Mr Radenko I. Višnjić,
potpukovnik
Vojna akademija VJ,
Beograd

MATEMATIČKA OSNOVA OBLIKOVANJA DIGITALNIH MODELA RELJEFA

UDC: 528.932:519.651/.652:681.322

Rezime:

U radu je prikazana matematička osnova oblikovanja digitalnih modela reljefa (DMR) kopnene fizičke površi Zemlje. Opisana je teorijsko-matematička osnova i dati su matematički izrazi aproksimacija linija i površinskih elemenata oblikovanja prostorno-strukturnih svojstava reljefa. Izrazi su značajni za izbor odgovarajućih rješenja pri korišćenju računarske podrške u postupku izrade DMR – zavisno od njihove primene i zahtjevane tačnosti.

Ključne riječi: digitalno modelovanje reljefa, matematička osnova oblikovanja DMR, funkcije interpolacije i aproksimacije.

MATHEMATICAL BASIS OF FORMATING DIGITAL MODELS OF RELIEF

Summary:

This paper deals with a mathematical basis used for formating the Digital Models of Relief (DMR) of the Earth's physical land surface. The theoretical and mathematical basis is described and mathematical expressions for approximation of the lines and surface elements in formating relief's space structural features are given. These expressions are significant for the selection of appropriate solutions while using computer support in the DMR making procedure. The selections depend on their application and a required accuracy.

Key words: digital modelling of relief, mathematical basis of formating the DMR, functions of the interpolation and approximation.

Uvod

Digitalni modeli reljefa (DMR) fizičke kopnene površi Zemlje jesu digitalni skupovi podataka u rasterskom i/ili vektorskom sistemu, o morfometrijskim i metričkim (geodetskim; sopstvenim) svojstvima prostorno-strukturnih odnosa fizičke površi Zemlje i geodetskih vertikalnih referentnih površi (po dijelovima ili u cjelini). Predstavljaju elementarne površi ili unije elementarnih površi, i skupove materijalnih tačaka različitih gustina, položaja, orijentacija, međusobnih odnosa [1] i sl.

Digitalno modelovanje reljefa je složeni sistem prikupljanja, oblikovanja, objašnjavanja, vrjednovanja, predstavljanja, primjenjivanja i ispitivanja saglasnosti digitalnih podataka o fizičkoj površi Zemlje i izvornih podataka. Sistem sačinjavaju: podsistem modelovanja – reljef fizičke površi Zemlje i modulujući podsistem – informatička nauka, tehnologija i stručnjaci.

Digitalno modelovanje reljefa obuhvata [2]:

– prikupljanje originalnih podataka o reljefu, uspostavljanjem odgovarajućih odnosa između rezultata različitih mjerenja i izrada osnove DMR;

– oblikovanje i uređivanje podataka (obrada i prilagođavanje, izdvajanje posrednih modela i priprema za različite postupke primjene, svođenje podataka u jedinstvene geodetske referentne sisteme, i sl.);

– interpretaciju digitalnih podataka o reljefu kvalitativno-kvantitativnim analizama, izdvajanjem skupova kontrolnih tačaka, „međumodela", i sl.;

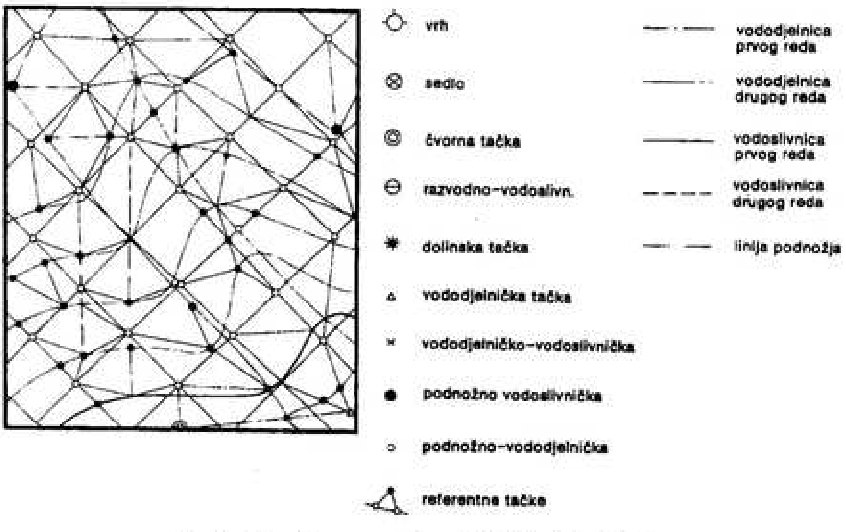
– predstavljanje DMR i njihovih funkcionala različitim metodama, postupcima i oblicima (tekstualno, grafički, alfanumerički, izometrijski, aksiometrijski, ortogonalno, jednobojno i višebojno, rasterski, vektorski i sl.).

