\alpha d\beta, \tag{5}$$

где

$$A(\alpha, \beta) = \lambda^{-2} \iint_{\mathbb{R}^2} E(x, y, 0) \exp[-ik(\alpha x + \beta y)] dx dy. \tag{6}$$

Для смещённого пучка Лагерра-Гаусса удобнее рассчитывать мощность в спектральной плоскости. Получим сначала выражение для углового спектра плоских волн несмещённого пучка:

$$A(\rho, \theta) = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{w}\right)^n \int_0^\infty r^n \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) L_m^n\left(\frac{2r^2}{w^2}\right) \times \left\{ \int_0^{2\pi} \exp[in\phi - ikpr \cos(\phi - \theta)] d\phi \right\} r dr = (-i)^n \frac{k^2}{2\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{w}\right)^n \exp(in\theta) \times \int_0^\infty r^{n+1} \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) L_m^n\left(\frac{2r^2}{w^2}\right) J_n(kpr) dr. \tag{7}$$

Известен справочный интеграл ([14], выражение 7.421.4):

$$\int_0^\infty x^{v+1} \exp(-\beta x^2) L_n^v(\alpha x^2) J_\nu(xy) dx = \frac{(\beta - \alpha)^n}{2^{v+1} \beta^{v+n+1}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\beta}\right) L_n^v\left[\frac{\alpha y^2}{4\beta(\alpha - \beta)}\right]. \tag{8}$$

Используя его, получим выражение для углового спектра плоских волн пучка Лагерра-Гаусса:

$$A(\rho, \theta) = C_0 \rho^n \exp\left[-\frac{(k\rho)^2}{4} + in\theta\right] L_m^n\left[\frac{(k\rho)^2}{2}\right], \tag{9}$$

где

$$C_0 = (-i)^n (-1)^m \frac{(kw)^{n+2}}{2^{2+n/2} \pi}. \tag{10}$$

Для пучка (2), смещённого на расстояния x_0 и y_0 вдоль координат x и y , выражение для углового спектра плоских волн имеет вид:

$$A(\rho, \theta) = C_0 \rho^n \exp\left[-(k\rho)^2/4 + in\theta\right] \times L_m^n\left[\frac{(k\rho)^2}{2}\right] \exp[-ik\rho(x_0 \cos\theta + y_0 \sin\theta)]. \tag{11}$$

Подставив это выражение в (5), найдём мощность пучка:

$$W = 2\pi\lambda^2 |C_0|^2 \int_0^\infty \rho^{2n+1} \exp\left[-\frac{(k\rho)^2}{2}\right] \times \left\{ L_m^n\left[\frac{(k\rho)^2}{2}\right] \right\}^2 J_0(kQ\rho) d\rho, \tag{12}$$

где

$$Q = \left[(x_0^* - x_0)^2 + (y_0^* - y_0)^2 \right]^{1/2} = 2i\sqrt{(\text{Im } x_0)^2 + (\text{Im } y_0)^2}. \tag{13}$$

Интеграл в (12) вычисляется с помощью справочного интеграла ([14], выражение 7.422.2):

$$\int_0^\infty x^{v+1} e^{-\alpha x^2} L_p^{v-\sigma}(\alpha x^2) L_q^\sigma(\alpha x^2) J_\nu(xy) dx = (-1)^{p+q} (2\alpha)^{-v-1} y^v e^{\frac{y^2}{4\alpha}} \times L_p^{\sigma+q-p}\left(\frac{y^2}{4\alpha}\right) L_q^{v-\sigma+p-q}\left(\frac{y^2}{4\alpha}\right), \tag{14}$$

