Dr Dragan Knežević,
potpukovnik, dipl. inž.
Vojnotehnički institut VJ,
Beograd

ANALITIČKO DEFINISANJE PARAMETARA IMPULSA PRITISKA UDARNIH TALASA PODVODNE EKSPLOZIJE

UDC: 623.454.833:623.566.5]:519.673

Rezime:

Definisan je metod pronalaženja analitičkih izraza pritiska i vremena pozitivne faze udarnih talasa podvodne eksplozije, u zavisnosti od mase eksploziva i rastojanja od centra eksplozije. Za definisanje metoda pronalaženja modela parametara impulsa pritiska udarnih talasa podvodne eksplozije, na osnovu eksperimentalnih podataka korišćene su metode matematičke statistike. Za kvalitativnu ocenu nivoa saglasnosti dobijenih modela sa eksperimentalnim podacima definisani su analitički izrazi koeficijenata parcijalne korelacije i koeficijent višestruke korelacije.

Ključne reči: podvodna eksplozija, udarni talas, parametri udarnih talasa, matematičko modeliranje, metode matematičke statistike, eksperiment, ocena modela, koeficijenti parcijalne i višestruke korelacije.

ANALYTICAL DEFINITION OF PARAMETERS OF PRESSURE MOMENTUM OF UNDERWATER EXPLOSION SHOCK WAVES

Summary:

A method for finding out the analytical expressions of pressure and the time of shock wave positive phase during underwater explosion has been defined as a function of explosive weight and the distance from the explosion centre. The methods of mathematical statistics have been applied to define the method of finding out the model of parameters of pressure momentum of underwater explosion shock waves. The analytical expressions of partial correlation coefficients and the multiple correlation coefficient have been defined for the qualitative evaluation of obtained models accordance with experimental data.

Key words: underwater explosion, shock wave, shock wave parameters, mathematical modelling, mathematical statistics methods, experiment, model evaluation, coefficients of partial and multiple correlation.

Uvod

Cilj istraživanja koje je obuhvaćeno ovim radom, jeste da se definiše algoritam modeliranja pritiska i vremena pozitivne faze udarnih talasa podvodne eksplozije, ocena saglasnosti dobijenih modela $p_i = Km^cR^d$ i $\tau_i = K_1m^{c_1}R^{d_1}$ i rezultata eksperimentalnih istraživanja za p_i i τ_i.

Korišćene oznake:

p_i – pritisak udarnog talasa podvodne eksplozije,

τ_i – vreme pozitivne faze udarnog talasa podvodne eksplozije,

q – specifična energija eksploziva,

m – masa eksploziva,

R – rastojanje mernog mesta od centra eksplozije,
d – najkraće rastojanje centra eksplozije od nivoa vode,
ρ – gustina vode,
t_v – temperatura vode,
f, f_1, f_2, f_3 – funkcije,
A, c, d, A_1, c_1, d_1 – konstante,
N – broj eksperimentalnih jedinica,
a – nivo faktora $m \equiv B$, ($a \equiv n_m$),
b – nivo faktora $R \equiv A$, ($b \equiv n_R$),
n – broj ponovljenih očitavanja amplituda pritiska, vremena pozitivne faze udarnog talasa i registrovanja promene pritiska u vremenu,
G_{max} – računska vrednost za Cohrenov kriterijum,
$\max|S^2_{p_i}$; $\max|S^2_{\tau_i}$ – maksimalna vrednost disperzije rezultata,
$S^2_{p_i}$; $S^2_{\tau_i}$ – disperzija eksperimentalnih rezultata,
$\bar{p}$, $\bar{\tau}$ – aritmetička sredina jedne kombinacije nivoa,
G_{tab} – tabelarna vrednost za Cohrenov kriterijum,
$S^2_{p_{sr}}$; $S^2_{\tau_{sr}}$ – srednja disperzija,
Σp_i – zbir jedne kombinacije nivoa pritiska udarnog talasa,
$\Sigma \tau_i$ – zbir jedne kombinacije nivoa vremena pozitivne faze udarnog talasa,
$\Sigma S^2_{p_i}$; $\Sigma S^2_{\tau_i}$ – zbir disperzija eksperimentalnih rezultata,
OS – opšta suma,
OSK – opšta suma kvadrata,
SKF – suma kvadrata faktora,
SKA – suma kvadrata za faktor A,
SKB – suma kvadrata za faktor B,
SKAB – suma kvadrata za međudejstvo AB,
SKG – suma kvadrata za grešku,
SK – srednji kvadrat,
V_{0A}, V_{0B}, V_{0AB} – parametar koji definiše odnos srednjeg kvadrata faktora A, faktora B, međudejstva AB i srednjeg kvadrata greške,
F – Fisherov kriterijum,
n_1 – stepen slobode faktora A,
n_2 – stepen slobode faktora B,
n_3 – stepen slobode međudejstva faktora AB,
n_4 – stepen slobode greške,
ε, ε_1 – greška eksperimenta,
a_0, a_1, a_2, – rešenja sistema jednačina,
a_{0_1}, a_3, a_4, – rešenja sistema jednačina,
V_{01} – koeficijent odnosa disperzija za pritisak udarnog talasa,
V_{02} – koeficijent odnosa disperzija za vreme pozitivne faze udarnog talasa,
$S^2_{nead_1}$ – disperzija neadekvatnosti za pritisak udarnog talasa,
$S^2_{nead_2}$ – disperzija neadekvatnosti za vreme pozitivne faze udarnog talasa,
f – broj članova regresivnog polinoma,
p_{rac} – vrednost pritiska udarnog talasa računata na osnovu analitičkog izraza, dobijenog regresivnom analizom, metodom najmanjih kvadrata, na osnovu eksperimentalnih podataka za p_i,
τ_{rac} – vreme pozitivne faze udarnog talasa računatog na osnovu analitičkog izraza, dobijenog regresivnom analizom, metodom najmanjih kvadrata, na osnovu eksperimentalnih podataka za τ_i,
$\bar{p}_i$ – aritmetička sredina jedne kombinacije pritiska,
$\bar{\tau}_i$ – aritmetička sredina jedne kombinacije nivoa vremena pozitivne faze udarnog talasa,
n_5 – stepen slobode za disperziju neadekvatnosti,
F_1, F_2 – Fisherov kriterijum,
$R_{i1 \cdot 2}$ – koeficijent višestruke korelacije,

r_{i1}, r_{i2}, $r_{i2\cdot1}$ – koeficijenti parcijalne korelacije,
A′, A_1' – konstante.

