

Dr Vojislav Batinić,  
dipl. inž.  
Vojna akademija,  
Beograd

## ODREĐIVANJE KRUTOSTI PLANETARNOG PRENOSNIKA

UDC: 62-233.3

*Rezime:*

*Kontaktna krutost zubaca jedan je od glavnih generatora unutrašnjih dinamičkih sila u spregama zupčanika planetarnih prenosnika. Neophodan je pri opisivanju dinamičkog ponašanja planetarnih prenosnika, tj. pri postavljanju jednačina dinamičke ravnoteže. U radu je prikazan metodološki pristup analitičkom i eksperimentalnom određivanju krutosti posmatranog planetarnog prenosnika.*

*Ključne reči: planetarni prenosnik, vibracije, kontaktna krutost, unutrašnje dinamičke sile.*

---

### DETERMINATION OF GEAR MESH STIFFNESS IN PLANETARY GEARING

*Summary:*

*Gear mesh stiffness in planetary gearing is one of the main generators of internal dynamic forces. It is necessary in describing dynamic behaviour of planetary trains, i.e. in defining their equations of dynamic balance. This paper presents a methodological approach to experimental and analytical calculation of stiffness in planetary gearing.*

*Key words: planetary gear train, vibrations, gear mesh stiffness, internal dynamic forces.*

---

#### Uvod

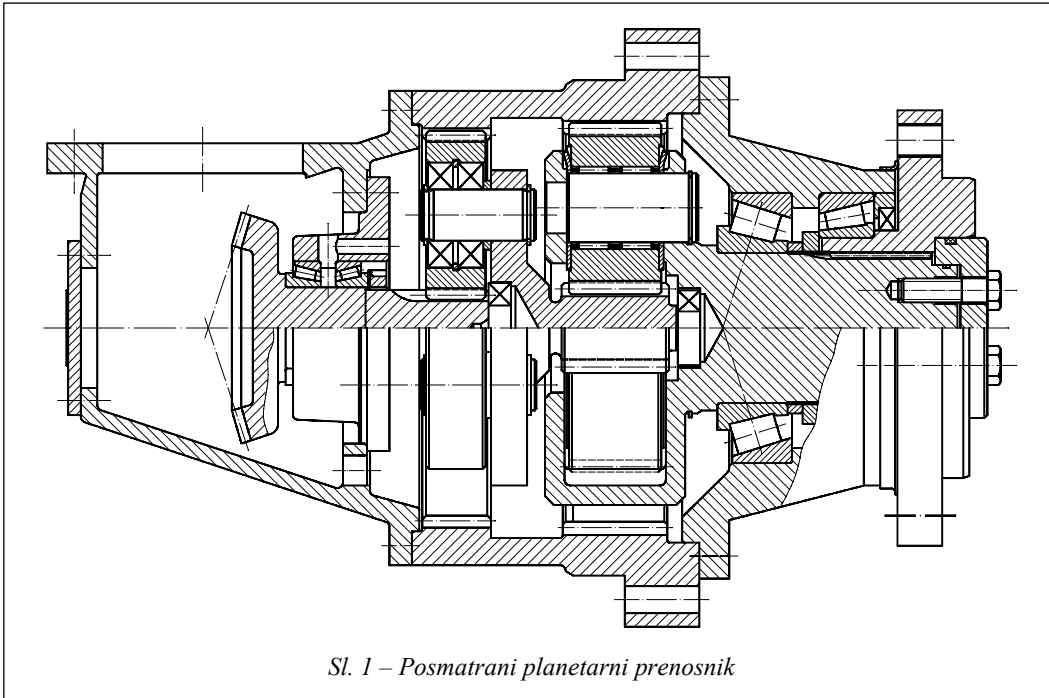
Unutrašnje dinamičke sile i momenti u planetarnim prenosnicima mogu dovesti do progresivnog i ubrzanog razaranja zupčanika, ležaja, nosača satelita i kućišta. Složenost uslova rada i procesa nastajanja unutrašnjih dinamičkih sila zahteva analizu više uzroka koji dovode do pojave tih sila. Jedan od glavnih generatora unutrašnjih dinamičkih sila je promena kontaktne krutosti zubaca, kao posledica elastičnih deformacija, razlike koraka, habanja zubaca i sl.