где $y > 0$, $\text{Re } \alpha > 0$, $\text{Re } v > -1$. Сделаем в (14) следующие замены: $v \rightarrow 0$, $q \rightarrow m$, $\sigma \rightarrow n$, $p \rightarrow m+n$. Тогда (14) примет вид:

$$\int_0^\infty x e^{-\alpha x^2} L_{m+n}^{-n}(\alpha x^2) L_m^n(\alpha x^2) J_0(xy) dx = (-1)^n (2\alpha)^{-1} e^{-\frac{y^2}{4\alpha}} L_{m+n}^0\left(\frac{y^2}{4\alpha}\right) L_m^0\left(\frac{y^2}{4\alpha}\right).$$

С учётом тождества

$$L_\mu^{-\sigma}(x) \equiv [(\mu - \sigma)!/\mu!] (-x)^\sigma L_{\mu-\sigma}^\sigma(x)$$

этот интеграл преобразуется в интеграл из выражения (12):

$$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-\alpha x^2} \left[L_m^n(\alpha x^2) \right]^2 J_0(xy) dx = \frac{(m+n)!}{2\alpha^{n+1} m!} e^{-\frac{y^2}{4\alpha}} L_{m+n}^0\left(\frac{y^2}{4\alpha}\right) L_m^0\left(\frac{y^2}{4\alpha}\right).$$

Заменяя $\alpha = (kw)^2/2$, $y = kQ$, и подставляя этот интеграл в (12), получим окончательное выражение для мощности пучка:

$$W = \frac{(m+n)!}{m!} \frac{\pi w^2}{2} \times \exp\left(-\frac{Q^2}{2w^2}\right) L_{m+n}\left(\frac{Q^2}{2w^2}\right) L_m\left(\frac{Q^2}{2w^2}\right), \tag{15}$$

где $L_m(\xi) = L_m^0(\xi)$.

Несмотря на пропорциональность мощности пучка многочленам Лагерра, мощность не может оказаться отрицательной или равной нулю. Это следует из того, что параметр Q^2 всегда не положителен, а многочлены Лагерра в области неположительных значений всегда положительны:

$$L_m(-\xi) = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{k!} C_m^k (-\xi)^k = \sum_{k=0}^m C_m^k \frac{\xi^k}{k!} = 1 + \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} C_m^k \frac{\xi^k}{k!}}_{\geq 0} \geq 1, \tag{16}$$

где $C_m^k = m!/[k!(m-k)!]$ – биномиальные коэффициенты. В частном случае при смещении пучка на вещественные расстояния параметр Q становится равным нулю и мощность принимает значение $[\pi w^2/2][(m+n)!/m!]$, совпадающее с выражением из [13] с точностью до константы.

3. Орбитальный угловой момент смещённого пучка Лагерра–Гаусса

Получим теперь выражение для проекции орбитального углового момента смещённого пучка Лагерра–Гаусса на оптическую ось (остальные проекции для параксиальных пучков равны нулю). Это также удобно сделать через угловой спектр плоских волн:

$$J_z = -i\lambda^2 \iint_{\mathbb{R}^2} A^* \frac{\partial A}{\partial \theta} \rho \, d\rho \, d\theta. \tag{17}$$

Подставив (11) в (17), получим:

$$J_z = -i\lambda^2 |C_0|^2 \times \iint_{\mathbb{R}^2} \rho^{2n} \exp\left[-\frac{(k\rho)^2}{2}\right] \left\{ L_m^n \left[\frac{(k\rho)^2}{2} \right] \right\}^2 \times \exp\left[-in\theta + ik\rho(x_0^* \cos\theta + y_0^* \sin\theta)\right] \times \left[in + ik\rho(x_0 \sin\theta - y_0 \cos\theta) \right] \times \exp\left[in\theta - ik\rho(x_0 \cos\theta + y_0 \sin\theta)\right] \rho \, d\rho \, d\theta. \tag{18}$$