Planiranje eksperimenta

Da bi se ostvario postavljeni cilj potrebno je doći do funkcionalnih veza između pritiska p_i odnosno vremena τ_i pozitivne faze udarnih talasa podvodne eksplozije, mase m eksploziva i rastojanja R mernog mesta od centra eksplozije. Pritisak p_i udarnih talasa i vreme τ_i pozitivne faze udarnih talasa u opštem slučaju su funkcija nekoliko parametara [1 do 8]:

$$p_i = f(q, m, R, d, \rho, t_v) \qquad (1)$$

$$\tau_i = f_1(q, m, R, d, \rho, t_v) \qquad (2)$$

Cilj istraživanja opredeljuje parametre (q, d, ρ, t_v) tako da su konstantni pri eksperimentu.

Pritisak p_i i vreme τ_i pozitivne faze udarnih talasa funkcija su dva parametra, oblika:

$$p_i = f_2(m, R) \qquad (3)$$

$$\tau_i = f_3(m, R) \qquad (4)$$

Funkcionalna zavisnost (3) i (4) može da se napiše u obliku, [8 do 21]:

$$p_i = Km^cR^d \qquad (5)$$

$$\tau_i = K_1m^{c_1}\, R^{d_1} \qquad (6)$$

gde je:

K, c, d, K_1, c_1, d_1 – konstante,
m – masa eksploziva,
R – rastojanje mernog mesta od centra eksplozije.

Za definisanje analitičkih izraza pritiska p_i i vremena τ_i pozitivne faze udarnih talasa podvodne eksplozije, funkcionalnih zavisnosti (5), (6) potrebno je sačiniti planove eksperimentalnih istraživanja.

Eksperiment se sastoji u tome da se za n_m – nivoa mase eksploziva na n_R – nivoa rastojanja mernih mesta od centra

Tabela 1

Plan eksperimenta trodimenzionalne veze, oblika $p_i = Km^cR^d$

Masa eksploziva m (kg)	Rastojanje mernog mesta od centra eksplozije R (m)	Pritisak udarnog talasa p_i (bar)		
		Merenje		
		1	2	3
m_1	R_1			
	...			
	R_{n_R}			
⋮	R_1			
	...			
	R_{n_R}			
m_{n_m}	R_1			
	...			
	R_{n_R}			

Tabela 2

Plan eksperimenta trodimenzionalne veze, oblika $\tau_i = K_1m^{c_1}R^{d_1}$

Masa eksploziva m (kg)	Rastojanje mernog mesta od centra eksplozije R (m)	Vreme pozitivne faze udarnog talasa τ_i (ms)		
		Merenje		
		1	2	3
m_1	R_1			
	...			
	R_{n_R}			
⋮	R_1			
	...			
	R_{n_R}			
m_{n_m}	R_1			
	...			
	R_{n_R}			

eksplozije, registruju amplitude pritiska p_i vremena τ_i pozitivne faze udarnih talasa i tok promene pritiska p_i u vremenu.

Ovde se radi o dvofaktornom eksperimentu. Broj eksperimentalnih jedinica iznosi:

$$N = abn \quad (7)$$

gde je:

$a = n_m$ – broj nivoa mase eksploziva,

$b = n_R$ – broj nivoa rastojanja mernih mesta od centra eksplozije,

n – broj nivoa ponovljenih očitavanja amplituda pritiska p_i, vremena τ_i pozitivne faze udarnog talasa i promena toka pritiska p_i u vremenu.

Randomizacija redosleda eksperimentalnih jedinica

Randomizaciju, planiranje i izvođenje eksperimentalnih istraživanja potrebno je izvršiti po principu naučnog eksperimenta. Randomizacija se vrši odabiranjem brojeva iz tabele slučajnih brojeva [16, 17, 19, 20, 21], a slučajnim izborom redosleda izvođenja eksperimentalnih jedinica izbegava se uticaj sistemskih grešaka.

Prezentacija rezultata merenja

Sređeni rezultati merenja amplituda pritiska p_i i vremena τ_i pozitivne faze udarnih talasa prikazuju se tabelarno prema planu eksperimentalnih istraživanja u tabelama 5 i 6.

Broj eksperimentalnih jedinica u primeru iznosi:

$$N = abn$$

Tabela 3

Oznake eksperimentalnih jedinica

m (kg)	R (m)	Merenje		
		1	2	3
m_1	R_1	1	10	19
	R_2	2	11	20
	R_3	3	12	21
m_2	R_1	4	13	22
	R_2	5	14	23
	R_3	6	15	24
m_3	R_1	7	16	25
	R_2	8	17	26
	R_3	9	18	27

Tabela 4

Slučajni brojevi

12	15	3
10	6	5
16	9	14
13	2	24
17	22	23
11	19	20
4	8	26
27	25	1
21	7	18

Tabela 5

Plan prikaza rezultata merenja amplituda pritiska p_i

Masa eksploziva m (kg)	Rastojanje mernog mesta od centra eksplozije R (m)	Pritisak udarnog talasa p_i (bar)		
		Merenje		
		1	2	3
m_1	R_1	p_{12}	p_{15}	p_3
	R_2	p_{10}	p_6	p_5
	R_3	p_{16}	p_9	p_{14}
m_2	R_1	p_{13}	p_2	p_{24}
	R_2	p_{17}	p_{22}	p_{23}
	R_3	p_{11}	p_{19}	p_{20}
m_3	R_1	p_4	p_8	p_{26}
	R_2	p_{27}	p_{25}	p_1
	R_3	p_{21}	p_7	p_{18}

Tabela 6

Plan prikaza rezultata merenja vremena pozitivne faze udarnih talasa

Masa eksploziva m (kg)	Rastojanje mernog mesta od centra eksplozije R (m)	Vreme pozitivne faze udarnog talasa τ_i (ms)		
		Merenje		
		1	2	3
m_1	R_1	τ_{12}	τ_{15}	τ_3
	R_2	τ_{10}	τ_6	τ_5
	R_3	τ_{16}	τ_9	τ_{14}
m_2	R_1	τ_{13}	τ_2	τ_{24}
	R_2	τ_{17}	τ_{22}	τ_{23}
	R_3	τ_{11}	τ_{19}	τ_{20}
m_3	R_1	τ_4	τ_8	τ_{26}
	R_2	τ_{27}	τ_{25}	τ_1
	R_3	τ_{21}	τ_7	τ_{18}

gde je:

$a = n_m$ – broj nivoa mase eksploziva,

$b = n_R$ – broj nivoa rastojanja mernih mesta od centra eksplozije,

n – broj nivoa ponovljenih očitavanja amplituda pritiska, vremena pozitivne faze udarnog talasa i toka promene pritiska u vremenu.

