Dr Dragoljub M. Brkić,
dipl. inž.
Tehnički opitni centar KoV,
Beograd

PRORAČUN POUZDANOSTI MOSNE VEZE ELEMENATA TEHNIČKOG SISTEMA ANALITIČKOM METODOM I METODOM MONTE KARLO

UDC: 62.004.15:519.245

Rezime:

U radu su opisane dve metode proračuna pouzdanosti mosne veze elemenata tehničkog sistema: analitička metoda (tačna) i metoda Monte Karlo (približna). Dat je primer proračuna u kojem su upoređeni dobijeni rezultati primenom ove dve metode. Velika približnost dobijenih rezultata ukazuje na valjanost metode Monte Karlo, koja je posebno primenljiva u proračunima pouzdanosti složenih sistema veza elemenata.

Ključne reči: pouzdanost, proračun pouzdanosti, mosna veza elemenata sistema, metoda Monte Karlo.

CALCULATION OF RELIABILITY OF THE SYSTEM-ELEMENTS BRIDGING CONNECTION BY THE ANALYTICAL METHOD AND BY THE MONTE CARLO METHOD

Summary:

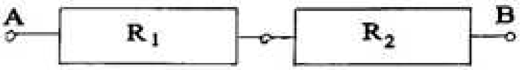
Two methods for calculating reliability of the bridging connection of system elements are described in the paper. The analytical method (accurate) and the Monte Carlo method (approximate). These two methods have been applied to a calculation example and their results have been compared. High approximacy of the obtained results points out the validity of the Monte Carlo method, which can be especially applied in reliability calculations of complex element connection systems.

Key words: reliability, reliability calculation, system-elements bridging connection, Monte Carlo method.

Uvod

Elementi tehničkog sistema međusobno su povezani, redno, paralelno, ili kombinovano, tj. redno-paralelnom i(ili) paralelno-rednom vezom. Proračun pouzdanosti kombinovane veze elemenata sistema realizuje se postupkom redukcije. Na primer, ako su dva elementa vezana redno (slika 1), gde u čvoru njihove veze nema veza sa drugim elementima, onda se ta dva elementa mogu zameniti jednim fiktivnim elementom, u smislu pouzdanosti, čija je ekvivalentna pouzdanost data sledećim izrazom:

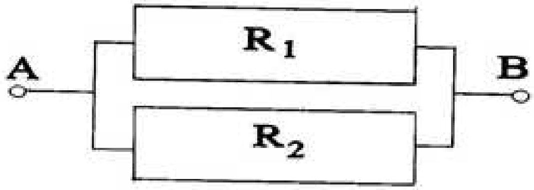
$$R_e = R_1 \cdot R_2. \tag{1}$$



Sl. 1 – Redna veza dva elementa

Ekvivalentna pouzdanost novog fiktivnog elementa jednaka je proizvodu pouzdanosti prvog i drugog elementa. Takav postupak se nastavlja za sledeći redno vezani element, i to za svaku granu složenog sistema veze, i na taj način veza se uprošćava.

Međutim, u nekim delovima tehničkog sistema mogu se naći i elementi koji su međusobno vezani paralelno u funkcionalnom smislu. Paralelna veza dva elementa prikazana je na slici 2.



Sl. 2 – Paralelna veza dva elementa

Slično kao kod redne veze, i dva paralelno vezana elementa mogu se zameniti jednim fiktivnim elementom čija se pouzdanost određuje pomoću izraza:

$$R_e = 1 - (1 - R_1) \cdot (1 - R_2). \qquad (2)$$

Kada vremena rada do (između) otkaza elemenata sistema imaju eksponencijalnu raspodelu, onda se pouzdanosti R_1 i R_2 određuju izrazom:

$$R_i = R_i(t) = e^{-\lambda_i t} = e^{-\frac{t}{m_i}}; \; i = 1, 2, \qquad (3)$$

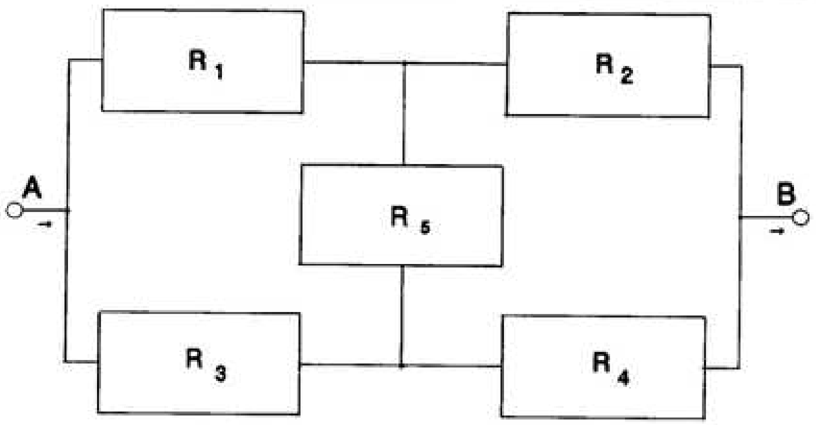
gde je:
λ_i – intenzitet otkaza,
m_i – srednje vreme rada do (između) otkaza i-tog elementa,
t – zadato vreme bezotkaznog rada.

