

АНАЛИЗ ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОГО ПУЧКА НА РАССЕЙВАЮЩЕМ ФРАКСИКОНЕ В НЕПАРАКСИАЛЬНОМ РЕЖИМЕ

Устинов А.В., Хонина С.Н.

Институт систем обработки изображений РАН,
Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва
(национальный исследовательский университет)

Аннотация

В работе выполнен теоретический и численный анализ дифракции плоского пучка на рассеивающем фраксиконе в рамках непараксиальной скалярной модели. На основе интегрирования по частям интеграла Рэлея–Зоммерфельда первого типа и применения к нему модифицированного метода стационарной фазы получено удовлетворяющее граничным условиям выражение для комплексного распределения на оптической оси. Результаты, полученные численным интегрированием, показывают хорошее согласование с аналитическими оценками. На численных примерах показано, что рассеивающий фраксикон позволяет формировать протяжённый осевой световой отрезок диаметром порядка длины волны, более длинный и равномерный, чем обеспечивает линейный аксикон.

Ключевые слова: рассеивающий фраксикон, непараксиальный режим, осевой световой отрезок, равномерное осевое распределение интенсивности.

Введение

Сочетание аксикона с линзой, называемое иногда линзаконом [1], позволяет управлять как продольным, так и поперечным распределением лазерных пучков [1–6].

В работах [4–6] в рамках параксиальной модели было показано, что при использовании средств дифракционной оптики тандем «линза + аксикон» можно заменить одним дифракционным элементом (названным *фраксиконом*), фаза которого представима в виде дробной степени от радиальной координаты. Если значение степени меньше единицы, то такой фраксикон в параксиальном приближении является рассеивающим [6] и служит аналогом логарифмического аксикона [7].

Также ранее были рассмотрены [8, 9] рефракционные аналоги таких элементов в рамках геометрической модели. Эти элементы были названы обобщённой линзой, так как при конкретных параметрах можно получить такие классические элементы, как параболическая линза или аксикон.

Исследование фокусирующих свойств обобщённой линзы по сравнению с классическими оптическими элементами является актуальным для различных приложений [10–17], так как позволит заменить набор оптических элементов одним дифракционным элементом.

Кроме того, новый тип оптического элемента позволяет расширить возможности фокусирующих систем. Для управления трёхмерным распределением в фокальной области линзы часто используют дополнительные дифракционные оптические элементы (ДОЭ). Для расчёта комплексной функции пропускания таких ДОЭ используются различные оптимизационные алгоритмы [18]. Хотя оптимизационные процедуры позволяют найти наилучшее по некоторому критерию решение, реализация рассчитанной комплексной функции пропускания на физическом носителе сопряжена с определёнными проблемами, так как оптимально рассчитанные решения могут

быть очень чувствительны к погрешностям изготовления ДОЭ. Поэтому желательно использовать ДОЭ, комплексная функция которого имеет определённый аналитический вид, но позволяет варьировать параметры в широких пределах. Фраксикон является новым типом таких элементов.

Действие оптических элементов в ближней и дальней зоне может очень существенно отличаться. В частности, фраксикон, степень которого меньше единицы, в дальней зоне дифракции является рассеивающим. В ближней зоне дифракции такой оптический элемент, аналогично логарифмическому аксикону [19], обладает фокусирующими свойствами.

В данной работе выполнен теоретический и численный анализ дифракции на фраксиконе, степень которого меньше единицы, в рамках непараксиальной скалярной модели.

Теоретический анализ проведён на основе применения модифицированного метода стационарной фазы к интегралу Рэлея–Зоммерфельда первого типа.

Результаты, полученные численным интегрированием, показывают хорошее согласование с аналитическими оценками.

1. Осевое распределение при дифракции ограниченной плоской волны на фраксиконе в непараксиальном скалярном случае

Непараксиальная скалярная модель, основанная на теории Рэлея–Зоммерфельда [20], позволяет получать корректные результаты на очень близких расстояниях (всего несколько длин волн) от апертуры [21, 22]. Также в работах [23, 24] было показано качественное согласование результатов, полученных с помощью интегральных методов и конечно-разностных методов, с точностью до учёта конкретной конфигурации оптического элемента.

Интегральное преобразование Рэлея–Зоммерфельда первого типа в декартовых координатах имеет следующий вид:

$$E(u, v, z) = -\frac{z}{2\pi} \times \iint_{\Sigma_0} E_0(x, y) \frac{\exp(ik\ell)}{\ell^2} \left(ik - \frac{1}{\ell} \right) dx dy, \tag{1}$$

где $E_0(x, y)$ – входное поле,

$$\ell = \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2 + z^2},$$

Σ_0 – область, в которой задано входное поле, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны.

При рассмотрении поля на оптической оси ($u = v = 0$) выражение (1) значительно упрощается, и в условиях радиальной симметрии можно записать:

$$E(0, 0, z) = -z \int_0^\infty E_0(r) \times \frac{\exp(ik\sqrt{r^2 + z^2})}{(r^2 + z^2)} \left(ik - \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) r dr. \tag{2}$$

Рассмотрим дифракцию плоской волны на дифракционном фраксиконе [4, 6] с функцией пропускания:

$$\tau(r) = \exp[-i(k\alpha_0 r)^\gamma], \tag{3}$$

где α_0 – безразмерный коэффициент, связанный с числовой апертурой оптического элемента и определяющий степень фокусировки.

Значение параметра α_0 можно определить в соответствии с заданной максимальной числовой апертурой оптического элемента NA_{\max} :

$$\alpha_0 = \begin{cases} \sqrt[\gamma]{\frac{NA_{\max}}{\gamma(kR)^{\gamma-1}}}, & \gamma \geq 1, \\ \left[\frac{NA_{\max} (kr_a)^{1-\gamma}}{\gamma} \right]^{\frac{1}{\gamma}}, & \gamma < 1, \end{cases} \tag{4}$$

где r_a – радиус центральной зоны рассеивающего фраксикона.

Выражение (4) учитывает тот факт [6], что для фраксикона с $\gamma < 1$ максимальное значение числовой апертуры достигается в центральной части оптического элемента.