U konkretnom primeru plana eksperimentalnih istraživanja broj eksperimentalnih jedinica iznosi:

$$N = a\,b\,n = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

pri čemu je:

$$a \equiv n_m = 3;\ b \equiv n_R = 3 \text{ i } n = 3$$

Metode matematičke statistike za obradu eksperimenta

Za nalaženje analitičkih izraza pritiska p_i i vremena τ_i pozitivne faze udarnih talasa podvodne eksplozije a na osnovu eksperimentalnih podataka prikazanih prema planovima eksperimentalnih istraživanja u tabelama 5 i 6, koriste se metode matematičke statistike [16 do 22]:

– provera jednorodnosti disperzija na osnovu Cohrenovog kriterijuma, tj. provera normalnosti raspodele izmerene amplitude pritiska p_i, vremena τ_i pozitivne faze udarnih talasa;

– disperzivna analiza, pomoću koje se na osnovu Fisherovog kriterijuma proverava da li na pritisak p_i i vreme τ_i pozitivne faze znatno utiču mase m eksploziva i R rastojanje mernog mesta od centra eksplozije, pri q = const.;

– regresivna analiza, pomoću koje se dolazi do analitičkih izraza pritiska p_i i vremena τ_i pozitivne faze udarnih talasa, metodom najmanjih kvadrata. Metoda se sastoji u minimizaciji odstupanja eksperimentalnih rezultata od regresivnog polinoma pretpostavljenog oblika;

– provera adekvatnosti analitičkih izraza pritiska p_i i vremena pozitivne faze udarnih talasa podvodne eksplozije, koja se sastoji u poređenju izračunatih odnosa disperzija V_{01} i V_{02} sa Fisherovim kriterijumom F.

Ukoliko na pritisak p_i i vreme τ_i pozitivne faze udarnih talasa podvodne eksplozije znatno utiču masa eksploziva m i rastojanje mernog mesta od centra eksplozije, onda ima smisla pristupiti nalaženju analitičkih izraza:

$$p_i = f_2(m, R)$$
$$\tau_i = f_3(m, R)$$

Za primenu metoda matematičke statistike potrebno je uvesti pojam faktora i nivoa faktora.

Pri eksperimentalnim istraživanjima odabrana su dva faktora, za koje se pretpostavlja da znatno utiču na pritisak p_i i vreme τ_i pozitivne faze udarnih talasa podvodne eksplozije eksploziva, a to su:

faktor $A \equiv R$ – rastojanje mernog mesta od centra eksplozije sa n_R nivoa,
faktor $B \equiv m$ – masa eksploziva sa n_m nivoa.

Tabela 7

Nivoi faktora

Faktor B m (kg)	Faktor A R (m)
m_1	R_1
	...
	R_{n_R}
⋮	R_1
	...
	R_{n_R}
m_{n_m}	R_1
	...
	R_{n_R}

Provera jednorodnosti disperzije

Da bi zaključci disperzivne i regresivne analize bili dobri potrebno je proveriti normalnost raspodele eksperimentom dobijenih podataka amplituda pritiska p_i i vremena τ_i pozitivne faze udarnih talasa.

Normalnost raspodele za p_i i τ_i proverava se preko Cohrenovog kriterijuma o jednorodnosti disperzija. Ukoliko je izračunata vrednost za Cohrenov kriterijum G_{max} manja od propisanog G_{tab} (tabelarno dobijenih podataka) disperzije su jednorodne i raspodela rezultata za p_i i τ_i može se smatrati normalnom.

Računska vrednost za Cohrenov kriterijum na osnovu eksperimentalnih podataka računa se po obrascu, [16 do 21]:

$$G_{max} = \frac{\max|S^2_{p_i}}{\Sigma S^2_{p_i}} \tag{8}$$

$$G_{max_i} = \frac{\max|S^2_{\tau_i}}{\Sigma S^2_{\tau_i}} \tag{9}$$

pri čemu su:
$\max|S^2_{p_i}$; $\max|S^2_{\tau_i}$ – maksimalne vrednosti disperzija rezultata;
$\Sigma S^2_{p_i}$; $\Sigma S^2_{\tau_i}$ – zbir disperzija eksperimentalnih rezultata.

Disperzije eksperimentalnih rezultata definisane su izrazima [16 do 21]:

$$S^2_{p_i} = \frac{1}{n-1}\sum_1^n (p_i - \bar{p})^2 \tag{10}$$

$$S^2_{\tau_i} = \frac{1}{n-1}\sum_1^n (\tau_i - \bar{\tau})^2 \tag{11}$$

pri čemu su $\bar{p}$ i $\bar{\tau}$ aritmetičke sredine jedne kombinacije nivoa definisane izrazima:

$$\bar{p} = \frac{1}{n}\sum_1^n p_i \tag{12}$$

$$\bar{\tau} = \frac{1}{n}\sum_1^n \tau_i \tag{13}$$

sa stepenima slobode $ss = (n-1)$.

Tabelarna vrednost za Cohrenov kriterijum G_{tab} određuje se iz odgovarajućih [21, 22] tabela za stepene slobode $n_1 = (n-1)$ i $n_2 = n_m n_R(n-1)$, pri verovatnoći 95%. Prema planovima rezultata merenja amplituda pritiska p_i i vremena τ_i pozitivne faze udarnih talasa podvodne eksplozije eksploziva, prikazanim u tabelama 5 i 6, za verovatnoću od 95%, Cohrenov kriterijum G_{tab} prema [21, 22], za stepene slobode:

$n_1 = (n-1) = 3 - 1 = 2$, i

$n_2 = a\, b(n-1) = 3 \cdot 3(3-1) = 18$,
iznosi $G_{tab} = 0{,}477$.

Vrednosti aritmetičkih sredina $\bar{p}$, $\bar{\tau}$, i disperzija rezultata $S^2_{p_i}$ i $S^2_{\tau_i}$ mogu da se prikažu tabelarno (tabele 8 i 9).

Tabela 8

Pregled aritmetičkih sredina $\bar{p}_i$ i disperzija rezultata $S^2_{p_i}$

m (kg)	R (m)	$\bar{p}_i$	$S^2_{p_i}$	Stepen slobode (n–1)
m_1	R_1			
	...			
	R_{n_R}			
⋮	R_1			
	...			
	R_{n_R}			
m_{n_m}	R_1			
	...			
	R_{n_R}			
Ukupno: $\sum S^2_{p_i}$				

Tabela 9

Pregled aritmetičkih sredina $\bar{\tau}_i$ i disperzija rezultata $S^2_{\tau_i}$

m (kg)	R (m)	$\bar{\tau}_i$	$S^2_{\tau_i}$	Stepen slobode (n–1)
m_1	R_1			
	...			
	R_{n_R}			
⋮	R_1			
	...			
	R_{n_R}			
m_{n_m}	R_1			
	...			
	R_{n_R}			
Ukupno: $\sum S^2_{\tau_i}$				

Cohrenov kriterijum G_{max} računa se po jednačini (8, 9) i iznosi:

$$G_{max} = \frac{\max|S^2_{p_i}}{\sum S^2_{p_i}}; \quad G_{max_1} = \frac{\max|S^2_{\tau_i}}{\sum S^2_{\tau_i}}$$