U nekim tehničkim sistemima postoje i elementi koji premošćavaju neke grane sistema. U takvim slučajevima određivanje pouzdanosti celog sistema nije jednostavno. Koristeći navedene postupke redukcije, takav sistem se najčešće svodi na mosnu vezu elemenata koja je prikazana na slici 3. Blokovi koji predstavljaju elemente mosne veze označeni su sa R_1, R_2, ..., R_5, gde korišćene oznake predstavljaju pouzdanosti tih elemenata.

Proračun pouzdanosti

Analitička metoda

Za zadati interval vremena bezotkaznog rada (0, t), veza između parametara



Sl. 3 – Mosna veza elemenata sistema

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_5$, koji predstavljaju intenzitete otkaza tih elemenata, i $R_1, R_2, \ldots, R_5$, data je izrazom:

$$R_i(t) = e^{-\lambda_i t}; \; i = 1, 2, \ldots, 5. \qquad (4)$$

U izrazu (4), umesto intenziteta otkaza λ, može se koristiti srednje vreme rada do (između) otkaza m, koje je, u slučaju eksponencijalne raspodele vremena do (između) otkaza, jednako recipročnoj vrednosti intenziteta otkaza.

Pod pouzdanošću mosne veze elemenata sistema podrazumeva se verovatnoća pojave očekivane izlazne veličine u tački B, kao odziv datoj ulaznoj veličini u tački A. Određivanje pouzdanosti mosne veze znatno je složenije od određivanja pouzdanosti prethodno navedenih vrsta veza elemenata (redne i paralelne veze elemenata). Ukupan broj različitih putanja signala između ulaza A i izlaza B je četiri: 1) R_1 i R_2, 2) R_3 i R_4, 3) R_1, R_4, R_5 i 4) R_3, R_5, R_2. Putanje preko ovih elemenata nisu međusobno nezavisne, jer se u njima pojavljuju i neki zajednički elementi. Određivanje pouzdanosti ove mosne veze izvršeno je primenom Bulove algebre. U ovom primeru, za pet različitih elemenata, koji sačinjavaju mosnu vezu, napisane su kombinacije stanja elemenata, i mosne veze kao celine prikazane u tabeli 1.

U tabeli 1 sa 0 je označeno stanje neispravnosti, a sa 1 stanje ispravnosti elementa, odnosno cele mosne veze. Kao što se može videti u ovoj tabeli, od 32 kombinacije 16 kombinacija je uspešnih, tj. njima se može preneti signal od A do B. Te kombinacije su:

1. 00011 $\bar{R}_5\bar{R}_4\bar{R}_3R_2R_1 = S_1$
2. 00111 $\bar{R}_5\bar{R}_4R_3R_2R_1 = S_2$
3. 01011 $\bar{R}_5R_4\bar{R}_3R_2R_1 = S_3$
4. 01100 $\bar{R}_5R_4R_3\bar{R}_2\bar{R}_1 = S_4$
5. 01101 $\bar{R}_5R_4R_3\bar{R}_2R_1 = S_5$
6. 01110 $\bar{R}_5R_4R_3R_2\bar{R}_1 = S_6$
7. 01111 $\bar{R}_5R_4R_3R_2R_1 = S_7$
8. 10011 $R_5\bar{R}_4\bar{R}_3R_2R_1 = S_8$
9. 10110 $R_5\bar{R}_4R_3R_2\bar{R}_1 = S_9$
10. 10111 $R_5\bar{R}_4R_3R_2R_1 = S_{10}$
11. 11001 $R_5R_4\bar{R}_3\bar{R}_2R_1 = S_{11}$
12. 11011 $R_5R_4\bar{R}_3R_2R_1 = S_{12}$
13. 11100 $R_5R_4R_3\bar{R}_2\bar{R}_1 = S_{13}$
14. 11101 $R_5R_4R_3\bar{R}_2R_1 = S_{14}$
15. 11110 $R_5R_4R_3R_2\bar{R}_1 = S_{15}$
16. 11111 $R_5R_4R_3R_2R_1 = S_{16}$