При падении на фраксикон (3) плоской волны единичной амплитуды, ограниченной радиусом R , распределение на оси можно описать в приближении тонкого оптического элемента по формуле (2) при $E_0(r) = \exp(-i(k\alpha_0 r)^\gamma)$. Однако применение метода стационарной фазы напрямую к интегралу (2) не гарантирует получения решения, удовлетворяющего граничному условию

$$\lim_{z \rightarrow 0} E(0, 0, z) = E_0(0)$$

в силу приближенности метода. Такого неприятного эффекта можно избежать, если произвести в (2) интегрирование по частям:

$$E(0, 0, z) = E_0(0) \exp(ikz) - E_0(R) \frac{z \cdot \exp(ik\sqrt{R^2 + z^2})}{\sqrt{R^2 + z^2}} + z \cdot \int_0^R \frac{dE_0(r)}{dr} \frac{\exp(ik\sqrt{r^2 + z^2})}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr. \tag{5}$$

Для выражения (5) граничное условие выполняется независимо от погрешности вычисления интеграла. Заметим, что выражение (5) похоже на интеграл Рэлея–Зоммерфельда второго типа, но отличается от него наличием внеинтегральных слагаемых. При $E_0(r) = \text{const}$ из (5) легко получается известное точное решение [25]:

$$E_c(0, 0, z) = c \exp(ikz) - c \frac{z \cdot \exp(ik\sqrt{R^2 + z^2})}{\sqrt{R^2 + z^2}}. \tag{6}$$

Для случая $E_0(r) = \exp(-i(k\alpha_0 r)^\gamma)$ получим:

$$E(0, 0, z) = \exp(ikz) - \exp(-i(k\alpha_0 R)^\gamma) \frac{z \cdot \exp(ik\sqrt{R^2 + z^2})}{\sqrt{R^2 + z^2}} - i\gamma(k\alpha_0)^\gamma z \cdot \int_0^R \frac{\exp(ik\sqrt{r^2 + z^2} - i(k\alpha_0 r)^\gamma)}{\sqrt{r^2 + z^2}} r^{\gamma-1} dr. \tag{7}$$

Перепишем выражение (7) в следующем виде:

$$E(0, 0, z) = E_1(z) - i\gamma(k\alpha_0)^\gamma z \cdot \int_0^R A(r) \exp(i\psi(r)) dr. \tag{8}$$

Если использовать для вычисления интеграла в (8) метод стационарной фазы в классическом виде, то мы получим лишь приближение поведения амплитуды поля, похожее на геометрооптическое [8, 9]. В этом случае отсутствуют осцилляции и граница тени является резкой. Более точный результат даёт модифицированный метод стационарной фазы [6]:

$$E(0, 0, z) \approx E_1(z) - iz\gamma(k\alpha_0)^\gamma \times A(r_0) \exp[i\psi(r_0)] \sqrt{\frac{2}{|\psi''(r_0)|}} \int_{t_1}^{t_2} \exp(it^2) dt, \tag{9}$$

где

$$E_1(z) = \exp(ikz) - \exp(-i(k\alpha_0 R)^\gamma) \frac{z \cdot \exp(ik\sqrt{R^2 + z^2})}{\sqrt{R^2 + z^2}}, \tag{10}$$

$$A(r_0) = \frac{kr_0}{\gamma(k\alpha_0)^\gamma (r_0^2 + z^2)}, \tag{11}$$

$$\psi(r_0) = k\sqrt{r_0^2 + z^2} - (k\alpha_0 r_0)^\gamma, \tag{12}$$

$$\Psi''(r_0) = -\frac{k}{\sqrt{r_0^2 + z^2}} \left((1-\gamma) + \frac{z^2}{r_0^2 + z^2} \right), \quad (13)$$

$t_1 = -r_0 \sqrt{|\Psi''(r_0)|/2}$, $t_2 = (R-r_0) \sqrt{|\Psi''(r_0)|/2}$, r_0 – стационарная точка, которая определяется из уравнения:

$$(k\alpha_0)^\gamma \gamma r_0^{\gamma-1} = \frac{kr_0}{\sqrt{r_0^2 + z^2}}. \quad (14)$$

Хотя интеграл в (9) явно выражается через функции Френеля, но общий вид будет достаточно громоздким и будет зависеть от знака величины t_2 . Полученное решение (9) достаточно удобно для численного расчёта, но малоприспособно (по крайней мере, без дополнительных упрощений) для анализа зависимости комплексной амплитуды (или интенсивности) от расстояния и параметров фракфикона, так как в общем случае уравнение (14) не решается аналитически.

Далее проведём дополнительный анализ полученного решения (9) для конкретных значений γ .

2. Фракфикон $0 < \gamma < 1$

Можно доказать, что при $0 < \gamma < 1$ всегда имеется одна стационарная точка (максимум $\Psi(r)$, рис. 1) и нет точек перегиба: $\Psi''(r) < 0$.

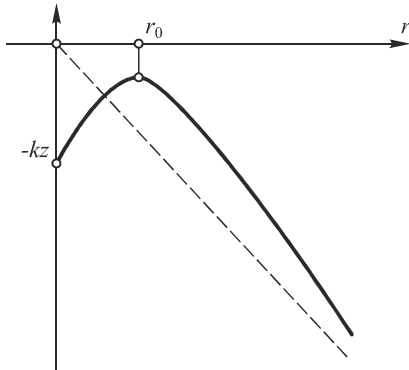


Рис. 1. График общего вида функции фазы $\psi(r) = (k\alpha_0 r)^\gamma - k\sqrt{r^2 + z^2}$

Для рассматриваемого диапазона значений γ единственный случай, когда уравнение (14) приводится к алгебраическому уравнению ниже пятой степени, – это $\gamma = 0,5$. В этом случае после преобразований уравнение для стационарной точки (14) принимает вид:

$$\frac{4k}{\alpha_0} r_0^3 = r_0^2 + z^2. \quad (15)$$

Уравнение (15) решается аналитически, но формула Кардано достаточно громоздка. Однако некоторые выводы можно сделать, и не решая уравнение (15), благодаря тому, что довольно простой вид имеет обратная функция $z(r_0)$:

$$z(r_0) = r_0 \sqrt{\frac{4kr_0}{\alpha_0} - 1}. \quad (16)$$

Функция в (16) при $r_0 < \alpha_0/(4k)$ приводит к мнимым значениям расстояния, не имеющим физического смысла. Для $r_0 \geq \alpha_0/(4k)$ функция $z(r_0)$ является