Ukoliko su G_{max} i $G_{max_1} < G_{tab}$, sledio bi zaključak:

Disperzije su jednorodne, pa se može smatrati da je raspodela za amplitude pritiska p_i i vremena τ_i pozitivne faze udarnih talasa podvodne eksplozije normalna. Dalje bi se moglo računati sa srednjim disperzijama:

$$S^2_{p_{sr}} = \frac{1}{n_m n_R} \sum S^2_{p_i} \tag{14}$$

$$S^2_{\tau_{sr}} = \frac{1}{n_m n_R} \sum S^2_{\tau_i} \tag{15}$$

odnosno,

$$S^2_{p_{sr}} = \frac{1}{ab} \sum_1^{ab} S^2_{p_i} \tag{16}$$

$$S^2_{\tau_{sr}} = \frac{1}{ab} \sum_1^{ab} S^2_{\tau_i} \tag{17}$$

i stepenima slobode $n_1 = (n - 1)$ i $n_2 = a\,b(n - 1)$, s obzirom na to da je $n_m \equiv a$ i $n_R \equiv b$.

Disperzivna analiza

Pomoću disperzivne analize ispituje se da li na pritisak p_i i vreme τ_i pozitivne faze udarnih talasa podvodne eksplozije znatno utiču masa m eksploziva (faktor B), rastojanje R mernog mesta od centra eksplozije (faktor A) i međudejstvo mR (BA).

Upoređenjem računskih vrednosti parametara V_{0A}, V_{0B} i V_{0AB} (koji definišu odnose srednjeg kvadrata faktora i srednjeg kvadrata greške) sa Fisherovim kriterijumom dobija se odgovor na pitanje o zavisnosti pritiska p_i i vremena τ_i pozitivne faze udarnih talasa od mase eksploziva i rastojanja mernog mesta od centra eksplozije.

Da bi se izvršila navedena analiza potrebno je definisati (izračunati) odgo-

Tabela 10

Pregled (vrednosti) za Σp_i

Masa eksploziva m (kg)	Rastojanje mernog mesta od centra eksplozije R (m)			ΣB
	R_1	R_2	R_3	
m_1	$p_{12}+p_{15}+p_3$	$p_{10}+p_6+p_5$	$p_{16}+p_9+p_{14}$	B_1
m_2	$p_{13}+p_2+p_{24}$	$p_{17}+p_{22}+p_{23}$	$p_{11}+p_{19}+p_{20}$	B_2
$(m_{n_m})m_3$	$p_4+p_8+p_{26}$	$p_{27}+p_{25}+p_1$	$p_{21}+p_7+p_{18}$	B_3
ΣA	A_1	A_2	A_3	$OS=\Sigma p_i$

Tabela 11

Pregled (vrednosti) za $\Sigma \tau_i$

Masa eksploziva m (kg)	Rastojanje mernog mesta od centra eksplozije R (m)			ΣB
	R_1	R_2	R_3	
m_1	$\tau_{12}+\tau_{15}+\tau_3$	$\tau_{10}+\tau_6+\tau_5$	$\tau_{16}+\tau_9+\tau_{14}$	B_1
m_2	$\tau_{13}+\tau_2+\tau_{24}$	$\tau_{17}+\tau_{22}+\tau_{23}$	$\tau_{11}+\tau_{19}+\tau_{20}$	B_2
$(m_{n_m})m_3$	$\tau_4+\tau_8+\tau_{26}$	$\tau_{27}+\tau_{25}+\tau_1$	$\tau_{21}+\tau_7+\tau_{18}$	B_3
ΣA	A_1	A_2	A_3	$OS=\Sigma \tau_i$

varajuće sume kvadrata faktora, greške, srednje kvadrate faktora, pa (vrednosti) parametara V_{0A}, V_{0B} i V_{0AB}.

Matematički model eksperimenata sa dva faktora A i B i sa n ponavljanja na svakom nivou faktora glasi:

$$p_{ijk} = \mu + A_i + B_j + AB_{ij} + \varepsilon_{ijk} \qquad (18)$$

gde je:

μ – istinita vrednost odgovarajuće sveukupnosti,

ε – greška eksperimenta,

A – faktor sa i = 1, 2,... a nivoa faktora,

B – faktor sa j = 1, 2,... b nivoa faktora, i ima k = 1, 2,... n ponavljanja za svaku kombinaciju nivoa faktora.

Ako se uvedu istinite vrednosti odgovarajućih sveukupnosti model će glasiti:

$$\begin{aligned} p_{ijk} - \mu &= (\mu_i - \mu) + (\mu_j - \mu) + \\ &+ (\mu_{ij} - \mu_i - \mu_j + \mu) + (p_{ijk} - \mu_{ijk}) \end{aligned} \qquad (19)$$

Jednačina (19) nema geometrijsku interpretaciju kakvu ima jednofaktorni eksperiment. Identitet bi postojao pod pretpostavkom da je ukupan efekat faktora jednak zbiru efekata faktora A ($\mu_i - \mu$), efekata faktora B ($\mu_j - \mu$), efekata međudejstva i greške eksperimenta.

Zbog postojanja međudejstva rezultat neće nastati prostim zbirom efekata faktora A i B, već će to biti veličina koja ima sopstveno rasipanje rezultata sa svojom istinitom vrednošću μ_{ij}. Od takvog ukupnog efekta se oduzimanjem efekata pojedinih faktora, dobija efekat međudejstva:

$$(\mu_{ij}-\mu)-(\mu_i-\mu)-(\mu_j-\mu)=\mu_{ij}-\mu_i-\mu_j+\mu$$

Ako se istinite vrednosti zamene procenama, odnosno odgovarajućim srednjim vrednostima, dobija se:

$$\begin{aligned} p_{ijk} - \bar{p} &\equiv (\bar{p}_i - \bar{p}) + (\bar{p}_j - \bar{p}) + \\ &+ (\bar{p}_{ij} - \bar{p}_i - \bar{p}_j + \bar{p}) + (p_{ijk} - \bar{p}_{ijk}) \end{aligned} \qquad (20)$$