– korišćenje modela i funkcionala u različitim naučnim, teorijsko-praktičnim, praktičnim, civilnim, vojnim, inženjersko-tehničkim, geodetskim, geofizičkim, geomorfološkim, kartografskim, fotogrametrijskim, geografskim i sl. oblastima djelatnosti.

Prostorna svojstva, struktura i oblast DMR (slika 1 [3]) presudno utiču na izbor parametara i veličina sistema digitalnog modelovanja reljefa fizičke površi Zemlje (zemljišta, terena, topografije) i postupak njihove primjene. Zbog toga se u cjelokupnom postupku oblikovanja DMR postavljaju potrebni i dovoljni uslovi, kao što su: gustina i raspodjela podataka, geodetski referentni sistemi, tačnost modela, način predstavljanja modela i funkcionala, sadržaj oznaka modela i koordinatnih početaka, oblast obuhvatanja modelom, mogućnosti preoblikovanja, i sl.

Teorijsko-matematička osnova oblikovanja DMR

Predstavljanje i ostvarenje skupova digitalnih podataka, koji izražavaju prostorno-strukturna svojstva fizičke površi



Sl. 1 – Strukturno-regularni (TIN-grid) DMR

Zemlje (slika 1) dostiže se složenim sistemom – digitalnim modelovanjem reljefa – tako da istraživanje, proučavanje, izrada i primjena DMR obezbjeđuje nove podatke – neposredno i posredno – funkcionalima DMR (ugao nagiba zemljišta, strukturne linije i tačke reljefa, zapremina masa, gravitacioni potencijal i izostatička kompenzacija masa reljefa, uticaji masa reljefa na osnovne geodetske fizičke parametre, karte dogledanja i pokrivanja EMT, itd.).

Obrada izvornih i referentnih podataka oblikovanjem DMR, predstavlja najsloženiji i najznačajniji dio sistema digitalnog modelovanja reljefa. Prostorno-vremenska svojstva DMR: globalni, regionalni, lokalni, referentna ili proizvoljna vremenska epoha, globalni, regionalni, nacionalni ili lokalni geodetski referentni sistemi, standardizovana ili proizvoljna struktura i raspodjela podataka i sl. opredjeljujuće utiču na postupke obrade podataka i oblikovanja DMR.

Postupak oblikovanja, zavisno od obima, namjene i primjene DMR, uslovno se može podijeliti na intervale različite prema: sadržaju, načinima interpolacije podataka, aproksimaciji linija i elementarnih površi reljefa, itd.

U „uvodnom dijelu" postupka obrazuje se referentna (osnovna) raspodjela (grid, TIN, TIN-grid [3]) i gustina (detaljni, prorijeđeni, posredne površi reljefa) – na osnovu raznovrsnih i usklađenih izvornih (originalnih) podataka.

Glavni i završni dio obuhvataju obradu izvornih podataka rutinskim programima i oblikovanje DMR – do ostvarenja potrebnih skupova podataka (oznaka osnovnih veličina, podjela na podskupove, dobijanje i predstavljanje matematičko-statističkih pokazatelja, prilagođavanje modela primjeni i mogućnostima informatičke podrške [1], itd.).

U opštem slučaju postupak sadrži dvije interpolacije podataka, različite i/ili jednake, ali je neophodno sljedeće:

– u prvom dijelu postupka interpolacije i aproksimacije (linija i elementarnih površi) sačuvati opšti kvalitet i tačnost izvornih podataka (npr. 95% nivoa značajnosti),

– u glavnom dijelu postupka dostići zahtjevane osobine DMR odgovarajućim metodama interpolacija (kolokacija, spline polinomi, harmonijske funkcije, itd.) i funkcijama aproksimacija (kovarijaciona funkcija, stepeni polinomi, funkcionalni redovi, konvolucije, itd.).

Metode interpolacije, nezavisno od namjene DMR, moraju zadovoljiti neophodne uslove [4]:

– neprekidnost funkcije i njenih izvoda (prvog i drugog reda) u cjelini, ili „dio po dio", na intervalu interpolacije i aproksimacije;

– tačnost funkcija aproksimacije linija i površi, i u referentnim tačkama DMR koje pripadaju površima niskog stepena i reda (npr. ravnima) – mora biti zadovoljavajuća, tako da vrijednosti visina tačaka pripadaju takvim funkcijama;

– interpolacione funkcije moraju biti invarijantne, u pogledu promjene; parametrizacije, razmjera, translacije i rotacije DMR;

– ostvarenje (bi)linearne funkcionalne međuzavisnosti referentnih (osnovnih) tačaka DMR.

Osnivanje, obrada, oblikovanje i primjena DMR obuhvataju aproksimacije:

linija (krivih i pravih, duž određenih ili proizvoljnih pravaca) i

površi (u okviru osnovnih kvadratnih, trapezoidnih, trougaonih polja, ili proizvoljnog dijela površi Zemlje), korišćenjem različitih metoda interpolacije.