возрастающей, поэтому искомая функция $r_0(z)$ также возрастает и становится равной R при

$$z_{\max} = R \sqrt{\frac{4kR}{\alpha_0} - 1}. \quad (17)$$

При использовании классического метода стационарной фазы расстояние (17) соответствует границе тени, так как стационарная точка выходит за отрезок интегрирования. Максимальная амплитуда достигается немного левее границы тени (ближе к оптическому элементу), поэтому для приближённого её вычисления вблизи максимума разложим функцию $z^2(r_0)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $r_0 = R$, ограничившись двумя слагаемыми:

$$\begin{aligned} z^2(r_0 \rightarrow R) &\approx \\ &\approx R^2 \left(\frac{4kR}{\alpha_0} - 1 \right) + 2R \left(\frac{6kR}{\alpha_0} - 1 \right) (r_0 - R). \end{aligned} \quad (18)$$

Из (18) мы находим значение стационарной точки:

$$r_{0\max} = R + \frac{z^2 - R^2 \left(\frac{4kR}{\alpha_0} - 1 \right)}{2R \left(\frac{6kR}{\alpha_0} - 1 \right)}. \quad (19)$$

Полученное значение r_0 для $\gamma = 0,5$ можно использовать в (9) для дальнейших вычислений.

Аналогично можно получить зависимость для ближней зоны $z \rightarrow 0$. Для этого функцию $z^2(r_0)$ разложим в окрестности точки $r_c = \alpha_0/(4k)$:

$$\begin{aligned} z^2(r_0 \rightarrow r_c) &\approx \\ &\approx 0 + \frac{\alpha_0}{4k} \left(r_0 - \frac{\alpha_0}{4k} \right) \Rightarrow r_{0c} = \frac{\alpha_0}{4k} + \frac{4k}{\alpha_0} z^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Можно доказать, что второе слагаемое в (9) при $z \rightarrow 0$ стремится к некоторой ненулевой величине.

Рассмотренный алгоритм можно применить в более общем случае. Используя поведение обратной функции $z^2(r_0)$ (рис. 2), можно получить аналогичные результаты для произвольного γ из рассматриваемого диапазона:

$$z^2(r_0) = \frac{k^{2-2\gamma}}{\gamma^2 \alpha_0^{2\gamma}} r_0^{4-2\gamma} - r_0^2. \quad (21)$$

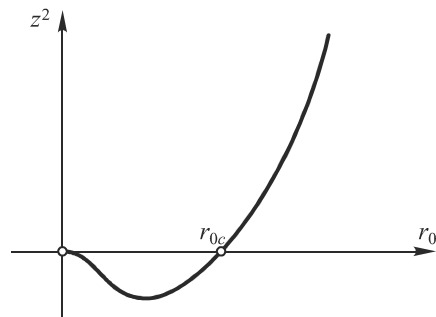


Рис. 2. График функции $z^2(r_0) = ar_0^{4-2\gamma} - r_0^2$

Таким образом, для любого заданного значения z можно численно решить уравнение (21), которое имеет один корень в области действительных z .

Для значений $\gamma \geq 1$ этот подход невозможен, так как должно выполняться условие: степень первого слагаемого в (21) больше степени второго слагаемого ($4 - 2\gamma > 2 \Rightarrow \gamma < 1$), при этом сохраняется общий вид зависимости $z^2(r)$.

Граница тени (т.е. правая граница), соответствующая $r_0(z) = R$, равна

$$z_{\max} = R \sqrt{\frac{(kR)^{2-2\gamma}}{\gamma^2 \alpha_0^{2\gamma}} - 1}. \tag{22}$$

В окрестности точки максимума, соответствующей $r_0 = R$, имеется приближённое равенство:

$$z^2(r_0 \rightarrow R) \approx R^2 \left(\frac{(kR)^{2-2\gamma}}{\gamma^2 \alpha_0^{2\gamma}} - 1 \right) + 2R \left(\frac{(kR)^{2-2\gamma}}{\gamma^2 \alpha_0^{2\gamma}} (2 - \gamma) - 1 \right) (r_0 - R). \tag{23}$$

Отсюда имеем приближение для стационарной точки:

$$r_{0\max} \approx R + \frac{z^2 - R^2 \left(\frac{(kR)^{2-2\gamma}}{\gamma^2 \alpha_0^{2\gamma}} - 1 \right)}{2R \left(\frac{(kR)^{2-2\gamma}}{\gamma^2 \alpha_0^{2\gamma}} (2 - \gamma) - 1 \right)}. \tag{24}$$

Зависимость в ближней зоне при $z \rightarrow 0$ можно получить, рассмотрев окрестность точки

$$r_c = k^{-1} \left(\gamma^2 \alpha_0^{2\gamma} \right)^{1/(2-2\gamma)}; \\ z^2(r_0 \rightarrow r_c) \approx 0 + 2r_c(1-\gamma)(r_0 - r_c) \Rightarrow r_{0c} = r_c + \frac{z^2}{2(1-\gamma)r_c}. \tag{25}$$

3. Линейный аксикон $\gamma = 1$

Рассмотрим решение (9) при $\gamma = 1$. В этом случае уравнение стационарной точки (14) принимает вид:

$$\alpha_0 = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + z^2}} \tag{26}$$

и имеет решение

$$r_0 = \frac{\alpha_0 z}{\sqrt{1 - \alpha_0^2}}. \tag{27}$$

Очевидно, что стационарная точка существует только при $\alpha_0 < 1$, что в геометрической оптике соответствует пропускающему аксикону. Если данное условие выполнено, то можно использовать формулу (9) с учётом равенств:

$$\psi(r_0) = -kz\sqrt{1 - \alpha_0^2}, \quad \psi''(r_0) = -\frac{k}{z}(1 - \alpha_0^2)^{3/2}. \tag{28}$$

К сожалению, в этом случае при малом z решение (9) приводит к большой погрешности. Это связано с

использованием квадратичной аппроксимации на слишком большом интервале.