Za složene dinamičke konstrukcije koje sadrže veliki broj elemenata, kao što su zupčanici, vratila, ležaji, spojnice i sl. definisanje sistema jednačina kretanja je

izuzetno teško i često nemoguće sa aspekta praktične primene. Problem matematičkog modeliranja takvih sistema može se, donekle, prevazići primenom dinamički ekvivalentnih sistema umesto stvarnih. Za postavljanje jednačina dinamičke ravnoteže ekvivalentnog sistema neophodno je poznavanje krutosti čitavog prenosnog mehanizma. Određivanje krutosti planetarnog prenosnika predmet je istraživanja ovog rada.

#### Krutost zubaca spregnutih zupčanika planetarnog prenosnika

Za analizu je korišćen planetarni prenosnik sa dva planetarna reda (stepena prenosa), proizveden u fabrici „14.



oktobar“ Kruševac (slika 1), ugrađen na pogonskom mostu bagera. Sastoji se od dva reda po tri satelita u sprezi sa centralnim zupčanikom, venačnog zupčanika epicikla, nosača satelita i izlazne pri rubnice.

Krutost čelika koji se koriste za izradu zupčanika prenosnika je u granicama od 15 do 20 N/mm<sup>2</sup>. Za analizu će se usvojiti prosečna krutost zubaca zupčanika  $c' = 15 \text{ N/mm}^2$ .

Krutost zubaca u vezama prvog stepena prenosa:

$$c'_{z_1 z_2} = c' b_1 \cdot 10^6 = 600 \cdot 10^6 \text{ N/m} \quad (1)$$

$$c'_{z_2 z_3} = c'_{z_1 z_2} = 600 \cdot 10^6 \text{ N/m}$$

pri čemu je:

$b = 40 \text{ mm}$  širina zupčanika  $z_1, z_2$  i  $z_3$ .

Kako se vidi, ova krutost je linijska, tj. odnosi se na 1 mm širine zupčanika i 1

m dužine deformacije. Međutim, za rešavanje problema potrebna je radijalna krutost koja će se dobiti pogodnom transformacijom osnovnog izraza za krutost, tako da je:

$$c' = \frac{F}{w} = \frac{\frac{T}{3r_1}}{\frac{r_1 \psi_1}{\cos \alpha}} = \frac{T}{3\psi_1} \frac{\cos \alpha_w}{r_1^2} \quad (2)$$

pri čemu su:

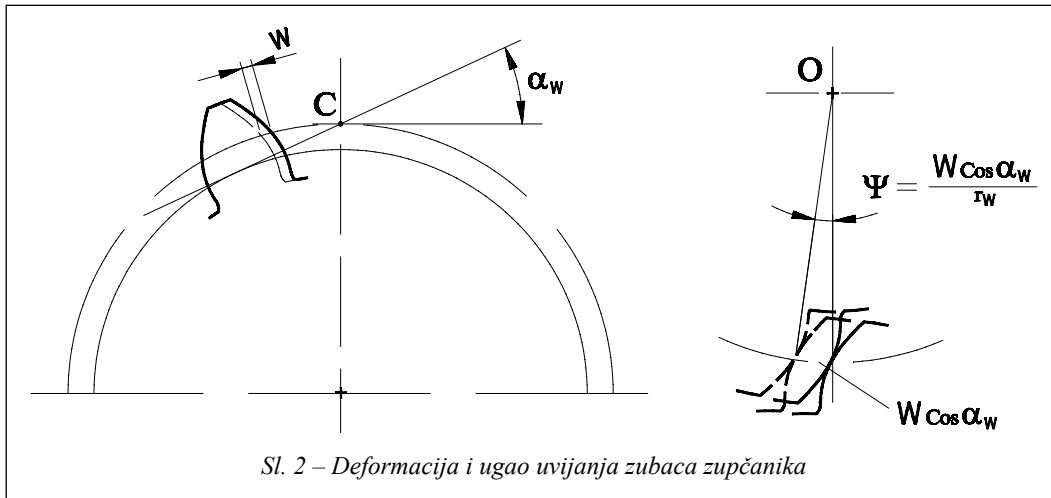
$T/3$  obrtni moment na jednom od tri satelita,

$r$  podooni poluprečnik centralnog zupčanika,

$\alpha_w$  ugao dodirnice, koji za  $x_1 + x_2 = 0$  iznosi  $\alpha_w = 20^\circ$ ,

$\psi_1$  ugao uvijanja zupčanika  $z_1$ .