Ako se jednačina (20) kvadrira i sumira, pri čemu izostaju proizvodi članova, dobija se:

$$\begin{aligned} \sum_i^a \sum_j^b \sum_k^n (p_{ijk}-\bar{p})^2 &= \sum_i^a \sum_j^b \sum_k^n (\bar{p}_i-\bar{p})^2 + \\ &+ \sum_i^a \sum_j^b \sum_k^n (\bar{p}_j-\bar{p})^2 + \sum_i^a \sum_j^b \sum_k^n (\bar{p}_{ijk}-\bar{p}_i-\bar{p}_j-\bar{p})^2 + \\ &+ \sum_i^a \sum_j^b \sum_k^n (p_{ijk}-\bar{p}_{ijk})^2 \end{aligned} \qquad (21)$$

odnosno

$$OSK \equiv SKA + SKB + SKAB + SKG \qquad (22)$$

Opšta suma OS iznosi:

$$(OS)_1 = \Sigma p_i \quad (OS)_2 = \Sigma \tau_i \qquad (23)$$

Suma kvadrata:

$$\sum_{i}^{n_R}\sum_{j}^{n_m}\sum_{k}^{n} p_{ijk}^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} p_{ijk}^2 \quad (24)$$

$$\sum_{i}^{n_R}\sum_{j}^{n_m}\sum_{k}^{n} \tau_{ijk}^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} \tau_{ijk}^2 \quad (25)$$

Opšta suma kvadrata OSK:

$$OSK_1 = \sum_{i}^{n_R}\sum_{j}^{n_m}\sum_{k}^{n} p_{ijk}^2 - \frac{OS_1^2}{N} \quad (26)$$

$$OSK_2 = \sum_{i}^{n_R}\sum_{j}^{n_m}\sum_{k}^{n} \tau_{ijk}^2 - \frac{OS_2^2}{N} \quad (27)$$

sa stepenima slobode (a b n – 1).

Suma kvadrata za faktor A SKA:

$$SKA_1 = \sum_{i=1}^{a} \frac{SA_1^2}{nb} - \frac{OS_1^2}{nab} \quad (28)$$

$$SKA_2 = \sum_{i=1}^{a} \frac{SA_2^2}{nb} - \frac{OS_2^2}{nab} \quad (29)$$

sa stepenima slobode $(a - 1) = (n_R - 1)$.

Suma kvadrata za faktor B SKB:

$$SKB_1 = \sum_{i=1}^{a} \frac{SB_1^2}{na} - \frac{OS_1^2}{nab} \quad (30)$$

$$SKB_2 = \sum_{i=1}^{b} \frac{SB_2^2}{na} - \frac{OS_2^2}{nab} \quad (31)$$

sa stepenima slobode $(b - 1) = (n_m - 1)$.

Suma kvadrata za međudejstvo AB SKAB:

$$SKAB_1 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \frac{SAB_1^2}{n} - \left[SKA_1 + SKB_1 + \frac{OS_1^2}{nab}\right] \quad (32)$$

$$SKAB_2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \frac{SAB_2^2}{n} - \left[SKA_2 + SKB_2 + \frac{OS_2^2}{nab}\right] \quad (33)$$

sa stepenima slobode $(a - 1)(b - 1) = (n_R - 1)(n_m - 1)$.

Suma kvadrata za grešku SKG:

$$SKG_1 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} p_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \frac{SAB_1^2}{n} \quad (34)$$

$$SKG_2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} \tau_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} \frac{SAB_2^2}{n} \quad (35)$$

sa stepenima slobode $ab(n - 1) = n_R n_m (n - 1)$.

Suma SKAB je suma svih ponovljenih rezultata za istu kombinaciju nivoa faktora.

Kombinacijom definisanih jednačina, suma kvadrata za grešku, SKG ima oblik:

$$SKG = OSK - SKA - SKB - SKAB \quad (36)$$

odnosno:

$$SKG_1 = OSK_1 - SKA_1 - SKB_1 - SKAB_1 \quad (37)$$

$$SKG_2 = OSK_2 - SKA_2 - SKB_2 - SKAB_2 \quad (38)$$

Srednji kvadrat SK:

$$SK = \frac{SK\,faktora}{ss - 1} \quad (39)$$

Parametar V_0:

$$V_0 = \frac{(srednji\ kvadrat)\ SK}{SKG} \quad (40)$$

Izračunate sume kvadrata za faktore A, B, međudejstva AB, srednji kvadrat faktora, greške, parametar V_0, Fisherov kriterijum F pri verovatnoći 95% ili 99%, mogu se prikazati tabelarno (vidi tabele 12 i 13).

Tabela 12

Disperzivna analiza za p_i

Izvor promene	Stepen slobode	Suma kvadrata	Srednji kvadrat	Parametar V_0	F za V=0,99
Faktor A	(a – 1) = 2				6,01
Faktor B	(b – 1) = 2				6,01
Međudejstvo AB	(a – 1)(b – 1) = 4				4,58
Greška	ab(n – 1) = 18			–	–
Suma	26	–	–	–	–

Tabela 13

Disperzivna analiza za τ_i

Izvor promene	Stepen slobode	Suma kvadrata	Srednji kvadrat	Parametar V_0	F za V=0,99
Faktor A	(a – 1) = 2				6,01
Faktor B	(b – 1) = 2				6,01
Međudejstvo AB	(a – 1)(b – 1) = 4				4,58
Greška	ab(n – 1) = 18			–	–
Suma	26	–	–	–	–

Fisherovi kriterijumi (F) iz tabele [21] za verovatnoću V i stepene slobode 2 i 18, odnosno 4 i 18, iznose: $F_1 = 6,01$, odnosno $F_2 = 4,58$ za međudejstvo, gde je prema planu merenja amplituda pritiska p_i i vremena τ_i pozitivne faze udarnih talasa (tabele 5 i 6):

$n_1 = (a - 1) = 2$ – stepen slobode faktora A,

$n_2 = (b - 1) = 2$ – stepen slobode faktora B,

$n_3 = (a - 1)\ (b - 1) = 4$ – stepen slobode međudejstva faktora AB,

$n_4 = ab(n - 1) = 18$ – stepen slobode greške.

Ukoliko su parametri V_{0A}, V_{0B} i V_{0AB} veći od Fisherovog kriterijuma, to faktori A, B i međudejstvo faktora AB znatno utiču na pritisak p_i i vreme τ_i pozitivne faze udarnih talasa. To znači da ima smisla pristupiti nalaženju analitičkog izraza pritiska p_i i vremena τ_i udarnih talasa u funkciji mase ekploziva i rastojanja mernog mesta od centra eksplozije.

Regresivna analiza

Regresivnom analizom definisaće se put nalaženja analitičkih izraza pritiska p_i i vremena τ_i pozitivne faze udarnih talasa u zavisnosti od m i R, koristeći eksperimentalne rezultate p_i i τ_i.