Выделим отдельно слагаемое, пропорциональное мощности:

$$J_z = nW + k\lambda^2 |C_0|^2 \times \int_0^\infty \rho^{2n+2} \exp\left[-\frac{(k\rho)^2}{2}\right] \left\{ L_m^n \left[\frac{(k\rho)^2}{2} \right] \right\}^2 \, d\rho \times \int_0^{2\pi} (x_0 \sin\theta - y_0 \cos\theta) \times \exp\left\{2k\rho[(\text{Im } x_0) \cos\theta + (\text{Im } y_0) \sin\theta]\right\} \, d\theta. \tag{19}$$

Внутренний интеграл выражается через функции Бесселя [12]. Тогда (19) примет вид:

$$J_z = nW - 2\pi k\lambda^2 |C_0|^2 \times \int_0^\infty \rho^{2n+2} \exp\left[-\frac{(k\rho)^2}{2}\right] \left\{ L_m^n \left[\frac{(k\rho)^2}{2} \right] \right\}^2 \times \left\{ (ix_0 + y_0) \left[\frac{(\text{Im } x_0) - (\text{Im } y_0)}{Q} \right] + (ix_0 - y_0) \left[\frac{(\text{Im } x_0) - (\text{Im } y_0)}{Q} \right]^{-1} \right\} \times J_1(kQ\rho) \, d\rho = nW + 8\pi^2 \lambda |C_0|^2 \frac{\text{Im}(x_0^* y_0)}{Q} \times \int_0^\infty \rho^{2n+2} \exp\left[-\frac{(k\rho)^2}{2}\right] \times \left\{ L_m^n \left[\frac{(k\rho)^2}{2} \right] \right\}^2 J_1(kQ\rho) \, d\rho. \tag{20}$$

Этот интеграл можно вычислить, как и интеграл для мощности пучка, если представить его как производную по Q :

$$J_z = nW - 8\pi^2 \lambda |C_0|^2 \frac{\text{Im}(x_0^* y_0)}{kQ} \times \frac{\partial}{\partial Q} \left(\int_0^\infty \rho^{2n+1} \exp\left[-\frac{(k\rho)^2}{2}\right] \times \left\{ L_m^n \left[\frac{(k\rho)^2}{2} \right] \right\}^2 J_0(kQ\rho) \, d\rho \right). \tag{21}$$

Внутренний интеграл является берущимся и совпадает с интегралом для расчёта мощности:

$$J_z = nW - 8\pi^2 \lambda |C_0|^2 \frac{\text{Im}(x_0^* y_0)}{kQ} \times \frac{\partial}{\partial Q} \left\{ \frac{1}{2[(kw)^2/2]^{n+1}} \frac{(m+n)!}{m!} \exp\left(-\frac{Q^2}{2w^2}\right) \times L_{m+n}\left(\frac{Q^2}{2w^2}\right) L_m\left(\frac{Q^2}{2w^2}\right) \right\} = nW - \frac{2^{n+3} \pi^2 \lambda |C_0|^2 (m+n)!}{k^{2n+3} w^{2n+2} Q} \frac{\text{Im}(x_0^* y_0)}{m!} \times \frac{\partial}{\partial Q} \left\{ \exp\left(-\frac{Q^2}{2w^2}\right) L_{m+n}\left(\frac{Q^2}{2w^2}\right) L_m\left(\frac{Q^2}{2w^2}\right) \right\}. \tag{22}$$

Вычисляя производную, получим:

$$J_z = nW + \frac{2\text{Im}(x_0^*y_0)}{w^2} \times \left[\frac{L_m^1 \left(\frac{Q^2}{2w^2} \right) + L_{m+n}^1 \left(\frac{Q^2}{2w^2} \right)}{L_m \left(\frac{Q^2}{2w^2} \right) + L_{m+n} \left(\frac{Q^2}{2w^2} \right)} - 1 \right] W. \quad (23)$$

Из (23) видно, что нормированный ОУМ (ОУМ на один фотон) не зависит от длины волны, а полностью определяется отношением смещений к радиусу перетяжки, т.е. величинами x_0/w и y_0/w .