Podjela metoda interpolacije može se izvršiti prema:

- brzini i tačnosti izračunavanja;
- namjeni DMR;
- zahtjevanoj tačnosti DMR i njihovih funkcionala i sl.

Interpolacija linija fizičke površi Zemlje najčešće se izvršava primjenom: polinoma i spline funkcija trećeg stepena, poligonih vlakova, linearnih polinoma, Fourierovih funkcionalnih redova, metode najmanjih kvadrata, kolokacije najmanjih kvadrata [6] i sl.

Površinski elementi reljefa Zemlje, interpoliraju se u trodimenzionalnom (3D) metričkom prostoru, prethodno navedenim metodama, korišćenjem koordinata: geocentričkih i lokalnih Cartesiusovih, državne koordinatne mreže, elipsoidnih (geodetskih) ili sfernih i sl., gdje su nadmorske ili geometrijske visine funkcije sfernih, elipsoidnih, astronomskih ili pravouglih koordinata.

Pri aproksimaciji elementarnih površi reljefa analitičkim izrazima, nezavisno od usvojene parametrizacije, primenjuju se metode interpolacije: bilinearna (hiperboličkim paraboloidima); bikubnim polinomima; bikubnim spline funkcijama; konačnim i graničnim elementima; 2D kovarijacionim funkcijama, i sl.

Aproksimacija linija prostorne strukture reljefa

Strukturne tačke i linije prostornih i morfometrijskih svojstava fizičke površi Zemlje ne mogu se predstaviti jednostavnim matematičkim izrazima, pa se zbog toga aproksimiraju analitičkim funkcijama na osnovu skupova izabranih, raspoloživih i određenih tačaka, u definisanim geodetskim referentnim sistemima.

Aproksimacije linija reljefa zasnovane su, uglavnom, na interpolacijama neprekidnih funkcija polinomima i funkcionalnim redovima.

Interpolacioni polinomi, sa gledišta postupka računanja i sprovođenja računskih operacija, pogodni su analitički izrazi [5] numeričkih metoda određivanja približnih vrijednosti nesvojstvenih, neprekidnih, podintegralnih funkcija. Primjena je zasnovana na Weierstrassovoj teoremi (navodi se bez dokaza [5]):

Za svaku funkciju H (x), $x \in [a, b]$ i za svako $\varepsilon > 0$, postoji polinom P (x), tako da je:

$$d\,[H(x); P(x)] \leq \varepsilon$$

gde je:

ε – greška aproksimacije;

$d[\bullet]$ – metrika na intervalu [a, b] aproksimiranja funkcije polinomom.

Aproksimacije neprekidnih, krivih i pravih linija prostorne strukture reljefa, pri izradi DMR, najčešće se zasnivaju na interpolacijama: kubnim stepenim i spline polinomima i Fourierovim trigonometrijskim redovima.

Kubni polinomi

Funkcija H (x), diferencijabilna {n} puta u tački $x_0 \in [a, b]$, može se aproksimirati Taylorovim polinomom (primjenjujući jednostavnije označavanje, $d^nH(x_0)/dx^n = H^{(n)}(x_0)$):

$$T_n(H,x_0,x) = H(x_0) + H'(x_0)\,\frac{(x-x_0)}{1!} + \ldots + H^{(n)}(x_0)\,\frac{x^n}{n!} \tag{1}$$

ili pri $x_o = 0$ Maclaurinovim stepenim polinom:

$$M_n(H,0,x) = H(0) + H'(0)\frac{x}{1!} + \ldots$$

$$+ H^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} \quad (2)$$

Neprekidna funkcija H (x) do (n + 1)-og izvoda, na odsječku $x \in [0, L]$ u tački $x_o \in [0, L]$, aproksimira se polinom:

$$H(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

koji za treći stepen (n = 3) ima razvijeni oblik:

$$T_3(x) = H(0) + H'(0)\frac{x}{1!} + H''(0)\frac{x^2}{2!} +$$

$$+ H'''(0)\frac{x^3}{3!} \quad (3)$$

$$R_3(x) = H^{(4)}(\xi)\frac{x^4}{4!};\ \xi = 0 + \theta(x-0),$$

$$0 < \theta < 1$$

Greška aproksimacije ε, funkcije H (x), Taylorovim polinomom T_3 (x), zavisi od stepena polinoma i klase regularnosti funkcije, pa iz prethodnog slijedi:

$$H(x) \approx T_3(x);\quad |H(x) - T_3(x)| \leq \varepsilon_H;$$
$$n = 3;\ x \in [0, L]$$

i kubni Taylorov polinom T_3 (x) funkcije H (x):

$$H(x) \approx T_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (4)$$

gdje je:

a_n, $n \in [0, 3]$ – koeficijenti polinoma (prema izrazu (3));

x^n, $n \in [0, 3]$ – vrijednost dužine na intervalu, $x \in [0, L]$;

H (x) – vrijednost visine tačke na rastojanju $x \in [0, L]$;

T_3 (x) – kubni Taylorov interpolacioni polinom.