Postoji više analitičkih pretpostavki [1 – 4, 11, 20] za p_i i τ_i. Jedna od njih, pogodna za primenu, bila bi:

$$p_i = Am^cR^d;\ \tau_i = A_1m^{c_1}R^{d_1} \qquad (41)$$

Ako se jednačine (41) logaritmuju:

$$\begin{aligned} \ln p_i &= \ln A + c\ln m + d\ln R \\ \ln \tau_i &= \ln A_1 + c_1\ln m + d_1\ln R \end{aligned} \qquad (42)$$

i uvedu smene:

$Y = \ln p_i$; $a_0 = \ln A$; $a_1 = c$;
$X_1 = \ln m$; $a_2 = d$; $X_2 = \ln R$

$Y_1 = \ln \tau_i$; $a_{0_1} = \ln A_1$; $a_3 = c_1$
$X_1 = \ln m$; $a_4 = d_1$; $X_2 = \ln R$

dobijaju se jednačine linearne regresije oblika:

$$\begin{aligned} Y &= a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 \\ Y_1 &= a_{0_1} + a_3X_1 + a_4X_2 \end{aligned} \tag{43}$$

Ako se uzmu u obzir greške eksperimenta ε i ε_1, dobiće se izrazi:

$$\begin{aligned} Y &= a_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \varepsilon \\ Y_1 &= a_{0_1} + a_3X_1 + a_4X_2 + \varepsilon_1 \end{aligned} \tag{44}$$

Određivanje konstanti (a_0, a_1, a_2) i (a_{0_1}, a_3, a_4) vrši se obradom eksperimentalnih rezultata, metodom najmanjih kvadrata [16–31]. Metoda se sastoji u minimiziranju odstupanja eksperimentalnih rezultata od regresivnih polinoma:

$$|\varepsilon(Y_i - a_0 - a_1X_{1i} - a_2X_{2i})^2|_{min} = (\varepsilon^2)_{min} \tag{45}$$

$$|\varepsilon_1(Y_{1i} - a_{0_1} - a_3X_{1i} - a_4X_{2i})^2|_{min} = (\varepsilon_1^2)_{min} \tag{46}$$

Minimalna odstupanja nalaze se diferenciranjem gornjih funkcija po traženim parametrima i izjednačavanjem izvoda sa nulom. Nakon sređivanja dobija se sistem jednačina:

$$\begin{aligned} &Na_0 + a_1 \sum X_{1i} + a_2 \sum X_{2i} = \sum Y_i \\ &a_0\sum X_{1i} + a_1\sum X_{1i}^2 + a_2\sum X_{2i}X_{1i} = \sum X_{1i}Y_i \\ &a_0\sum X_{2i} + a_1\sum X_{1i}X_{2i} + a_2\sum X_{2i}^2 = \Sigma X_{2i}Y_i \end{aligned} \tag{47}$$

odnosno,

$$\begin{aligned} &Na_{0_1} + a_3\sum X_{1i} + a_4\sum X_{2i} = \sum Y_{1i} \\ &a_{0_1}\sum X_{1i} + a_3\sum X_{1i}^2 + a_4\sum X_{1i}X_{2i} = \sum X_{1i}Y_{1i} \\ &a_{0_1}\sum X_{2i} + a_3\sum X_{1i}X_{2i} + a_4\sum X_{2i}^2 = \sum X_{2i}Y_{1i} \end{aligned} \tag{48}$$

Posle obrade eksperimentalnih podataka, prikazanih prema tabelama 6 i 7, rešenjem sistema jednačina dobijaju se analitički izrazi pritiska p_i i vremena τ_i pozitivne faze udarnih talasa, oblika:

$$p_i = A'm^{a_1}R^{a_2} \tag{49}$$

$$\tau_i = A_1'm^{a_3}R^{a_4} \tag{50}$$

Potrebno je izvršiti proveru adekvatnosti analitičkih izraza (49) i (50) pritiska p_i i vremena τ_i pozitivne faze udarnih talasa podvodne eksplozije eksploziva.

Provera adekvatnosti analitičkih izraza pritiska i vremena pozitivne faze udarnih talasa

Provera adekvatnosti analitičkih izraza pritiska p_i i vremena τ_i udarnih talasa vrši se poređenjem koeficijenata odnosa disperzije V_{01}, V_{02} sa Fisherovim kriterijumom F, [16 do 21]:

$$V_{01} = \frac{S^2_{nead_1}}{S^2_{p_{sr}}} \tag{51}$$

$$V_{02} = \frac{S^2_{nead_2}}{S^2_{\tau_{sr}}} \tag{52}$$

pri čemu su:

$S^2_{nead_1}$, $S^2_{nead_2}$ – disperzije neadekvatnosti,

$S^2_{p_{sr}}$, $S^2_{\tau_{sr}}$ – srednje disperzije.

Disperzije neadekvatnosti računaju se po obrascu, [16 do 21]:

$$S^2_{nead_1} = \frac{1}{N - f}(\bar{p}_i - p_{rac})^2 \tag{53}$$

$$S^2_{nead_2} = \frac{1}{N - f}(\bar{\tau}_i - \tau_{rac})^2 \tag{54}$$

Tabela 14

Provera adekvatnosti analitičkog izraza (49)

m (kg)	R (m)	$\bar{p}$	p_{rac}	$(\bar{p} - p_{rac})^2$
m_1	R_1			
	...			
	R_{n_R}			
$\vdots$	R_1			
	...			
	R_{n_R}			
m_{n_m}	R_1			
	...			
	R_{n_R}			
Ukupno: $\Sigma(\bar{p} - p_{rac})^2$				

Tabela 15

Provera adekvatnosti analitičkog izraza (50)

m (kg)	R (m)	$\bar{\tau}$	τ_{rac}	$(\bar{\tau} - \tau_{rac})^2$
m_1	R_1			
	...			
	R_{n_R}			
$\vdots$	R_1			
	...			
	R_{n_R}			
m_{n_m}	R_1			
	...			
	R_{n_R}			
Ukupno: $\Sigma(\bar{\tau} - \tau_{rac})^2$				

Stepen slobode za disperzije neadekvatnosti je N – f
gde je:

N – broj eksperimentalnih jedinica,

f – broj članova regresivnog polinoma,

p_{rac} – vrednost pritiska u frontu udarnih talasa računata na osnovu analitičkog izraza (49),

τ_{rac} – vreme pozitivne faze udarnih talasa računato na osnovu analitičkog izraza (50),

$\bar{p}_i$ – aritmetička sredina jedne kombinacije nivoa pritiska,

$\bar{\tau}_i$ – aritmetička sredina jedne kombinacije nivoa vremena pozitivne faze udarnih talasa.

Podaci za $\bar{p}_i$, p_{rac}, $(\bar{p}_i - p_{rac})^2$ i $\bar{\tau}_i$, τ_{rac}, $(\bar{\tau}_i - \tau_{rac})$ mogu se sračunati i dati u tabelama 14 i 15.