Можно показать, что увеличение или уменьшение нормированного ОУМ полностью определяется знаком величины $\text{Im}(x_0^*y_0)$, так как выражение в квадратных скобках всегда больше или равно 1.

Кроме того, из (23) следует, что при $x_0^*y_0 \in \mathbb{R}$ нормированный ОУМ совпадает с топологическим зарядом n , как в случае радиально-симметричных оптических вихрей, хотя форма пучка не обладает радиальной симметрией. Так, на рис. 2 показаны распределения интенсивности в плоскости $z=0$ для асимметричных пучков ЛГ при следующих параметрах: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w = 2\lambda$, индекс пучка $(m, n) = (3, 5)$, поперечные смещения $x_0 = y_0 = 0,01wi$ (рис. 2а), $x_0 = y_0 = 0,05wi$ (рис. 2б), $x_0 = y_0 = 0,1wi$ (рис. 2в), $x_0 = y_0 = 0,2wi$ (рис. 2з), $x_0 = y_0 = 0,5wi$ (рис. 2д), $x_0 = y_0 = 2wi$ (рис. 2е).

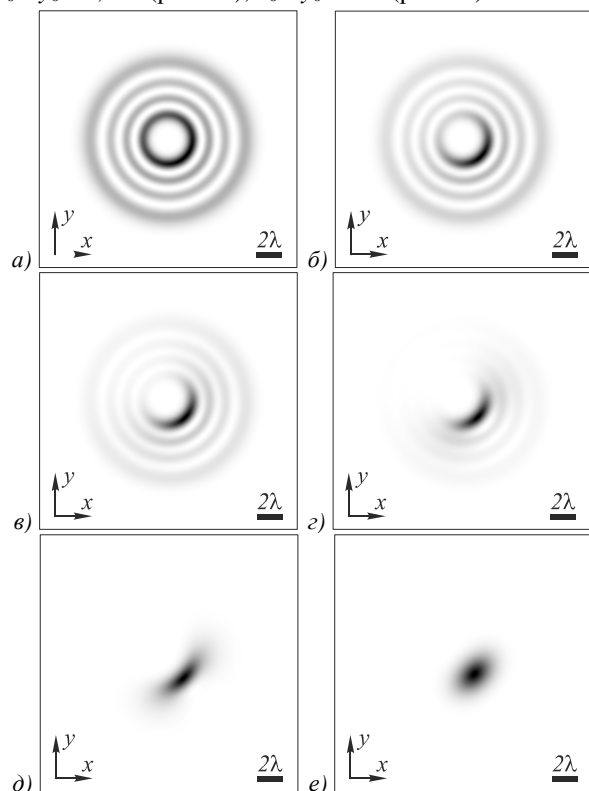


Рис. 2. Распределения интенсивности в плоскости $z=0$ для асимметричных пучков ЛГ при следующих параметрах: длина волны $\lambda = 532$ нм, радиус перетяжки $w = 2\lambda$, индекс пучка $(m, n) = (3, 5)$, поперечные смещения $x_0 = y_0 = 0,01wi$ (а), $x_0 = y_0 = 0,05wi$ (б), $x_0 = y_0 = 0,1wi$ (в), $x_0 = y_0 = 0,2wi$ (з), $x_0 = y_0 = 0,5wi$ (д), $x_0 = y_0 = 2wi$ (е)

Размер расчётной области равен $2R$, где $R = 10\lambda$. Согласно (23), ОУМ всех пучков на рис. 2 должен быть равен 5. При расчёте он оказался равен 4,999 (рис. 2а–з) и 4,998 (рис. 2д, е).

Из рис. 2 видно, что все эти пучки имеют разный вид – почти радиально симметричные световые кольца (рис. 2а), световая дуга (полумесяц), окружённая периферийными кольцами, (рис. 2б и 2в), полумесяц с разорванными периферийными кольцами (рис. 2з), полумесяц без периферийных колец (рис. 2д), эллиптическое световое пятно (рис. 2е). Однако, несмотря на разный вид, ОУМ всех этих пучков одинаков.