Koeficijenti polinoma određuju se na osnovu poznatih visina tačaka, npr. H (0) = 300 m i njihovih međusobnih rastojanja (intervala uzorkovanja tačaka), npr. $\triangle x = 25$ m, dosljednom primjenom teoreme odbiraka [1].

Pri interpolaciji funkcija Taylorovim polinomima T_n (x) značajni su: stepen polinoma (npr. n = 3), dužina uzorkovanja tačaka (npr. L = 10 km), interval uzorkovanja (npr. $\triangle x = 25$ m) i greška aproksimacije visina (npr. $\varepsilon_H = \triangle H(x) = 1$ m). Ocjenjuju se tokom cjelokupnog postupka izrade i primjene DMR, od prikupljanja izvornih podataka do primjene funkcionala DMR, a istovremeno mogu biti početni uslovi i pokazatelji za: izbor, prikupljanje, obradu, oblikovanje i obrazovanje odgovarajuće strukture podataka DMR.

Spline polinomi

Ako je funkcija H (x, y) (slika 2 [1]) zadata na intervalu $y \in [0, L]$, podijeljenim čvorovima interpolacije:

$$[0,L]:\ 0 = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_m = L \quad (5)$$

može se aproksimirati spline funkcijom $H_{[\bullet]}$ (y), različitog stepena {m}. Skup polinoma P_m (y) i funkcija $C^{(m)}$ [0, L] realnih promjenljivih, određenih na intervalu $y \in [0, L]$, „povezani" su funkcijom $S_{[\bullet]}$ (y), stepenim spline polinomom, defekta k ($1 \leq k \leq m$) sa čvorovima (5), ako su ispunjeni uslovi:

(a) $S_{[\bullet]}(y) \in P_m(y) \quad \forall\, y \in [y_i, y_{i+1}]$
$i \in [0, m-1]$ (6)
(b) $S_{[\bullet]}(y) \in C^{(m-k)}\,[0, L]$

Ako se usvoji $k = 1$, tada spline $S_m(y)$ vrši interpolaciju funkcije $H(y)$ na rastojanju L $y \in [0, L]$, pod sljedećim uslovima:

a) $S_m(y) \in P_m(y)\ \forall y \in [y_i; y_{i+1}]$
$i \in [0, m-1]$ b) $S_m(y) \in C^{(m-1)}\,[0, L]$
c) $S_m(y_i) = y_i = H(y_i) \quad i \in [0, m]$ (7)

pri čemu su čvorovi, interpolacije i spline, podudarni.

Spline $S_3(y)$ je kubni interpolacioni polinom funkcije $H_{[\bullet]}(y)$, na intervalu $y \in [0, L]$ ako na svakom dijelu $y_i \le y \le y_{i+1}$ ima vrijednost jednaku polinomima $S_m(y) = H_{[\bullet]}(y)$ ili ako funkciji odgovara spline polinom trećeg stepena:

$$S_3(y) \approx H_{[i,i+1]}(y) = a_{0\,[i,i+1]} + a_{1\,[i,i+1]}(y - y_i) + a_{2\,[i,i+1]}(y - y_i)^2 + a_{3\,[i,i+1]}(y - y_i)^3 \tag{8}$$

pri čemu, u svim čvornim tačkama, moraju biti zadovoljene jednakosti:

$$S'(y) = H'_{[i-1,i]}(y) = H'_{[i,i+1]}(y) \tag{9}$$
$$S''(y) = H''_{[i-1,i]}(y) = H''_{[i,i+1]}(y)$$

gdje su $(\bullet)'$ $(\bullet)''$ izvodi prvog i drugog reda polinoma i funkcija $S_m(y)$ i $H_{[\bullet]}(y)$.

Koeficijenti $a_{m[\bullet]}$, $m \in [0, 3]$ za svaki pojedini dio, npr. $[y_{i-1}, y_{i+1}]$, određuju se na osnovu poznatih visina tačaka (slika 1), prema izrazima [6]:

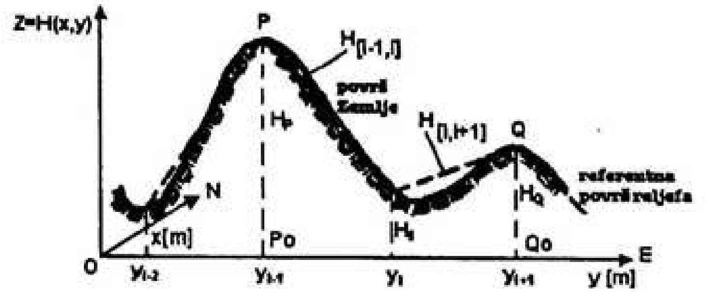
$$a_{2\,[i-1,i]}(y_i - y_{i-1}) + 2a_{2[i,i+1]}(y_{i+1} + y_{i-1}) + a_{2[i+1,\,i+2]}(y_{i+1} - y_i) = 3\left\{\frac{H_{i+1} - H_i}{y_{i+1} - y_i} - \frac{H_i - H_{i-1}}{y_i - y_{i-1}}\right\}$$

$$a_{0\,[i,i+1]} = H_i(y)$$

$$a_{1\,[i,i+1]} = -\frac{2}{3}a_{2[i,i+1]}(y_{i+1} - y_i) - \frac{1}{3}a_{2[i+1,i+2]}(y_{i+1} - y_i) + \frac{H_{i+1} - H_i}{y_{i+1} - y_i} \tag{10}$$

$$a_{3\,[i,i+1]} = \frac{1}{3}\frac{1}{(y_{i+1} - y_i)}(a_{2[i+1,i+2]} - a_{2[i,i+1]})$$

Interpolacija kubnim spline polinomom $S_3(x, y)$, funkcije visina tačaka $H(x, y)$, u neposrednoj okolini materijalnih tačaka $P(x, y, H(x, y))$, daje veoma dobre rezultate, ako se vrši na osnovu poznatih vrijednosti osam visina [1], pa se primjenjuje, gotovo isključivo, pri izradi nacionalnih i regionalnih DMR (slika 4).



Sl. 2 – Aproksimacija spline polinomom

Fourierovi trigonometrijski redovi

Funkciji $H(x)$ $x \in [0, L]$ odgovara Fourierov red, za parno

$$H(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x, \qquad (11)$$

i za neparno područje definisanosti

$$H(x) \approx \sum_{1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \qquad (12)$$

Ako funkcija $H(x)$ zadovoljava uslove teoreme Dirichleta [7], u opštem slučaju odgovarajući Fourierov red:

$$H(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + \right.$$

$$\left. + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x\right), \quad x \in [-L, L] \qquad (13)$$

ima vrijednost koeficijenata

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} H(x)\, dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} H(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} H(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx \qquad (14)$$

koji su sa koeficijentima reda

$$H(x) = \sum_{1}^{\infty} A_n \cos \left(\frac{2\pi n x}{L} - \Phi_n\right) \qquad (15a)$$

povezani funkcionalnim odnosima

$$A_n^2 = a_n^2 + b_n^2 \quad \Phi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n}$$

(A_n – aplituda; Φ_n – faza talasa) (15b)

Za konačne vrijednosti $L(x, y)$ i talasne dužine l_k, frekvencija se izražava recipročnom vrijednosti talasne dužine:

$$f_k = \frac{1}{l_k} = \frac{k}{L} \quad k \in [1,m] \qquad (16)$$

pri čemu amplitudi A_1 odgovara frekvencija $1/L$, amplitudi A_k frekvencija k/L [6], itd.

Ograničen Fourierov red konačnom vrijednosti $k \in N$, i bez slobodnog člana ($a_0 = 0$) omogućava predstavljanje prostorno-strukturnih svojstava reljefa Zemljine površi:

$$H(x) = \sum_{1}^{m} \left(a_k \cos \frac{2\pi k}{L} x + b_k \sin \frac{2\pi k}{L} x\right)$$

$$a_k = b_k = 0, \text{ za } f_k \geq f_{max} \qquad (17)$$

$$H(x) = \sum_{1}^{m} A_k \cos \left(\frac{2\pi k x}{L} - \Phi_k\right)$$

$$A_k = 0 \text{ za } f_k \geq f_{max} \qquad (18)$$

Koeficijenti a_k, b_k, $A_k^2 = a_k^2 + b_k^2$, određuju se iz visina tačaka $H_j(x)$ $j \in [1, n]$, u postupku uzorkovanja (prikupljanja) podataka, ili dopunjavanja sadržaja DMR, visinama tačaka određenih, npr. geometrijskim nivelmanom.

Zbog posebnosti primjene Fourierovih redova, za interpolaciju linija reljefa sa izraženom morfometrijom pogodni su strmi odsjeci, kanjoni, sutjeske, itd., ali se moraju pažljivo odabirati talasne dužine, zbog moguće neprilagođenosti prostorno-strukturnim svojstvima reljefa.

Aproksimacija površi prostorne strukture reljefa

Fizička površ Zemlje je složena i vremenski promjenljiva funkcija, zbog trajnih endogenskih i egzogenskih geodinamičkih pojava, procesa i sila. Matematički se ne može potpuno izraziti i zbog nedovoljnog poznavanja odnosa prema geoidu, ili nekoj drugoj referentnoj površi geodetskog vertikalnog referentnog sistema.