Pošto su sve prikazane kombinacije međusobno nezavisne, pouzdanost ove mosne veze elemenata jednaka je zbiru članova S_i ($i = 1, 2, \ldots, 5$), tj.

$$R = \sum_{i=1}^{16} S_i. \qquad (5)$$

Tabela 1

Kombinacije stanja elemenata i mosne veze

	Stanja elemenata					Stanje mosne veze		Stanja elemenata					Stanje mosne veze
	R_5	R_4	R_3	R_2	R_1	S		R_5	R_4	R_3	R_2	R_1	S
1.	0	0	0	0	0	0	17.	1	0	0	0	0	0
2.	0	0	0	0	1	0	18.	1	0	0	0	1	0
3.	0	0	0	1	0	0	19.	1	0	0	1	0	0
4.	0	0	0	1	1	1	20.	1	0	0	1	1	1
5.	0	0	1	0	0	0	21.	1	0	1	0	0	0
6.	0	0	1	0	1	0	22.	1	0	1	0	1	0
7.	0	0	1	1	0	0	23.	1	0	1	1	0	1
8.	0	0	1	1	1	1	24.	1	0	1	1	1	1
9.	0	1	0	0	0	0	25.	1	1	0	0	0	0
10.	0	1	0	0	1	0	26.	1	1	0	0	1	1
11.	0	1	0	1	0	0	27.	1	1	0	1	0	0
12.	0	1	0	1	1	1	28.	1	1	0	1	1	1
13.	0	1	1	0	0	1	29.	1	1	1	0	0	1
14.	0	1	1	0	1	1	30.	1	1	1	0	1	1
15.	0	1	1	1	0	1	31.	1	1	1	1	0	1
16.	0	1	1	1	1	1	32.	1	1	1	1	1	1

Polazeći od jednakosti:

$$R_j + \bar{R}_j = 1, \tag{6}$$

u izrazima za S_i, činioce R_j ($j = 1, 2, \ldots, 5$) treba zameniti sa:

$$\bar{R}_j = 1 - R_j. \tag{7}$$

Posle izvršenih smena, naznačenih množenja i sabiranja, dobija se konačan izraz za pouzdanost mosne veze elemenata tehničkog sistema:

$$\begin{aligned} R = {} & R_1R_2 + R_3R_4 + R_1R_4R_5 + \\ & + R_2R_3R_5 + (R_1R_2R_3R_4 + \\ & + R_1R_2R_3R_5 + R_1R_2R_4R_5 + \\ & + R_1R_3R_4R_5 + R_2R_3R_4R_5) + \\ & + 2R_1R_2R_3R_4R_5. \end{aligned} \tag{8}$$

Oznake za pouzdanosti elemenata u izrazu (8) su skraćene. One se pri izračunavanju pouzdanosti zamenjuju sa:

$$R_j(t) = e^{-\lambda_j t} = e^{-\frac{t}{m_j}};\ j = 1, 2, \ldots, 5, \tag{9}$$

gde je:

λ_j – intenzitet otkaza j-tog elementa,

m_j – srednje vreme rada do (između) otkaza j-tog elementa,

t – zadato vreme bezotkaznog rada.

Metoda Monte Karlo

Neka su za elemente mosne veze na slici 3 data srednja vremena rada do (između) otkaza: m_1, m_2, m_3, m_4 i m_5, umesto pouzdanosti: R_1, R_2, R_3, R_4 i R_5, respektivno. U slučaju da vremena rada do (između) otkaza elemenata imaju eksponencijalnu raspodelu, tada je funkcija nepouzdanosti i-tog elementa:

$$F_i(t) = 1 - e^{-\frac{t}{m_i}};\ m_i > 0;\ t \geq 0;$$
$$i = 1, 2, \ldots, 5. \tag{10}$$

Rešavanjem izraza (10) po t, dobija se:

$$t = -m_i \ln\,[1 - F_i(t)]. \tag{11}$$

Ako se za vrednost funkcije $F_i(t)$, u izrazu (11), uzme pseudoslučajni broj $f_{ij} \in [0,\ 1]$, tada se za t dobija sledeći pseudoslučajni broj:

$$t_{ij} = -m_i \ln\,(1 - F_{ij});\ i = 1, 2, \ldots, 5;$$
$$j = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

koji ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom m_i.

U izrazu (12), t_{ij} je j-to po redu generisano pseudoslučajno vreme do (između) otkaza i-tog elementa posmatrane mosne veze.