Deformacije zubaca zupčanika i ugao uvijanja prikazani su na slici 2.

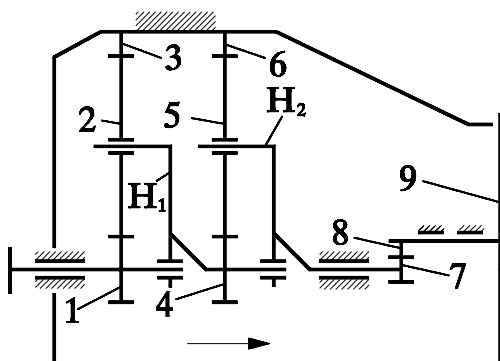


Sl. 2 – Deformacija i ugao uvijanja zubaca zupčanika

Prema (2) torziona krutost je:

$$c = \frac{T}{3\psi_1} = \frac{c \cdot r_1^2}{\cos \alpha} \quad (3)$$

$$c' = \frac{3 \frac{2T}{3r_1} r_{H1}}{\frac{r_4 \psi_4}{\cos \alpha}} = \frac{2Tr_{H1} \cos \alpha}{\psi_4 r_1 r_4^2} \quad (4)$$



Sl. 3 – Šema planetarnog prenosnika

Na osnovu (3) torziona krutost zuba-  
ca prvog i drugog zupčanika (sl. 3) iznosi:

$$c_{z_{1-2}} = c_{z_{2-3}} = \frac{600 \cdot 10^6 \cdot 0,022^2}{0,939} = 0,3093 \cdot 10^6 \text{ N/rad.}$$

Krutost zuba-  
ca zupčanika nosača sa-  
telita, prvog stepena pre-  
nosa, i zupčanika  
z5 može se dobiti iz sledećeg odnosa:

pri čemu je:

$$M_{H_1} = \frac{2Tr_{H_1}}{r_1} \quad \text{moment uvijanja zupča-  
nika } z_4.$$

Na osnovu prethodne jednačine tor-  
ziona krutost zuba-  
ca zupčanika u sprezi  
z4 i z5 je:

$$c_{H_1-z_5} = c_{z_{4-5}} = \frac{c' \cdot b_4 \cdot 10^6 r_4^2}{\cos \alpha} = \frac{15 \cdot 60 \cdot 10^6 \cdot 0,026^2}{0,939} = 0,6479 \cdot 10^6 \text{ Nm/rad.}$$

Krutost zuba-  
ca zupčanika z5 i z6 u  
sprezi jednaka je prethodnoj krutosti, tj.:

$$c_{z_{5-6}} = c_{z_{4-5}} = 0,6479 \cdot 10^6 \text{ Nm/rad.}$$

Krutost zuba-  
ca zupčanika nosača  
satelita u drugom stepenu pre-  
nosa može se dobiti iz odnosa:

$$c = \frac{F_{H_2} \cdot r_7}{w \cdot \frac{2Tr_{H_1}r_{H_2}}{r_1r_4} \cdot \frac{r_7}{r_7}} \cdot \frac{1}{\cos} \quad (5)$$

$$\frac{4Tr_{H_1}r_{H_2}}{r_1r_4} \cdot \frac{1}{r_7} \cdot \frac{\cos}{r_7^2} \cdot c_{z_7,8} \cdot \frac{\cos}{r_7^2}$$

odakle je torziona krutost:

$$c_{z_7,8} = c_{H_2,8} \cdot \frac{c \cdot r_7^2}{\cos} = \frac{15 \cdot 65 \cdot 10^6 \cdot 0,047^2}{0,939}$$