Ostvarivanje zadovoljavajućih rješenja dostiže se aproksimacijama: fizičke površi Zemlje – analitičkim izrazima, i vertikalne referentne površi – sfernom ili ravnom površi (sferna ili ravna aproksimacija) ograničenih oblasti.

Aproksimacija elementarnih površi reljefa analitičkim funkcijama ostvaruje se interpolacijom izvornih podataka i u postupku oblikovanja DMR. Raspoloživi programski paketi, npr. GRAVSOFT i TIGRIS [1], omogućavaju različite interpolacione metode, kao što su: spline funkcije, stepeni polinomi, kovarijacione funkcije, konačni elementi, Fourierovi funkcionalni redovi, itd. u 2D metričkom prostoru.

Stepeni polinomi

U lokalnom Cartesiusovom sistemu, za funkciju $H(x, y) = z(x, y)$ i $(x, y) \in D$ $(D \in R^2)$ postoji takav polinom, $P_n(x, y)$ koji je aproksimira pod uslovom:

$$d\,[H(x, y)\; P_n(x, y)] \leqslant \varepsilon$$

gdje je $\varepsilon = \triangle H(x, y)$ greška aproksimacije.

Funkcija $d\,[\bullet]$ je metrička vrijednost u 3D oblasti, a uređeni par $\{R^3;\ d\}$ predstavlja 3D metrički prostor. Oblast $D \in R^2$ je osnova različitih parametrizacija fizičke površi Zemlje.

Proučavanja prostorne strukture reljefa površi Zemlje pokazala su mogućnost zadovoljavajućih interpolacija primjenom kubnih 2D polinoma.

Neprekidna funkcija $H(x, y)$ neprekidnih parcijalnih izvoda reda i stepena $(n + 1)$, u okolini tačke $P_0(x_0, y_0)$, može se razviti u funkcionalni red, za svaku tačku $P(x, y)$:

$$H(x,y) \approx P_n(P) = H(P_0) + \frac{dH(P_0)}{1!} + \\ + \frac{d^2H(P_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^nH(P_0)}{n!} + R_n \qquad (19)$$

gdje je ostatak reda

$$R_n = \frac{d^{n+1}H(P^*)}{(n+1)!}\, P^*\,(x_0 + \theta\triangle x; \\ y_0 + \theta\triangle y)\ 0 \leq \theta \leq 1 \qquad (20)$$

Jednostavnijim označavanjem kubnog 2D polinoma, dobija se aproksimativna funkcija:

$$H(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + \\ + a_4y^2 + a_5xy + a_6x^3 + a_7y^3 + \\ + a_8x^2y + a_9xy^2 \qquad (21)$$

čiji se koeficijenti a_n $n \in [0, 9]$, određuju na osnovu poznatih, najmanje deset visina materijalnih tačaka.

Interpolacija visina tačaka vrši se u okviru osnovnog polja DMR, ili korišćenjem poznatih visina tačaka proizvoljne raspodjele.

Značajnu primjenu, pri interpolaciji visina tačaka, za aproksimaciju fizičke površi Zemlje imaju:

– bikvadratni polinomi:

$$H(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + \\ + a_4y^2 + a_5xy, \qquad (22)$$

– bilinearni polinomi (hiperbolički paraboloid):

$$H(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy, \quad (23)$$

– linearni polinomi (trougaona površ):

$$H(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y \quad (24)$$

u postupku osnivanja, oblikovanja i primjene DMR i njihovih funkcionala.

Konačni elementi

Osnovu interpolacije konačnim elementima predstavlja podjela fizičke površi Zemlje na elementarne površi ili konačne četvorougaone i trougaone površi.

U mreži od i tačaka može se obrazovati $\{k = i - 2\}$ trouglova, za koje se određuju tri faktora razmjera s_i $i \in [1, 3]$ što je $(3i - 6)$ nepoznatih vrijednosti veličina. Funkcija $H(x, y)$, koja aproksimira trougaonu površ:

$$H(x,y) = \sum_{1}^{3} s_i d(PP_i);$$

$$H(x,y) = \sum_{1}^{3} s_i \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \quad (25)$$

u oblasti $(x, y) \in D \subset R^2$ ima zajednička rastojanja za dva trougla, odakle slijedi i uslov: $d(P_iP_i) = 0$.

Tačnost aproksimacije zavisi od prostorne strukture, gustine i tačnosti izvornih podataka, koja se može poboljšati primjenom visina određenih tačnijim metodama, npr. geometrijskim ili GSP/geometrijskim nivelmanom.

Sfernoharmonijske funkcije

Globalni reljef Zemlje (slika 3 [1]), na osnovu skupova srednjih vrijednosti nadmorskih visina, može se predstaviti sfernim funkcijama $Y_n(\bar{\varphi}, \lambda)$:

$$Y_n(\bar{\varphi},\lambda) = a_{n0}P_n(\sin\bar{\varphi}) + \sum_{m=1}^{n} (\bar{a}_{nm}\cos m\lambda + \bar{b}_{nm}\sin m\lambda)\,\bar{P}_{nm}(\sin\bar{\varphi}) \quad (26)$$

primjenjujući sferne geocentričke koordinate $\bar{\varphi}$, λ i Legendreove pridružene ortonormirane funkcije prve vrste $\bar{P}_{nm}(\sin\bar{\varphi})$ [7].