Для более точного решения поступим следующим образом: квадратичную аппроксимацию применим только на том участке, где график фазовой функции

$$\psi(r) = k\alpha_0 r - k\sqrt{r^2 + z^2}$$

похож на параболу, а за его пределами применим линейную аппроксимацию. За границу параболы $r_0 + \Delta$ примем такое значение r , при котором значение аппроксимирующей функции равно значению исходной фазовой функции в нуле:

$$-kz = \psi(r_0) + 0,5\psi''(r_0)\Delta^2. \tag{29}$$

Из (29) получаем:

$$\Delta^2 = \frac{2z^2(1 - \sqrt{1 - \alpha_0^2})}{(1 - \alpha_0^2)^{3/2}}. \tag{30}$$

После соответствующего разбиения отрезка интегрирования вместо (9) получим следующее выражение для комплексной амплитуды на оптической оси:

$$E(0, 0, z) = \exp(ikz) - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \times \\ \times \exp\left(ik\sqrt{R^2 + z^2} - ik\alpha_0 R\right) - i\sqrt{2kz}\alpha_0 \times \\ \times (1 - \alpha_0^2)^{-1/4} \exp\left(ikz\sqrt{1 - \alpha_0^2}\right) \int_{t_1}^{t_2} \exp(it^2) dr - \\ - ik\alpha_0 z \int_{r_0 + \Delta}^R \frac{\exp\left(ik\sqrt{r^2 + z^2} - ik\alpha_0 r\right)}{\sqrt{r^2 + z^2}} dr, \tag{31}$$

где $t_1 = -\sqrt{kz/2}\alpha_0(1 - \alpha_0^2)^{1/4}$,

$$t_2 = \Delta\sqrt{k/(2z)}(1 - \alpha_0^2)^{3/4}.$$

Последнее слагаемое в (31) соизмеримо с остальными только при довольно малых z , поэтому в данной работе его анализировать не будем. Если $r_0 + \Delta \geq R$, то последнее слагаемое в (31) вовсе не будет, а верхний предел в интегральной экспоненте будет

$$t_2 = (R - r_0)\sqrt{k/(2z)}(1 - \alpha_0^2)^{3/4}.$$

Таким образом, этот случай сводится к стандартному виду (9) – (13).

Если $\alpha_0 \rightarrow 1$, то можно показать, что в этой окрестности последнего слагаемого не будет, а третье слагаемое в (31) примерно равно величине

$$-ikR\sqrt{1 - \alpha_0^2}$$

(то есть стремится к нулю), однако первые два слагаемых не стремятся к нулю. Поэтому, в отличие от геометрикооптического подхода и классического метода стационарной фазы, при $\alpha_0 > 1$ амплитуда не будет нулевой.

Очевидно, что вычисления при $\alpha_0 \geq 1$ очень существенно отличаются от описанных выше и будут рассмотрены отдельно.

4. Результаты численного моделирования

Численное моделирование выполнялось по формуле (2) численным интегрированием при следующих расчётных параметрах: $\lambda = 1$ мкм, максимальное значение числовой апертуры $NA_{max} = 0,8$. Если считать, что центральная зона ограничивается радиусом $r_a = \lambda$, то по формуле (4) параметр фраксикона оценивается следующим образом:

$$\alpha_0 = 0,8 \cdot (2\pi)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \gamma^{-\frac{1}{\gamma}}, \gamma < 1.$$

Однако в этом случае с уменьшением значения γ рассматриваемые оптические элементы будут стано-

виться существенно параксиальными, так как числовая апертура при удалении из центральной зоны оптического элемента будет быстро уменьшаться. Поэтому ограничим центральную зону радиусом $r_a = 10\lambda$, тогда значение α_0 увеличится в $10^{(1/\gamma-1)}$ раз:

$$\alpha_0 = 0,8 \cdot (20\pi)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \gamma < 1.$$

На рис. 3 приведены результаты дифракции ограниченного плоского пучка на центральной зоне ($R = r_a = 10\lambda$) фраксикона при различных значениях γ .

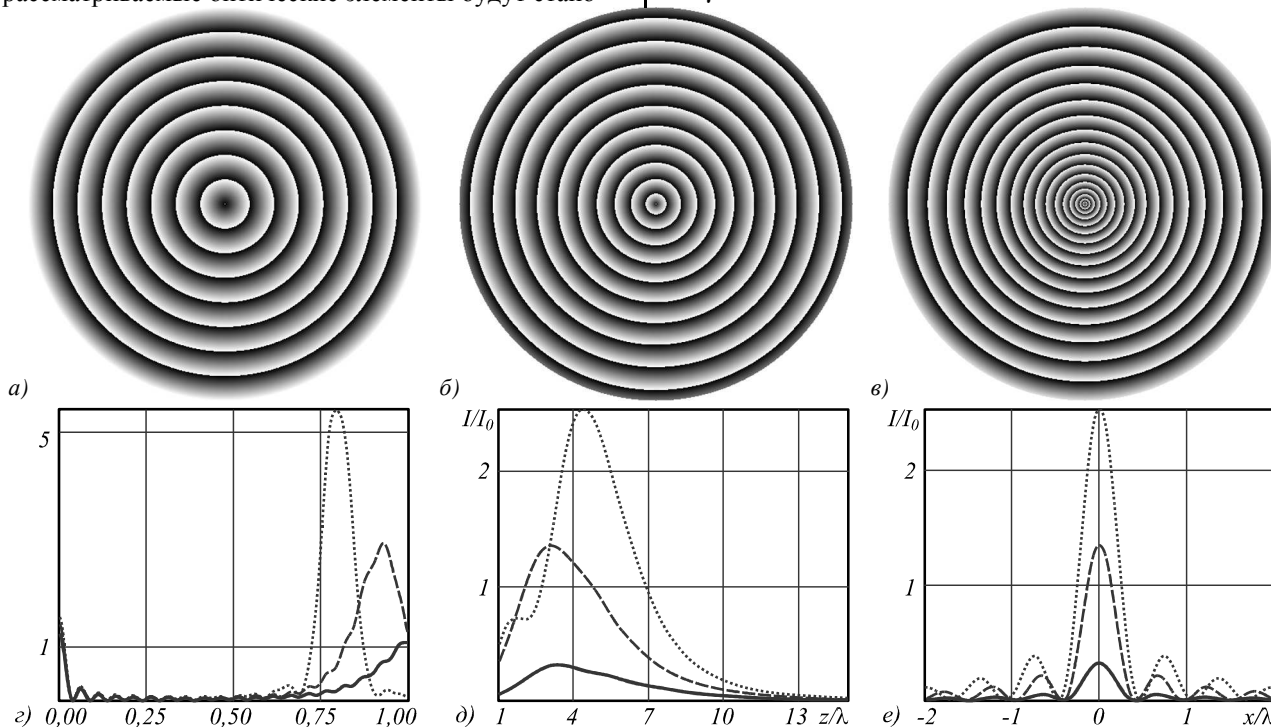


Рис. 3. Фаза фраксикона при $\gamma = 1$ (а), $\gamma = 0,8$ (б), $\gamma = 0,5$ (в) (негативные изображения) и соответствующие пространственные спектральные распределения (з), а также распределения интенсивности вдоль оптической оси (д) и в плоскости максимального значения (е) ($\gamma = 1$ – точечная линия, $\gamma = 0,8$ – пунктирная линия, $\gamma = 0,5$ – сплошная линия)