$$2,2937 \cdot 10^6 \text{ Nm/rad.}$$

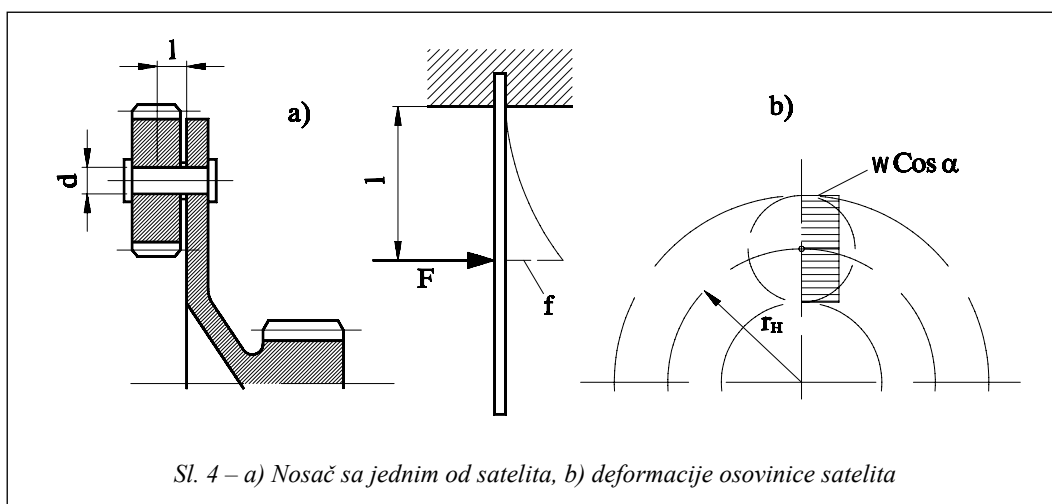
### Krutost nosača satelita

Nosač satelita, kao jedan od najodgovornijih elemenata planetarnog prenosa, po svojoj konstrukciji uslovljen je tipom prenosa, veličinom snage, načinom izrade, vrstom materijala i dr. Prema načinu izrade nosači satelita mogu biti liveni, kovani i rezani. Osim toga, mogu biti prekidne strukture, odnosno izrađeni zavarivanjem, sa zavrtanjima, presovanjem i dr.

Po načinu ostvarivanja veza sa centralnim vratilima, nosači satelita mogu biti iz jednog dela sa vratilom ili vezani nekim od načina spajanja, čvrstom razdvojjivom vezom za izlazno ili ulazno vratilo. Česti su slučajevi da se nosač satelita spaja radi uravnoteženja sila i dobijanja tzv. plivajućih centralnih vratila, specijalnim ožlebljenim spojevima.

Prema načinu postavljanja satelita na osovine mogu biti konzolni (nosači satelita sa jednom čeonom pločom, bez pregrada), ili da se sateliti smestaju između čeonih kružnih ploča (kod nosača satelita sa dve kružne ploče spojene pregradama, različitog poprečnog preseka).

Razmatrani planetarni prenosnik u prvom stepenu prenosa ima nosač satelita neprekidne strukture sa tri satelita koji su postavljeni konzolno. U drugom stepenu prenosa, nosač satelita je neprekidne strukture sa dve kružne ploče spojene pregradama i tri satelita koji su postavljeni na osovinice između pregrada. Nosač satelita u drugom stepenu prenosa je iz jednog dela sa izlaznim vratilom koje je zupčastim parom povezano sa izlaznom prirubnicom.



Sl. 4 – a) Nosač sa jednim od satelita, b) deformacije osovinice satelita

Kako su sateliti prvog stepena prenosa postavljeni konzolno (sl. 4) na osovinice kružnog poprečnog preseka, može se uzeti da je ugib na polovini dužine konzole određen izrazom:

$$f = \frac{Fl^3}{3EI} \quad (6)$$

Krutost se može izraziti kao odnos sile i deformacije:

$$\frac{F}{f} = \frac{3EI}{l^3} \text{ N/m}$$

Međutim, kako je za proračun potrebna torziona krutost, tj. krutost izražena u Nm/rad, prethodna jednakost će se pogodno transformisati zamenom sile i ugiba odgovarajućim izrazima, pa će biti:

$$\frac{2 \frac{T}{3r_1}}{r_{H_1} \psi} = \frac{3EI}{l^3}, \text{ odnosno } \frac{2T}{3r_1} r_{H_1} = \frac{3EI}{\psi r_{H_1} r_{H_1}}$$

odakle se može izraziti torziona krutost kao:

$$c_{ns} = \frac{M_{H_1}}{\psi} = \frac{3EI r_{H_1}^2}{l^3} \quad (7)$$

pri čemu su:

$$M_{H_1} = \frac{2T}{3r_1} r_{H_1} \text{ moment uvijanja nosača}$$

satelita konzole,

$l$  rastojanje na kojem deluje rezultanta obodnih sila,

$$I = \frac{d^4 \pi}{64} \text{ moment inercije preseka oso-$$

vinice satelita prvog stepena prenosa.