Ortonormirani sfernoharmonijski koeficijenti mogu se izraziti pomoću jedinične sfere σ:

$$\begin{Bmatrix} \bar{a}_{nm} \\ b_{nm} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} Y_n(\bar{\varphi},\lambda) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} \bar{P}_{nm}$$

$$(\sin\bar{\varphi})\, d\sigma \quad (27)$$

gdje je $d\sigma = \cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda$ elemenat sfere σ, poluprečnika $R = 1$.

Pri sfernoj aproksimaciji Zemlje fizička površ $S(R + H(\bar{\varphi},\lambda), \bar{\varphi},\lambda))$ može se izraziti sfernoharmonijskom funkcijom $H_{nm}(\bar{\varphi},\lambda)$ [8]:

$$H_{nm}(\bar{\varphi},\lambda) = R\sum_{m=1}^{n} (\bar{g}_{nm}\cos m\lambda +$$

$$+ \bar{h}_{nm}\sin m\lambda)\,\bar{P}_{nm}(\sin\bar{\varphi}) \quad (28)$$

koja predstavlja sfernoharmonijski razvoj reljefa površi Zemlje, u cjelini ili „dio po dio".

Za reljef kopnene površi Zemlje, sfernoharmonijski ortonormirani koeficijenti izračunavaju se pomoću izraza:

$$\begin{Bmatrix} \bar{g}_{nm} \\ \bar{h}_{nm} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi R} \iint_{\sigma} H(\bar{\varphi},\lambda) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} \bar{P}_{nm}$$

$$(\sin \bar{\varphi})\, d\sigma \qquad (29)$$

gde je σ sferna aproksimacija kopnenog dijela površi.

Zemlja se može posmatrati kao „blago" deformisana sfera koeficijenta deformacije ε (H):

$$\varepsilon(H) = \frac{t}{R} \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{n} (\bar{g}_{nm} \cos m\lambda +$$

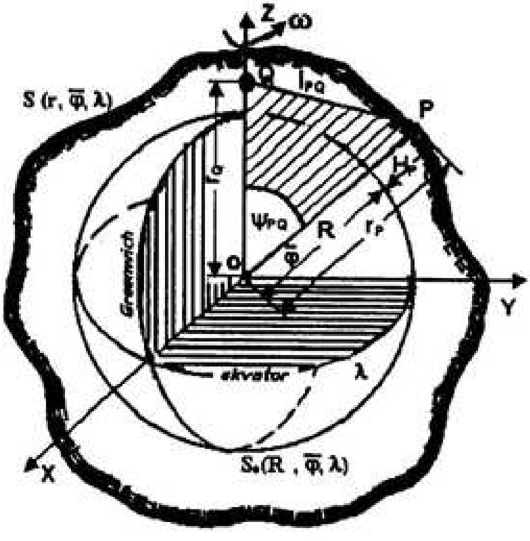
$$+ \bar{h}_{nm} \sin m\lambda)\, \bar{P}_{nm} (\sin \bar{\varphi})$$

$$R = 6371 \text{ km} \qquad (30)$$

$0 \leq t \leq 100$, (parametar visina)

Na slici 3 predstavljen je model globalnog reljefa Zemlje pri $t = 100$ i $\{n \times m\} = \{180 \times 180\}$.

Za $t = 0$ Zemlja se aproksimira sferom poluprečnika $R = 6371$ km, a ako je $t = 100$ dobija se najveća vrijednost nadmorske visine površi Zemlje $H_{nm}(\varphi, \lambda) = 8752$ m u oblasti Himalaja.



Sl. 3 – Sfernoharmonijski model reljefa Zemlje

Kao podintegralna funkcija H (φ, λ) može se primjeniti bilo koji izraz od (1) do (10), pri sfernoj ili ravnoj aproksimaciji vertikalne referentne površi, imajući u vidu međuzavisnost elementarnih površi:

$$R^2 d\sigma = R^2 \cos\varphi\, d\varphi\, d\lambda \quad R^2 d\sigma = dx\, dy$$

koja proizilazi iz usvojene aproksimacije i parametrizacije oblasti numeričke integracije.

Ostale funkcije aproksimacija

Aproksimacije fizičke površi Zemlje analitičkim izrazima, ostvaruju se, pored prethodno opisanih, i složenijim metodama interpolacije zavisno od: informatičke podrške, zahtjevane tačnosti, prostorne strukture reljefa, raspoloživih podataka, itd.