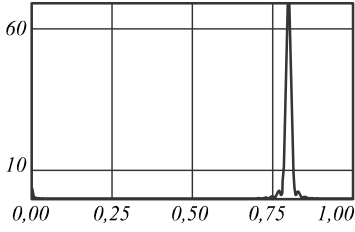
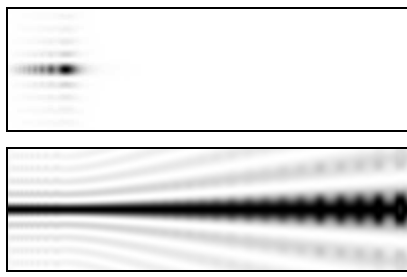
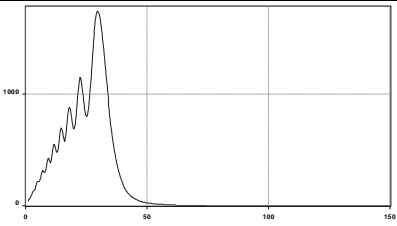
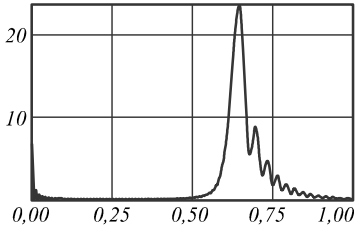
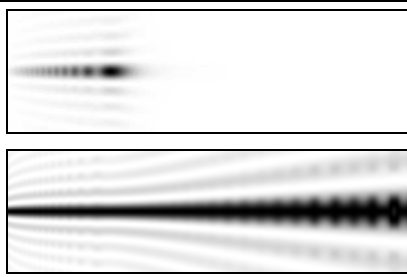
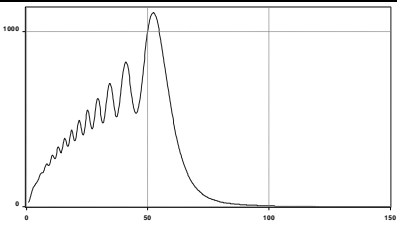
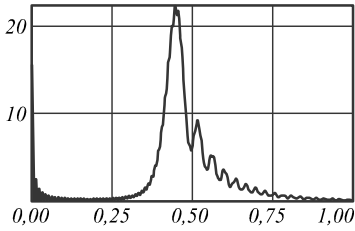
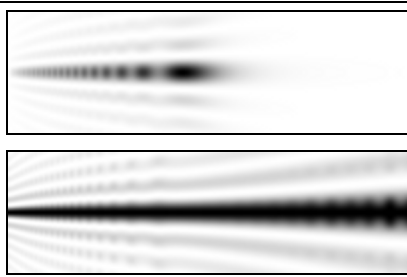
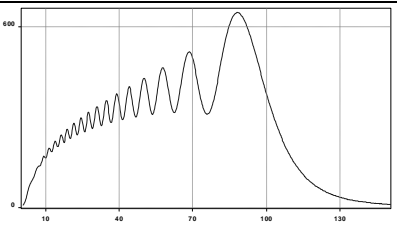
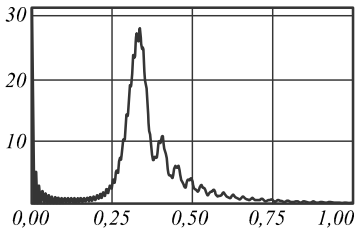
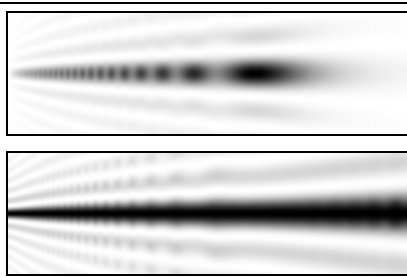
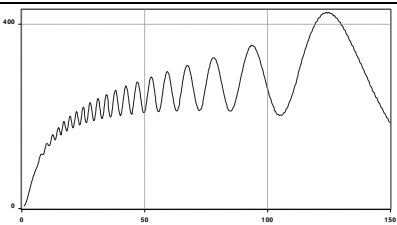
Как видно из рис. 3, частота кольцевых линий для фраксикона $\gamma < 1$ стучается к центру, что свидетельствует об увеличении числовой апертуры в центральной части. Причём если превышает критическое значение NA для данной оптической среды $NA_{lim} = n$, где n – показатель преломления среды, то энергия от этой части элемента идёт в затухающие волны, т.е. элемент в этой зоне является «непропускающим».

Данная ситуация поясняется на рис. 3г, показывающем спектральное распределение. При $\gamma = 1$ фраксикон соответствует обычному линейному аксикону, числовая апертура которого по всему элементу имеет одинаковое значение (в рассматриваемом случае $NA_{max} = 0,8$), что соответствует концентрации пространственного спектрального распределения около линии частот 0,8. Для $\gamma = 0,8$ часть пространственного спектра уходит за пределы единицы, являющейся границей распространяющихся волн, для $\gamma = 0,5$ эта часть ещё больше. Уменьшение количества пропускаемой фраксиконом энергии можно наблюдать также по уменьшению интенсивности (рис. 3д, е).