Заключение

В данной работе рассмотрено обобщение семейства лазерных мод Лагерра-Гаусса. Обобщённые пучки не обладают модовыми свойствами и имеют асимметричное распределение интенсивности в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. При распространении асимметричного пучка ЛГ в однородном пространстве уменьшается асимметрия главного (центрального) светового кольца и повышается контраст остальных колец. Число световых колец совпадает с числом колец стандартной (симметричной) моды ЛГ. Аналитически рассчитана мощность асимметричных пучков ЛГ и проекция их ОУМ на оптическую ось. Установлено, что нормированный ОУМ (ОУМ на фотон) полностью определяется топологическим зарядом и отношением смещений к радиусу перетяжки Гауссова пучка. Получены условия, при которых нормированный ОУМ совпадает с топологическим зарядом (как у оптических вихрей).

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-9498.2016.9), а также грантов РФФИ 14-29-07133, 15-07-01174, 15-37-20723, и 15-47-02492.

Литература

1. **Huang, S.** Composite vortex beams by coaxial superposition of Laguerre-Gaussian beams / S. Huang, Z. Miao, C. He, F. Pang, Y. Li, T. Wang // Optics and Lasers in Engineering. – 2016. – Vol. 78. – P. 132-139.
2. **Plick, W.N.** Physical meaning of the radial index of Laguerre-Gauss beams / W.N. Plick, M. Krenn // Physical Review A. – 2015. – Vol. 92(6). – 063841.
3. **Савельев, Д.А.** Особенности острой фокусировки вихревых пучков Гаусса-Лагерра / Д.А. Савельев, С.Н. Хонина // Компьютерная оптика. – 2015. – Т. 39. – №. 5. – P. 654-662.
4. **Stilgoe, A.B.** Energy, momentum and propagation of non-paraxial high-order Gaussian beams in the presence of an aperture / A.B. Stilgoe, T.A. Nieminen, H. Rubinsztein-Dunlop // Journal of Optics (United Kingdom). – 2015. – Vol. 17(12). – 125601.
5. **Zhang, Y.** Anharmonic propagation of two-dimensional beams carrying orbital angular momentum in a harmonic potential / Y. Zhang, X. Liu, M. Belić, W. Zhong, F. Wen, Y. Zhang // Optics Letters. – 2015. – Vol. 40. – P. 3786-3789.

6. **Kim, D.J.** High-power TEM₀₀ and Laguerre–Gaussian mode generation in double resonator configuration / D.J. Kim, J.W. Kim // *Applied Physics B*. – 2015. – Vol. 121(3). – P. 401-405.
7. **Das, B.C.** Narrowing of Doppler and hyperfine line shapes of Rb - D₂ transition using a vortex beam / B.C. Das, D. Bhattacharyya, S. De // *Chemical Physics Letters*. – 2016. – Vol. 644. – P. 212-218.
8. **Allocca, A.** Higher-order Laguerre-Gauss interferometry for gravitational-wave detectors with in situ mirror defects compensation / A. Allocca, A. Gatto, M. Tacca, R.A. Day, M. Barsuglia, G. Pillant, C. Buu, G. Vajente // *Physical Review D*. – 2015. – Vol. 92(10). – 102002.
9. **Sun, K.** Spin-orbital-angular-momentum coupling in Bose-Einstein condensates / K. Sun, C. Qu, C. Zhang // *Physical Review A*. – 2015. – Vol. 91(6). – 063627.
10. **Kravtsov, Yu.A.** Complex ray and complex caustics / Yu.A. Kravtsov // *Radiophysics and Quantum Electronics*. – 1967. – Vol. 10. – P. 719–730.
11. **Kotlyar, V.V.** Asymmetric Bessel modes / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // *Optics Letters*. – 2014. – Vol. 39(8). – P. 2395–2398.
12. **Kovalev, A.A.** Shifted nondiffractive Bessel beams / A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar, A.P. Porfirev // *Physical Review A*. – 2015. – Vol. 91(5). – 053840.
13. **Kim, H.C.** Hermite–Gaussian and Laguerre–Gaussian beams beyond the paraxial approximation / H.C. Kim, Y.H. Lee // *Optics Communications*. – 1999. – Vol. 169. – P. 9-16.
14. **Gradshteyn, I.S.** Table of Integrals, Series, and Products / I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik – New York: Academic, 1965.