Torziona krutost nosača satelita, odnosno osovinice nosača satelita prvog stepena prenosa konkretnog planetarnog prenosioca je (7):

$$c_{ns} = \frac{3 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 7,36 \cdot 10^8 \cdot 0,075^2}{0,022^3} = 2,4494 \cdot 10^7 \text{ Nm/rad.}$$

### Krutost veza prenosioca po segmentima

Krutost veza zupčanika  $z_1$  i  $z_3$  sa nosačem satelita kojim se ostvaruje ova veza može se izraziti kao zbir recipročnih vrednosti  $c_{z_{1-2}}$  i krutosti nosača satelita  $c_{ns}$  i iznosi:

$$\frac{1}{c_{z_{1-3}}} = \frac{1}{c_{z_{1-2}}} + \frac{1}{c_{z_{2-3}}} + \frac{1}{c_{ns}} \quad (8)$$

Ako se u gornji izraz ubace podaci za konkretan primer prenosioca dobiće se:

$$\frac{1}{c_{z_{1-3}}} = \frac{1}{0,3093 \cdot 10^6} + \frac{1}{0,3093 \cdot 10^6} + \frac{1}{2,4494 \cdot 10^7}$$

odakle proizilazi da je krutost  $c_{z_{1-3}} = 0,1537 \cdot 10^6 \text{ Nm/rad.}$

U prvom stepenu prenosa postoje tri ovakve krutosti koje su u rednoj vezi, pa je ukupna krutost prvog stepena prenosa:

$$\frac{1}{c_{z_{1-3}}} = \frac{1}{c_I} = \frac{1}{c_{z_{1-3}}} + \frac{1}{c_{z_{1-3}}} + \frac{1}{c_{z_{1-3}}} \quad (9)$$

odakle je  $c_I = c_{z_{1-3}} = 5,1221 \cdot 10^4 \text{ Nm/rad.}$

Analogno vezama krutosti prvog stepena prenosa mogu se izraziti krutosti veza zupčanika  $z_4$  do  $z_6$ , s tom razlikom što u drugom stepenu prenosa sateliti nisu konzolno postavljeni na nosaču satelita, pa krutost nosača satelita pripada ukupnoj krutosti vratila drugog stepena prenosa. Dakle, važe relacije:

$$\frac{1}{c_{z_4-6}} = \frac{1}{c_{z_4-5}} + \frac{1}{c_{z_5-6}} ;$$

$$\frac{1}{c_{z_4-6}} = \frac{1}{c_{z_4-6}} + \frac{1}{c_{z_4-6}} + \frac{1}{c_{z_4-6}} \quad (10)$$

Uvrštavanjem konkretnih podataka posmatranog prenosnika dobiće se krutost:

$$c_{z_4-6} = 1,0799 \cdot 10^5 \text{ Nm/rad}$$

Krutost vratila sa nosačem satelita drugog stepena prenosa je:

$$c_V = \frac{GI_{0V}}{l_V} \quad (11)$$

pri čemu su:

$G$  modul klizanja materijala vratila,  $G = 8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ ,

$I_{0V}$  polarni otporni moment poprečnog preseka vratila,  $I_{0V} = 7,66 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$ ,

$l_V$  dužina vratila sa nosačem satelita,  $l_V = 0,272 \text{ m}$ .

Ukupna krutost veza zupčanika  $z_4$  i  $z_5$  sa vratilom i zupčanicima  $z_7$  i  $z_8$ , tj. krutost drugog stepena prenosa je:

$$\frac{1}{c_{z_4-8}} = \frac{1}{c_{II}} = \frac{1}{c_{z_4-6}} + \frac{1}{c_V} + \frac{1}{c_{z_7-8}} \quad (12)$$

odakle je za konkretan prenosnik  $c_{II} = c_{z_4-8} = 9,8617 \cdot 10^4 \text{ Nm/rad}$ .