Заметим, однако, что при $\gamma < 1$ формируется более равномерное распределение интенсивности вдоль оптической оси, чем для аксикона, для которого характерен линейный рост интенсивности. В рассматриваемом случае (рис. 3д) глубина фокуса по уровню полуспада от максимума интенсивности (*full length at half maximum*): $FLHM = 3,5\lambda$ для $\gamma = 1$; $FLHM = 4,16\lambda$ для $\gamma = 0,8$; $FLHM = 4,7\lambda$ для $\gamma = 0,5$. При этом фраксикон с $\gamma < 1$ обеспечивает и меньший размер фокального пятна в плоскости максимальной интенсивности (*full width at half maximum*): $FWHM = 0,437\lambda$ для $\gamma = 1$; $FWHM = 0,392\lambda$ для $\gamma = 0,8$; $FWHM = 0,384\lambda$ для $\gamma = 0,5$.

Чтобы более наглядно показать большую равномерность осевого распределения для рассеивающего фраксикона по сравнению с линейным аксиконом, увеличим радиус каждого оптического элемента до $R = 50\lambda$, сохранив все остальные параметры. Результаты моделирования приведены в табл. 1. Также приведены оценки границы тени z_{max} , полученные по формуле (22).

Таблица 1. Результаты моделирования для фраксиконов с различными γ для $R = 50\lambda$ и $NA_{max} = 0,8$ при $r_a = 10\lambda$

Пространственный спектр	Картина интенсивности и «топология»* в продольной плоскости ($6\lambda \times 200\lambda$)	Распределение интенсивности на оптической оси
$\gamma=1, \alpha_0 = 0,8$ 		 $FLHM=8,55\lambda; FWHM_x=0,44\lambda;$ $z_{max} = 37,5\lambda$
$\gamma=0,8, \alpha_0 = 2,977$ 		 $FLHM=13,8\lambda; FWHM_x=0,56\lambda;$ $z_{max} = 65,7\lambda$
$\gamma=0,5, \alpha_0 = 201$ 		 $FLHM=24,8\lambda; FWHM_x=0,8\lambda;$ $z_{max} = 114,6\lambda$
$\gamma=0,25, \alpha_0 = 50800683$ 		 $FLHM=39,5\lambda; FWHM_x=1,08\lambda;$ $z_{max} = 169,5\lambda$

* «топология» – распределение интенсивности без нормировки на глобальный максимум, позволяет визуально оценить поперечный размер светового пятна на произвольном расстоянии.

Как наглядно видно из табл. 1, чем меньше значение параметра γ , тем более равномерным по интенсивности становится световой отрезок, формируемый вдоль оптической оси, и увеличивается его протяжённость (FLHM). Однако максимальный диаметр ($FWHM_x$) светового отрезка также увеличивается, так как вне центральной зоны $R > r > r_a$ величина числовой апертуры уменьшается.

Заметим, что относительное увеличение максимального диаметра светового отрезка происходит медленнее, чем его продольное увеличение. Таким образом, в приложениях, где размер светового пятна

порядка одной длины волны является удовлетворительным, использование фраксикона с $\gamma \ll 1$ позволяет получить значительно более длинный и равномерный световой отрезок, чем линейный аксикон того же радиуса.

Заключение

На основе интегрирования по частям интеграла Рэлея–Зоммерфельда первого типа получено удовлетворяющее граничным условиям выражение для комплексного распределения на оптической оси при дифракции ограниченной плоской волны на произ-

вольном фраксиконе в непараксиальном скалярном случае.

Используя модифицированный метод стационарной фазы, получено неявное уравнение стационарной точки. Показано, что для рассеивающего фраксикона ($0 < \gamma < 1$) стационарная точка – единственная. Получено аналитическое выражение для границы тени и ближней зоны. Для аксикона ($\gamma = 1$) с числовой апертурой меньше единицы уравнение стационарной точки решено алгебраически и получено явное выражение (31) для комплексного распределения на оптической оси.

Результаты, полученные численным интегрированием, показывают хорошее согласование с аналитической оценкой границы тени.

На численных примерах показано, что с уменьшением значения параметра γ световой отрезок, формируемый фраксиконем вдоль оптической оси, становится более протяжённым и равномерным по интенсивности. При этом происходит увеличение максимального диаметра светового отрезка. Однако относительное уширение светового отрезка происходит медленнее, чем его удлинение. Это может быть использовано в приложениях, где размер светового пятна порядка одной длины волны является удовлетворительным, но требуется более длинный и равномерный световой отрезок, чем обеспечивает линейный аксикон.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 13-07-97004-р_поволжье_а.