Сведения об авторах

Ковалёв Алексей Андреевич, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений ИСОИ РАН. В списке научных работ более 80 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, сингулярная оптика, фотонно-кристаллические устройства. E-mail: alanko@smr.ru.

Котляр Виктор Викторович, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений ИСОИ РАН и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского государственного аэрокосмического университета (СГАУ). В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств.

Засканов Станислав Германович, 1990 года рождения. В 2013 году получил степень магистра в Самарском государственном аэрокосмическом университете имени академика С.П. Королёва – СГАУ по специальности «Прикладные математика и физика». Обучается в аспирантуре на кафедре технической кибернетики СГАУ. Область научных интересов: обработка изображений, распознавание образов, рентгеновская оптика, нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. E-mail: icekilla@yandex.ru.

Калинкина Дарья Сергеевна, 1988 года рождения, в 2011 году с отличием окончила Самарский государственный технический университет – СамГТУ, нефтетехнологический факультет. Аспирант кафедры технической кибернетики СГАУ. Работает в ОАО НИИ «Гипровостокнефть». Область научных интересов: дифференциальные уравнения, интегральное исчисление, математическая физика. E-mail: dskalinkina@gmail.com.

*Поступила в редакцию 22 января 2016 г.
Окончательный вариант – 9 февраля 2016 г.*

LAGUERRE-GAUSSIAN BEAMS WITH COMPLEX SHIFT IN CARTESIAN COORDINATES

A.A. Kovalev^{1,2}, V.V. Kotlyar^{1,2}, S.G. Zaskanov², D.S. Kalinkina^{1,2}

¹ Image Processing Systems Institute, Russian Academy of Sciences, Samara, Russia,

² Samara State Aerospace University, Samara, Russia

Abstract

We studied a generalization of the family of Laguerre-Gaussian (LG) laser modes with asymmetrical intensity distribution. As the asymmetrical LG beam is propagating in a homogeneous medium, the asymmetry of its main (central) bright ring reduces, while the contrast of the rest rings increases. The number of bright rings coincides with that of a standard (symmetrical) LG mode. Using the expansion of the complex amplitude into the angular spectrum of plane waves, we calculated analytically the power of the asymmetrical LG beams and projection of their orbital angular momentum (OAM) on the optical axis. It is found that the normalized OAM (OAM per

photon) is completely determined by the topological charge and the ratios between the shifts and the waist radius. We also found the conditions under which the normalized OAM coincides with the topological charge (as is the case for the optical vortices).

Keywords: diffraction theory, optical vortices, propagation, Laguerre-Gaussian mode, orbital angular momentum, beam power, complex shift.

Citation: Kovalev AA, Kotlyar VV, Zaskanov SG, Kalinkina DS. Laguerre-Gaussian beams with complex shift in Cartesian coordinates. *Computer Optics* 2016; 40(1): 5-11. DOI: 10.18287/2412-6179-2015-40-1-5-11.

Acknowledgements: The work was partially funded by the Russian Federation Ministry of Education and Science, Presidential grant for support of leading scientific schools (NSh-9498.2016.9) and Russian Foundation of Basic Research Grants (14-29-07133, 15-07-01174, 15-37-20723, и 15-47-02492).