Disperzije neadekvatnosti računate po (53) i (54) iznose:

$$S^2_{nead_1} = \frac{1}{N-f}\sum(\bar{p}_i - p_{rac})^2 \quad \text{i}$$

$$S^2_{nead_2} = \frac{1}{N-f}\sum(\bar{\tau}_i - \tau_{rac})^2$$

Koeficijenti odnosa disperzija V_{01} i V_{02} definisani sa (51), (52) iznose:

$$V_{01} = \frac{S^2_{nead_1}}{S^2_{\bar{p}_{sr}}}; \quad V_{02} = \frac{\sum(\bar{p}-p_{rac})^2}{(N-f)S^2_{\bar{p}_{sr}}} \tag{55}$$

$$V_{02} = \frac{S^2_{nead_2}}{S^2_{\bar{\tau}_{sr}}}; \quad V_{02} = \frac{\sum(\bar{\tau}-\tau_{rac})^2}{(N-f)S^2_{\bar{\tau}_{sr}}} \tag{56}$$

Fisherovi kriterijumi za verovatnoću od 95% i 99% i stepene slobode: $n_5 = N - f$ i $n_2 = ab(n-1) \equiv n_R n_m(n-1)$ prema [21] iznose F_1 i F_2. Ukoliko su koeficijenti V_{01} i V_{02} manji od Fisherovih kriterijuma F_1 i F_2, sledi zaključak: dobijeni analitički izrazi pritiska i vremena pozitivne faze udarnih talasa su adekvatni verovatnoćom od 95%, odnosno 99%.

Numerička ocena saglasnosti dobijenih analitičkih izraza pritiska i vremena pozitivne faze udarnih talasa sa eksperimentalnim rezultatima dobija se preko koeficijenta parcijalne i višestruke korelacije funkcionalne veze oblika

$p_i = Am^cR^d$ i $\tau_i = A_1m^{c_1}R^{d_1}$.

Numerička ocena adekvatnosti analitičkih izraza pritiska i vremena pozitivne faze udarnih talasa

Numerička ocena adekvatnosti analitičkih izraza pritiska i vremena pozitivne faze udarnih talasa, dobijenih metodom najmanjih kvadrata, sa eksperimentalnim rezultatima dobija se preko koeficijenata parcijalne i višestruke korelacije.

Regresivnom analizom, metodom najmanjih kvadrata, nađeni su analitički izrazi (49) i (50) pritiska i vremena pozitivne faze udarnih talasa u zavisnosti od masa m eksploziva i rastojanja R mernog mesta od centra eksplozije, na osnovu eksperimentalnih podataka za p_i, odnosno τ_i. U slučaju trodimenzionalne funkcionalne zavisnosti pritiska i vremena pozitivne faze udarnih talasa, $p_i = Km^cR^d$ i $\tau_i = K_1m^{c_1}R^{d_1}$ (slučaj dve nezavisno promenljive m i R), koeficijent višestruke korelacije $R_{i\cdot 12}$ tražen pomoću koeficijenta parcijalne korelacije r_{i1}, i $r_{i2\cdot 1}$ ima oblik, [20, 22]:

$$R_{i\cdot 12} = \sqrt{1 - [(1 - r_{i1}^2)\,(1 - r_{i2\cdot 1}^2)]} \qquad (57)$$

Koeficijenti parcijalne korelacije definišu se na osnovu sistema normalnih jednačina (47). Sistem jednačina (47), matrično predstavljen, ima oblik:

$$\begin{bmatrix} N & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{2i}X_{1i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B(0) \\ B(1) \\ B(2) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{1i}Y_i \\ \sum X_{2i}Y_i \end{bmatrix} \qquad (58)$$

Za potrebe definisanja koeficijenata parcijalne i višestruke korelacije funkcionalnih veza oblika $p_i = Km^cR^d$ i $\tau_i = K_1m^{c_1}R^{d_1}$ uvedeni su indeksi: pritisku p_i i vremenu τ_i pozitivne faze udarnih talasa dodeljuje se indeks „i“, masi m eksploziva indeks „1“, i rastojanju R mernog mesta od centra eksplozije indeks „2“, [20]:

$$p_i = Km_1^cR_2^d \qquad (59)$$

$$\tau_i = K_1m_1^{c_1}R_2^{d_1} \qquad (60)$$

Koeficijent parcijalne korelacije r_{i1}, koji figuriše u izrazu (57), definiše se izrazom:

$$r_{i1} = \frac{\sum X_{1i}Y_i}{\sqrt{(\sum X_{1i}^2)(\sum Y_i^2)}} = \frac{B(1)}{\sqrt{X(1,1)C(0)}} \qquad (61)$$

Koeficijent parcijalne korelacije $r_{i2\cdot 1}$, koji figuriše u izrazu (57), definiše se izrazom:

$$r_{i2\cdot 1} = \frac{r_{i2} - r_{i1}r_{21}}{\sqrt{(1 - 2_{i1}^2)(1 - e_{21}^2)}} \qquad (62)$$

Koeficijent parcijalne korelacije $R_{i2\cdot 1}$ definiše korelaciju između pritiska p_i udarnih talasa i rastojanja R mernog mesta od centra eksplozije pri konstantnoj masi eksploziva (m = const).

Koeficijenti parcijalne korelacije r_{i2} i r_{21}, koji figurišu u izrazu (62), definišu se izrazima:

$$r_{i2} = \frac{\sum X_{2i}Y_i}{\sqrt{(\sum X_{2i}^2)(\sum Y_i^2)}} = \frac{B(2)}{\sqrt{X(2,2)C(0)}} \qquad (63)$$

$$r_{12} = r_{21} = \frac{\sum X_{1i}X_{2i}}{\sqrt{(\sum X_{1i}^2)(\sum X_{2i}^2)}} = \frac{X(1,2)}{\sqrt{X(1,1)X(2,2)}} \qquad (64)$$

Na osnovu opšteg oblika funkcionalne veze pritiska p_i i vremena τ_i pozitivne faze udarnih talasa, sistema jednačina (47) i (48), analitičkih izraza koeficijenata parcijalne i višestruke korelacije može se izraditi računarski program za pronalaženje analitičkih izraza pritiska p_i i vremena τ_i pozitivne faze udarnih talasa i numeričkih iznosa koeficijenata parcijalne i višestruke korelacije na osnovu eksperimentalnih podataka za p_i i τ_i.

Zaključak

U radu je na originalan način definisan postupak pronalaženja analitičkih izraza pritiska i vremena pozitivne faze udarnih talasa podvodne eksplozije u zavisnosti od mase eksploziva i rastojanja mernog mesta od centra eksplozije.