Литература

- Koronkevich, V.P.** Lensacon / V.P. Koronkevich, I.A. Mikhaltsova, E.G. Churin and Yu.I. Yurlov // *Appl. Opt.* – 1993. – V. 34(25). – P. 5761-5772.
- Parigger, C.** Spherical aberration effects in lens-axicon doublets: theoretical study / C. Parigger, Y. Tang, D.H. Plemmons and J.W.L. Lewis // *Appl. Opt.* – 1997. – V. 36(31). – P. 8214-8221.
- Burvall, A.** Axicon imaging by scalar diffraction theory / A. Burvall. – PhD thesis, Stockholm, 2004.
- Хонина, С.Н.** Фраксикон – дифракционный оптический элемент с конической фокальной областью / С.Н. Хонина, С.Г. Волоотовский // *Компьютерная оптика.* – 2009. – Т. 33, № 4. – С. 401-411.
- Хонина, С.Н.** Линзакон: непараксиальные эффекты / С.Н. Хонина, Н.Л. Казанский, А.В. Устинов, С.Г. Волоотовский // *Оптический журнал.* – 2011. – Т. 78, № 11. – С. 44-51.
- Устинов, А.В.** Обобщённая линза: анализ осевого и поперечного распределения / А.В. Устинов, С.Н. Хонина // *Компьютерная оптика.* – 2013. – Т. 37, № 3. – С. 307-315.
- Sochacki, J.** Annular-aperture logarithmic axicon / J. Sochacki, Z. Jaroszewicz, L.R. Staronski and A. Kolodziejczyk // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 1993. – V. 10. – P. 1765-1768.
- Устинов, А.В.** Геометрооптический анализ обобщённой рефракционной линзы / А.В. Устинов, С.Н. Хонина // *Известия Самарского научного центра РАН.* – 2012. – Т. 14(4). – С. 28-37.
- Устинов, А.В.** Сравнительный анализ параболической линзы и аксикона в моделях геометрической и скалярной параксиальной оптики / А.В. Устинов, А.В. Карсаков, С.Н. Хонина // *Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета.* – 2012. – № 4(35). – С. 230-239.
- Tucker, S.C.** Extended depth of field and aberration control for inexpensive digital microscope systems / S.C. Tucker, W.T. Cathey and E.R. Dowski // *Opt. Express.* – 1999. – V. 4(11). – P. 467-474.
- Wach, H.** Control of chromatic focal shift through wavefront coding / H. Wach, E.R. Dowski and W.T. Cathey // *Appl. Opt.* – 1998. – V. 37. – P. 5359-5367.
- Marks, D.L.** Three-dimensional tomography using a cubic-phase plate extended depth-of-field system / D.L. Marks, R.A. Stack and D.J. Brady // *Opt. Lett.* – 1999. – V. 24. – P. 253-255.
- Narayanswamy, R.** Extending the imaging volume for biometric iris recognition / R. Narayanswamy, G.E. Johnson, P.E.X. Silveira and H.B. Wach // *Appl. Opt.* – 2005. – V. 44. – P. 701-712.
- Sherif, S.S.** Phase plate to extend the depth of field of incoherent hybrid imaging systems / S.S. Sherif, W.T. Cathey and E.R. Dowski // *Applied Optics.* – 2004. – V. 43(13). – P. 2709-2721.
- Castro, A.** Asymmetric phase masks for extended depth of field / A. Castro and J. Ojeda-Castaneda // *Applied Optics.* – 2004. – V. 43(17). – P. 3474-3479.
- Хонина, С.Н.** Применение аксиконов в изображающих системах для увеличения глубины фокуса / С.Н. Хонина, Д.А. Савельев // *Известия Самарского научного центра РАН.* – 2011. – Т. 13, № 6. – С. 7-15.
- Хонина, С.Н.** Фазовая аподизация изображающей системы с целью увеличения глубины фокуса в когерентном и некогерентном случаях / С.Н. Хонина // *Компьютерная оптика.* – 2012. – Т. 36, № 3. – С. 357-364.
- Методы компьютерной оптики* / А.В. Волков, Д.Л. Головашкин, Л.Д. Досколович, Н.Л. Казанский, В.В. Котляр, В.С. Павельев, Р.В. Скиданов, В.А. Сойфер, В.С. Соловьев, Г.В. Успенев, С.И. Харитонов, С.Н. Хонина, под ред. В.А. Сойфера. – Изд. 2-е, испр. – М.: Физматлит, 2003. – 688 с.
- Хонина, С.Н.** Гипергеометрические пучки в ближней зоне дифракции в рамках скалярной модели / С.Н. Хонина, С.А. Балалаев // *Компьютерная оптика.* – 2009. – Т. 33, № 4. – С. 427-435.
- Born, M.** Principles of Optics / M. Born, E. Wolf – 6th ed. – Oxford: Pergamon, 1980. – Chap. 8.3.
- Totzeck, M.** Validity of the scalar Kirchhoff and Rayleigh-Sommerfeld diffraction theories in the near field of small phase objects / M. Totzeck // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 1991. – V. 8(1). – P. 27-32.
- Tsoy, V.I.** The use of Kirchhoff approach for the calculation of the near field amplitudes of electromagnetic field / V.I. Tsoy, L.A. Melnikov // *Optics Communications.* – 2005. – V. 256. – P. 1-9.
- Хонина, С.Н.** Распространение радиально-ограниченных вихревых пучков в ближней зоне: I. Алгоритмы расчёта / С.Н. Хонина, А.В. Устинов, А.А. Ковалёв, С.Г. Волоотовский // *Компьютерная оптика.* – 2010. – Т. 34, № 3. – С. 317-332.
- Хонина, С.Н.** Дифракция на бинарных микроаксиконах в ближней зоне / С.Н. Хонина, Д.А. Савельев, П.Г. Серафимович, И.А. Пустовой // *Оптический журнал.* – 2012. – Т. 79, № 10. – С. 22-29.
- Dubra, A.** Diffracted field by an arbitrary aperture / A. Dubra and J.A. Ferrari // *Am. J. Phys.* – 1999. – V. 67(1). – P. 87-92.