References

- [1] Huang S, Miao Z, He C, Pang F, Li Y, Wang T. Composite vortex beams by coaxial superposition of Laguerre-Gaussian beams. *Optics and Lasers in Engineering* 2016; 78: 132-139.
- [2] Plick WN, Krenn M. Physical meaning of the radial index of Laguerre-Gauss beams. *Physical Review A* 2015; 92(6): 063841.
- [3] Savelyev DA, Khonina SN. Characteristics of sharp focusing of vortex Laguerre-Gaussian beams [In Russian]. *Computer Optics* 2015; 39(5): 654-662.
- [4] Stilgoe AB, Nieminen TA, Rubinsztein-Dunlop H. Energy, momentum and propagation of non-paraxial high-order Gaussian beams in the presence of an aperture. *Journal of Optics (United Kingdom)* 2015; 17(12): 125601.
- [5] Zhang Y, Liu X, Belić M, Zhong W, Wen F, Zhang Y. Anharmonic propagation of two-dimensional beams carrying orbital angular momentum in a harmonic potential. *Optics Letters* 2015; 40: 3786-3789.
- [6] Kim DJ, Kim JW. High-power TEM₀₀ and Laguerre-Gaussian mode generation in double resonator configuration. *Applied Physics B* 2015; 121(3): 401-405.
- [7] Das BC, Bhattacharyya D, De S. Narrowing of Doppler and hyperfine line shapes of Rb - D2 transition using a Vortex beam. *Chemical Physics Letters* 2016; 644: 212-218.
- [8] Allocca A, Gatto A, Tacca M, Day RA, Barsuglia M, Pillant G, Buy C, Vajente G. Higher-order Laguerre-Gauss interferometry for gravitational-wave detectors with in situ mirror defects compensation. *Physical Review D* 2015; 92(10): 102002.
- [9] Sun K, Qu C, Zhang C. Spin-orbital-angular-momentum coupling in Bose-Einstein condensates. *Physical Review A* 2015; 91(6): 063627.
- [10] Kravtsov YuA. Complex ray and complex caustics. *Radiophysics and Quantum Electronics* 1967; 10: 719-730.
- [11] Kotlyar VV, Kovalev AA, Soifer VA. Asymmetric Bessel modes. *Optics Letters* 2014; 39(8): 2395-2398.
- [12] Kovalev AA, Kotlyar VV, Porfirev AP. Shifted nondiffractive Bessel beams. *Physical Review A* 2015; 91(5): 053840.
- [13] Kim HC, Lee YH. Hermite-Gaussian and Laguerre-Gaussian beams beyond the paraxial approximation. *Optics Communications* 1999; 169: 9-16.
- [14] Gradshteyn IS, Ryzhik IM. *Table of Integrals, Series, and Products*. NY: Academic; 1965.

Authors' information

Alexey Andreevich Kovalev (b. 1979), graduated (2002) from the S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (SSAU), majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree (2012). He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences (IPSI RAS), holding a part-time position of assistant at SSAU's Technical Cybernetics sub-department. He is co-author of more than 80 scientific papers. Research interests are mathematical diffraction theory, singular optics, and photonic crystal devices.

Victor Victorovich Kotlyar is a head of Laboratory at Image Processing Systems Institute (Samara) of the Russian Academy of Sciences and professor of Computer Science Department at Samara State Aerospace University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in physics and mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices.

Stanislav Germanovich Zaskanov (b. 1990). Received a master's degree in Samara State Aerospace University (2013) in applied mathematics and physics. He is a post-graduate student at Technical Cybernetics Subdepartment of Samara State Aerospace University. Major fields of research: image processing, pattern recognition, x-ray optics, nanophotonics, diffractive computer optics.

Darya Sergeevna Kalinkina (b. 1988), graduated (2011) from Samara State Technical University, Petroleum Engineering Faculty. She is a postgraduate student of the Department of Technical Cybernetics in SSAU. She is also working at JSC SRI "Giprovostokneft". Research interests are differential equations, integral calculus, mathematical physics.

Received January 22, 2016. The final version – February 9, 2016.