Za definisanje postupka nalaženja analitičkih izraza pritiska i vremena pozitivne faze udarnih talasa na osnovu eksperimentalnih podataka korišćene su metode matematičke statistike:

– provera jednorodnosti disperzija na osnovu Cohrenovog kriterijuma, tj. provera normalnosti raspodele izmerenih amplituda pritiska i vremena pozitivne faze udarnih talasa;

– disperzivna analiza pomoću koje se na osnovu Fisherovog kriterijuma proverava da li na pritisak i vreme pozitivne faze znatno utiču masa eksploziva i rastojanje mernog mesta od centra eksplozije;

– regresivna analiza, pomoću koje se dolazi do analitičkih izraza pritiska i vremena pozitivne faze udarnih talasa, metodom najmanjih kvadrata;

– provera adekvatnosti analitičkih izraza pritiska i vremena pozitivne faze udarnih talasa podvodne eksplozije, koja se sastoji u poređenju izračunatih odnosa disperzija sa Fisherovim kriterijumom.

Za potrebe definisanja analitičkih izraza pritiska i vremena pozitivne faze udarnih talasa definisani su planovi eksperimentalnih istraživanja trodimenzionalnih funkcionalnih zavisnosti, oblika $p_i = Km^cR^d$ i $\tau_i = K_1m^{c_1}R^{d_1}$.

Odabrana su dva faktora, rastojanje od centra eksplozije sa n_R nivoa i masa eksploziva sa n_m nivoa, za koje se pretpostavlja da znatno utiču na pritisak i vreme pozitivne faze udarnih talasa podvodne eksplozije.

Definisani su analitički izrazi koeficijenata parcijalne i višestruke korelacije trodimenzionalnih funkcionalnih zavisnosti, oblika $p_i = km^cR^d$ i $\tau_i = K_1m^{c_1}R^{d_1}$ za kvalitativnu ocenu nivoa saglasnosti dobijenih analitičkih izraza p_i, τ_i sa eksperimentalnim podacima za p i τ.

Na osnovu ovog rada može se izraditi program za pronalaženje analitičkih izraza pritiska i vremena pozitivne faze udarnih talasa podvodne eksplozije i kvalitativnu ocenu nivoa saglasnosti analitičkih izraza p_i, τ_i sa eksperimentalno dobijenim podacima za p i τ.

Literatura:

[1] Koul, R.: Podvodni vzrivi, IL, Moskva, 1950.

[2] Cole, R. H.: Underwater explosions, Dover publication Inc., New York, 1963.

[3] Mandić, J.: Simulatori impulsa pritiska, doktorska disertacija, Mašinski fakultet Univerziteta u Novom Sadu, Novi Sad, 1974.

[4] Mandić, J.: Ostvarenje udarnog kratkotrajnog impulsa pritiska u udarnim cevima izjednačavajućeg pritiska, Fakultet tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu, Novi Sad, 1976.

[5] Knežević, D., Živanović, M.: Simulatori vazdušnoudarnih talasa klasične i nuklearne eksplozije, Vojnotehnički institut KoV, DE-2995, Beograd, 1976.

[6] Knežević, D.: Simulatori impulsa izjednačavajućeg pritiska reflektovanog vazdušnoudarnog talasa klasične i nuklearne eksplozije, Elaborat o internim ispitivanjima na simulatoru II impulsa reflektovanog vazdušnoudarnog talasa, Vojnotehnički institut KoV, 07-27-71, Beograd, 1982, strana 83.

[7] Knežević, D., Živanović, M.: Simulatori vazdušnoudarnih talasa klasične i nuklearne eksplozije, Vojnotehnički institut KoV, DE-3100, Beograd, 1977, strana 77.

[8] Sinovčić, V., Knežević, D., Živanović, M.: Izveštaj o dovršenju udarne cevi I kao simulatora vazdušnoudarnog talasa klasične i nuklearne eksplozije, Vojnotehnički institut KoV, DE-3099, Beograd, 1978, strana 26.

[9] Voronjec, V., Obradović, N.: Mehanika fluida, Naučna knjiga, Beograd, 1973.

[10] Vujanović, B.: Dinamika, Naučna knjiga, Beograd, 1976.

[11] Šikopanija, V.: Teorija sličnih modela, Fakultet tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu, Novi Sad, 1980.

[12] Duncan, W. J.: Physical Similarity and Dimensional Analysis, E. Arnold, London, 1953.

[13] Hossdorf, H.: Model Analysis of Structures, Wan Nostrand Co., New York, London, 1974.

[14] Schuring, D.: Scale Models in Engineering, Fundamentals and Applications, Pergamon Press, Oxford, New York, 1977.

[15] Gurevič, A.: Proračun regulacijskih ventila, Lenjingrad, MAŠGIZ, 1968.

[16] Knežević, D.: Istraživanje optimalnih rešenja ventila za zaštitu od vazdušnoudarnih talasa nuklearne eksplozije u vazduhu i uporedna analiza teorijskih i eksperimentalnih rezultata, magistarski rad, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 1983.

[17] Knežević, D.: Nalaženje analitičkog izraza koeficijenta otpora ventila metodom potpunog eksperimenta, Naučnotehnički pregled, Vol. XXXV, 1985, br. 7–8, str. 21–26.

[18] Knežević, D.: Metod nalaženja analitičkog izraza koeficijenta otpora protivudarnih ventila, Naučnotehnički pregled, Vol. XXXV, 1985, br. 10, str. 37–44.

[19] Knežević, D.: Analitički metod definisanja kombinovanog protivudarnog ventila za regulaciju natpritiska, Naučnotehnički pregled, Vol. XXXVI, 1986, br. 9, str. 13–24.

[20] Knežević, D.: Prilog analitičkom definisanju pneumatičkih karakteristika sistema ventila specijalne namene, doktorska disertacija, Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 1994.

[21] Pantelić, I.: Uvod u teoriju inženjerskog eksperimenta, Radnički univerzitet „Radivoj Ćipranov", Novi Sad, 1986.

[22] Vukadinović, S.: Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike, drugo izmenjeno izdanje, Privredni pregled, Beograd, 1978.

[23] Nenadović, M.: Metode optimizacije sistema, SANU, Beograd, 1980.

[24] Nenadović, M.: Matematička dorada podataka dobijenih merenjem, SANU, posebno izdanje, knjiga DLXXXII, Odeljenje tehničkih nauka, knjiga 29, Beograd, 1988.

[25] Milošević, V.: Teorijska statistika, Naučna knjiga, Beograd, 1983.

[26] Andonović, J.: Osnovi računa verovatnoće i teorije najmanjih kvadrata, Naučna knjiga, Beograd, 1986.

[27] Duduković, B., Milosavljević, Đ.: Planiranje eksperimenta i optimizacija procesa, Beograd, IHTM Centar za tehnoekonomiku i programiranje, 1976.

[28] Ferguson, S.: Mathematical Statistics, New York, 1967.

[29] Freund, J. E.: Mathematical Statistics, New York, 1971.

[30] Ivanović, B.: Teorijska statistika, Naučna knjiga, Beograd, 1973.

[31] Ivković, Z.: Matematička statistika, Naučna knjiga, Beograd, 1980.