Neka je t zahtevano vreme bezotkaznog rada mosne veze date na slici 3. Bezotkazno stanje mosne veze elemenata u zadatom vremenu t je ono stanje kada između tačaka A i B postoji bar jedna ispravna veza (veza elemenata od A do B koja nije otkazala). Da bi se dogodila pojava stanja bezotkaznog rada u vremenu t, moraju biti ispunjeni sledeći uslovi:

$$\begin{aligned} & (t_1 > t \wedge t_2 > t) \vee \\ & (t_1 > t \wedge t_5 > t \wedge t_4 > t) \vee \\ & (t_3 > t \wedge t_5 > t \wedge t_2 > t) \vee \\ & (t_3 > t \wedge t_4 > t), \end{aligned} \tag{13}$$

gde su $t_1, t_2, \ldots, t_5$, generisana pseudoslučajna vremena do (između) otkaza prvog, drugog, ..., petog elementa, respektivno, a t je zahtevano vreme bezotkaznog rada.

Da bi se mogla odrediti pouzdanost mosne veze elemenata, metodom Monte Karlo, potrebno je skup pseudoslučajnih brojeva $\{t_1, t_2, \ldots, t_5\}$ generisati uzastopno N puta, gde je N vrlo veliki broj ($N > 100$). Ako se jedno generisanje skupa brojeva $\{t_1, t_2, \ldots, t_5\}$ smatra jednom probom, onda je N ukupan broj proba. Neka je u toku N proba uslov dat izrazom (13) bio ispunjen M puta (M uspešan ishod probe), tj. u M od N proba postojala je bar jedna ispravna veza između tačaka A i B (slika 3).

Pouzdanost mosne veze može se metodom Monte Karlo približno odrediti kao količnik broja uspešnih ishoda M i ukupnog broja proba N, tj.:

$$\hat{R}(t) = \frac{M}{N}. \tag{14}$$

Primer

Poznata su srednja vremena rada do (između) otkaza elemenata mosne veze date na slici 3: $m_1 = 1000$ h, $m_2 = 1000$ h, $m_3 = 2000$ h, $m_4 = 2000$ h i $m_5 = 2500$h, koja imaju eksponencijalnu raspodelu. Potrebno je odrediti pouzdanost ove mosne veze elemenata primenom analitičke metode i metode Monte Karlo, za sledeća zahtevana vremena bezotkaznog rada: t = 100 h, 250 h, 500 h, 1000 h i 2000 h. Kod primene metode Monte Karlo, radi postizanja veće tačnosti, ukupan broj proba treba da bude N = 10 000. Dobijene rezultate treba uporedno prikazati u tabeli.

Rešenje

Pošto je izračunavanje pouzdanosti složeno u slučaju primene analitičke metode, a posebno metode Monte Karlo, to je za rešavanje datog zadatka neophodna primena računara. Za zadate podatke, koristeći prethodno navedene izraze za pouzdanost mosne veze elemenata, pomoću računarskog programa urađenog specijalno za ovu svrhu, dobijene su vrednosti za pouzdanost mosne veze elemenata (slika 3) koje su prikazane u tabeli 2.

Tabela 2

Vrednosti pouzdanosti mosne veze elemenata

t[h]	Primena analitičke metode R(t)	Primena metode Monte Karlo $\hat{R}(t)$
100	0,990426	0,9905
250	0,945292	0,9487
500	0,818600	0,8193
1000	0,527829	0,5310
2000	0,175627	0,1760

Zaključak

Kada se uporede vrednosti pouzdanosti mosne veze elemenata tehničkog sistema, određene analitičkom metodom i metodom Monte Karlo, koje su prikazane u tabeli 2, može se primetiti da su one veoma približne. To je potvrda valjanosti metode Monte Karlo, a i velikog broja proba N = 10 000. Zadovoljavajuća tačnost mogla bi se dobiti i sa manjim brojem proba (N > 100). Zbog spore statističke konvergencije, preterano povećanje broja proba (N ≫ 10 000) ne dovodi do značajnijih približavanja rezultata dobijenih primenom ove dve metode. Primenom metode Monte Karlo može se odrediti pouzdanost i složenijih sistema veze elemenata, nego što je sistem mosne veze. Bitno je istaći da se primenom prikazane metode Monte Karlo, može odrediti pouzdanost nekog sistema veza, a da se pri tome ne mora izvesti analitički izraz za tu pouzdanost. To je naročito važno kada je sistem veze složen, pa je izvođenje analitičkog izraza za njegovu pouzdanost veoma teško izvodljivo, jer, kao što se može videti u ovom radu, ono je teško izvodljivo i za jednostavnu mosnu vezu elemenata.

Literatura:

[1] P. Chapouille et R. De Pazzis: Fiabilité des Systèmes, Masson, Paris, 1968.

[2] B. L. Van Der Waerden: Mathematische Statistik, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[3] H. G. Schneider: Zuverlässigkeit elektronischer Bauelemente, VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustie, Leipzig 1974.