Interpolacija kolokacijom najmanjih kvadrata (LSC – Least Squares Collocation) zasniva se na linearnoj povezanosti $\{q\}$ osnovnih (baznih) funkcija [9]:

$$H(x,y) \approx F(P_i) = \sum_{1}^{q} b_k \Phi_k (P_i)$$

$$k \in [1,q] \qquad (31)$$

koje predstavljaju $\{q\}$ linearnih jednačina sa $\{q\}$ nepoznatih veličina, i imaju jedinstveno rješenje.

Ako su zadate vrijednosti funkcije $H(P) = H(x,y)$ q tačaka, $P_i(x_i, y_i, H_i(x,y))$ $i \in [1,q]$ tada se zahtijeva da u datim tačkama q aproksimacija $\Phi_i(P_i)$ tačno predstavlja funkciju H(x, y). Označavajući:

$$\Phi(P_i) = H(P_i) = F_i \quad i \in [1, q] \qquad (31a)$$

dobijaju se iz (31) sljedeći uslovi:

$$\sum_{1}^{q} A_{ik} b_k = F_i \quad A_{ik} = \Phi_k(P_i) \tag{32}$$

iz kojih proizilazi {q x q} sistem linealnih jednačina. Rješavanjem sistema određuju se koeficijenti b_k i dobijaju funkcije F_i (P_i) koje aproksimiraju fizičku površ Zemlje.

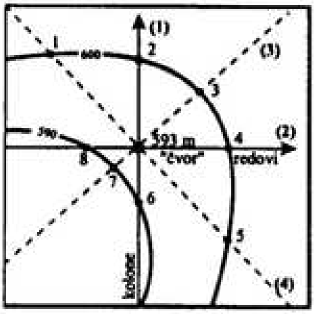
Interpolacija metodom najmanjih kvadrata omogućava predstavljanje reljefa kovarijacionim funkcijama C (P_iP_k) u okolini materijalnih tačaka:

$$C(P_iP_k) = C(0)\exp.\left\{-\left[\frac{d(P_iP_k)}{c}\right]^2\right\}$$

$$C(0) = D(P_iP_k) = \sigma_{ik}^2 \text{ za } d\,(P_iP_k) = 0 \tag{33}$$

$$c = d(P_iP_k) \,/\, \sqrt{\ln C\,(0) - \ln C\,(P_iP_k)}$$

Interpolacija linearnim spline funkcijama, po redovima, kolonama i dijagonalama grid ili TIN-grid DMR, obezbjeđuje zadovoljavajuće funkcije aproksimacija površi, posebno ako se iskoriste četiri pravca i poznate visine osam tačaka, slika 4 [1].



Sl. 4 – Određivanje visina referentnih tačaka DMR spline funkcijama

Zaključak

Izbor metoda interpolacije i aproksimacija linija i površinskih elemenata reljefa Zemlje, u postupku oblikovanja DMR, uslovljeni su zahtjevima primjene i tačnosti modela. Načelno, obrazovanje referentne strukture DMR vrši se primjenom tačnijih interpolacionih metoda (npr. spline i kovarijacionim funkcijama), dok se pri primjeni DMR koriste metode linearnih interpolacija.

Pri obrazovanju referentnih tačaka DMR, interpolacije i aproksimacije moraju obezbijediti očuvanje tačnosti izvornih podataka. Poboljšanja se mogu ostvariti primjenom većih skupova podataka, geometrijskog nivelmana, GPS/nivelmana, i sl.

Izbor metoda interpolacije i funkcije aproksimacije, pri primjeni DMR, prilagođava se zahtjevanoj tačnosti funkcionala DMR, raspoloživoj informatičkoj podršci, oblasti primjene modela i sl.

Literatura:

[1] Višnjić, R.: Digitalni model reljefa – primjena kod određivanja geoida gravimetrijskom metodom, magistarska teza, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Odsek za geodeziju, 1999.

[2] Weibel, R., Heller, M.: Digital Terrain Modelling, GIS, Principles and Applications, 1993.

[3] Višnjić, R.: Digitalni model reljefa, Vojnotehnički glasnik, 6/97, Beograd, 1997.

[4] Petrović, D.: Izrada digitalnog modela reljefa, CAOP VGI, stručni izvještaj, Beograd, 1988.

[5] Mičić, V., Trifunović, M.: Matematika I, Naučna knjiga, Građevinski fakultet, Beograd, 1988.

[6] Kraus, K.: Photogrametrie, Band 2, Theorie und Praxis Auswerte Systeme, FDV, Bonn, 1984.

[7] Mitrinović, S., Kečkić, D.: Jednačine matematičke fizike, Građevinska knjiga, Beograd, 1985.

[8] Rapp, R.: Degre variances of the Earth's Potential Topography and ist Isostatic compensation, Bull, Geod., 56, 1982.

[9] Moritz, H.: Kolokacija metodom najmanjih kvadrata, Geodetski list, 4–6, Zagreb, 1988.