References

1. **Koronkevich, V.P.** Lensacon / V.P. Koronkevich, I.A. Mikhaltsova, E.G. Churin and Yu.I. Yurlov // *Appl. Opt.* – 1993. – V. 34(25). – P. 5761-5772.
2. **Parigger, C.** Spherical aberration effects in lens-axicon doublets: theoretical study / C. Parigger, Y. Tang, D.H. Plemmons and J.W.L. Lewis // *Appl. Opt.* – 1997. – V. 36(31). – P. 8214-8221.
3. **Burvall, A.** Axicon imaging by scalar diffraction theory / A. Burvall. – PhD thesis, Stockholm, 2004.
4. **Khonina, S.N.** Fracxicon – diffractive optical element with conical focal domain / S.N. Khonina, S.G. Volotovskiy // *Computer Optics.* – 2009. – V. 33, N 4. – P. 401-411.
5. **Khonina, S.N.** The lensacon: nonparaxial effects / S. N. Khonina, N. L. Kazanskiy, A. V. Ustinov, and S. G. Volotovskiy // *J. Opt. Technol.* – 2011. – 78 (11). – P. 724-729.
6. **Ustinov, A.V.** Generalized lens: the analysis of axial and cross-section distribution / A.V. Ustinov, S.N. Khonina // *Computer Optics.* – 2013. – V. 37, N 3. – P. 305-315.
7. **Sochacki, J.** Annular-aperture logarithmic axicon / J. Sochacki, Z. Jaroszewicz, L.R. Staronski and A. Kolodziejczyk // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 1993. – V. 10. – P. 1765-1768.
8. **Ustinov, A.V.** Geometroptical analysis of generalized refractive lenses / A. V. Ustinov, S. N. Khonina // *Bulletin of Samara Scientific Center of RAS.* – 2012. – V. 14(4). – P. 28-37. – (In Russian).
9. **Ustinov, A.V.** Comparative analysis of parabolic lens and axicon in geometric and scalar paraxial optical models/ A. V. Ustinov, A. V. Karsakov, S. N. Khonina // *Bulletin SSAU.* – 2012. – № 4(35). – P. 230-239. – (In Russian).
10. **Tucker, S.C.** Extended depth of field and aberration control for inexpensive digital microscope systems / S.C. Tucker, W.T. Cathey and E.R. Dowski // *Opt. Express.* – 1999. – V. 4(11). – P. 467-474.
11. **Wach, H.** Control of chromatic focal shift through wavefront coding / H. Wach, E.R. Dowski and W.T. Cathey // *Appl. Opt.* – 1998. – V. 37. – P. 5359-5367.
12. **Marks, D.L.** Three-dimensional tomography using a cubic-phase plate extended depth-of-field system / D.L. Marks, R.A. Stack and D.J. Brady // *Opt. Lett.* – 1999. – V. 24. – P. 253-255.
13. **Narayanswamy, R.** Extending the imaging volume for biometric iris recognition / R. Narayanswamy, G.E. Johnson, P.E.X. Silveira and H.B. Wach // *Appl. Opt.* – 2005. – V. 44. – P. 701-712.
14. **Sherif, S.S.** Phase plate to extend the depth of field of incoherent hybrid imaging systems / S.S. Sherif, W.T. Cathey and E.R. Dowski // *Applied Optics.* – 2004. – V. 43(13). – P. 2709-2721.
15. **Castro, A.** Asymmetric phase masks for extended depth of field / A. Castro and J. Ojeda-Castaneda // *Applied Optics.* – 2004. – V. 43(17). – P. 3474-3479.
16. **Khonina, S.N.** Axicons application in imaging systems for increasing depth of focus / S.N. Khonina, D.A. Savelyev // *Bulletin of Samara Scientific Center of RAS.* – 2011. – V. 13, No. 6. – P. 7-15. – (In Russian).
17. **Khonina, S.N.** Phase apodization of imaging system to increase the focal depth in coherent and incoherent cases/ S.N. Khonina // *Computer Optics.* – 2012. – V. 36, No. 3. – P. 357-364.
18. *Methods for computer design of diffractive optical elements / V.A. Soifer, V.V. Kotlyar, N.L. Kazanskiy, L.L. Doskolovich, S.I. Kharitonov, S.N. Khonina, V.S. Pavelyev, R.V. Skidanov, A.V. Volkov, D.L. Golovashkin, V.S. Solovyev, G.V. Usplenyev, ed. V. A. Soifer – New York: John Wiley & Sons, Inc, 2002, – 765 p.*
19. **Khonina, S.N.** Hypergeometrical beams in a near zone of diffraction within the limits of scalar model / S.N. Khonina, S.A. Balalaev // *Computer Optics.* – 2009. – V. 33, N 4. – P. 427-435.
20. **Born, M.** Principles of Optics / M. Born, E. Wolf – 6th ed. – Oxford: Pergamon, 1980. – Chap. 8.3.
21. **Totzeck, M.** Validity of the scalar Kirchhoff and Rayleigh-Sommerfeld diffraction theories in the near field of small phase objects / M. Totzeck // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 1991. – V. 8(1). – P. 27-32.
22. **Tsoy, V.I.** The use of Kirchhoff approach for the calculation of the near field amplitudes of electromagnetic field / V.I. Tsoy, L.A. Melnikov // *Optics Communications.* – 2005. – V. 256. – P. 1-9.
23. **Khonina, S.N.** Propagation of the radially-limited vortical beam in a near zone. I. Calculation algorithms / S.N. Khonina, A.V. Ustinov, A.A. Kovalev, S.G. Volotovskiy // *Computer Optics.* – 2010. – V. 34, No. 3. – P. 317-332.
24. **Khonina, S.N.** Diffraction at binary microaxicons in the near field / S.N. Khonina, P.G. Serafimovich, D.A. Savelyev, I.A. Pustovoi // *J. Opt. Technol.* – 2012. – V. 79, No. 10. – P. 626-631.
25. **Dubra, A.** Diffracted field by an arbitrary aperture / A. Dubra and J.A. Ferrari // *Am. J. Phys.* – 1999. – V. 67(1). – P. 87-92.

ANALYSIS OF FLAT BEAM DIFFRACTION BY DIVERGENT FRACXICON IN NONPARAXIAL MODE

A.V. Ustinov, S.N. Khonina

Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences,
S.P. Korolyov Samara State Aerospace University (National Research University)

Abstract

Theoretical and numerical analysis of flat beam diffraction by divergent fracxicon are performed within the nonparaxial scalar model. Using integration by parts of the Rayleigh-Sommerfeld integral of first type and applying the modified method of stationary phase we obtain the expression of the axial complex distribution satisfying the boundary conditions for on the optical axis. The results obtained by numerical integration show good agreement with analytical estimates. Numerical examples show that the divergent fracxicon allows to form an extended axial light line with diameter of the order of the wavelength longer and more uniform than provides a linear axicon.

Key words: divergent fracxicon, nonparaxial mode, axial light line, uniform axial intensity distribution.

Сведения об авторах

Устинов Андрей Владимирович, 1968 года рождения, в 1991 году окончил Куйбышевский авиационный институт имени академика С.П. Королёва (КуАИ) по специальности «Прикладная математика», работает ведущим программистом в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт систем обработки изображений РАН; является аспирантом Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва. Область научных интересов: дифракционная оптика, разработка программ моделирования работы оптических элементов; обработка изображений, в частности, гидродинамических процессов и биомедицинских.

E-mail: andr@smr.ru.

Andrey Vladimirovich Ustinov, (b. 1968) graduated from Kuibyshev Aviation Institute named after academician S.P. Korolyov (KuAI), majoring in Applied mathematics, works as the leading programmer in Image Processing Systems Institute of the RAS; postgraduate student of Samara State Aerospace University named after S.P. Korolyov. Research interests: diffractive optics, software design for modeling of optical elements operating; images processing, particularly images of hydrodynamic processes and biomedical images.



Хонина Светлана Николаевна, доктор физико-математических наук, профессор Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет); ведущий научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт систем обработки изображений РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, сингулярная оптика, модовые и поляризационные преобразования, оптическое манипулирование, оптическая и цифровая обработка изображений.

E-mail: khonina@smr.ru.

Svetlana Nikolaevna Khonina, Doctor of Physical and Mathematical Sciences; Professor of Samara State Aerospace University named after S.P. Korolyov (National Research University). Leading researcher of Image Processing Systems Institute of the RAS. Research interests: diffractive optics, singular optics, mode and polarization transformations, optical manipulating, optical and digital image processing.

Поступила в редакцию 5 декабря 2013 г.