Krutost veza prenosnika u oba stepena prenosa je:

$$\frac{1}{c_2} = \frac{1}{c_I} + \frac{1}{c_{II}} \quad (13)$$

što za posmatrani prenosnik iznosi:

$$c_2 = 3,3711 \cdot 10^4 \text{ Nm/rad}$$

### **Eksperimentalno određivanje krutosti planetarnog prenosnika**

Eksperimentalno ispitivanje konstrukcija, kao dopunska mogućnost dolaženja do pouzdanih podataka o nekom od stanja sistema ili delova sistema, otvara prostor i za određivanje krutosti konstrukcije planetarnog prenosnika.

Eksperimentalna analiza obavlja se pomoću ekstenzometrijske metode čija je primena omogućena pogodnim postavljanjem planetarnog prenosnika i delova opreme koji omogućavaju merenje na probnom stolu. Jedna grupa ekstenzometrijskih metoda odnosi se na elektrooptične merne trake kojima se mere dilatacije u nekoj tački za neki odabrani pravac. Metoda se zasniva na korišćenju analogije sa električnim otporom. Deformacija merne trake izaziva promenu električnog otpora u njoj, što se može registrovati mernim instrumentom. Merne trake se, najčešće, koriste za merenje napona i deformacija, ali i za pretvaranje određenih mehaničkih veličina u električni signal, konstruisanjem odgovarajućih pretvarača. Ovi se pretvarači zatim ugrađuju u razne merne uređaje, kao što su dinamometri, dinamometrijski prste-

novi za merenje sile i sl. S obzirom na to da merne trake omogućuju merenje dilatacije materijala, navedeni princip realizuje se tako što se pojedine veličine (sila, moment, pritisak, pomeranje i sl.) transformišu u deformaciju posebno oblikovanog mernog tela (slika 6).

Osnovna karakteristika svakog mernog tela, kao elastične strukture, sastoji se u tome da deo strukture na kojem se lepe merne trake mora imati linearnu karakteristiku, a merne trake se postavljaju u pravcu glavnih napona. Najkritičniji element pretvarača sa mehaničkog aspekta je opružni element telo pretvarača, koje služi za pretvaranje opterećenja (sile) u uniformno naponsko polje gde se lepi traka. Oblik tela pretvarača može biti koncipiran tako da opterećenje koje se meri izaziva naprezanje na savijanje, smicanje ili normalno naprezanje.

### Merni most

Merenjem relativne promene otpora merne trake  $\frac{\Delta R}{R}$ , može se doći do podataka o veličini dilatacije u nekoj tački korišćenjem relacije:

$$\frac{\Delta R}{R} = K \cdot \varepsilon \quad (14)$$

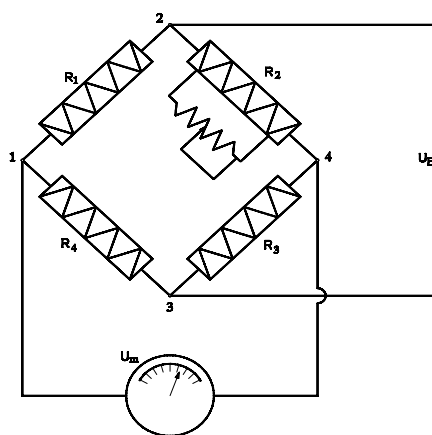
pri čemu su:

$\frac{\Delta R}{R}$  specifična promena otpora,

$K$  faktor proporcionalnosti – karakteristika svake merne trake, i

dilatacija  $D$ .

Kako su dilatacije reda veličine  $10^{-3}$   $D$ , to je promena električnog otpora reda  $K = 2 \cdot 10^{-3}$ . Ovako male veličine mogu se uspešno meriti pomoću pojačivača sa instrumentom koji se naziva „merni most“. Merenje otpora na ovaj način zasniva se na dva Kirchoffova pravila grananja struje. Osnovno kolo ovog mosta prikazano je na slici 5.



Sl. 5 – Šema mernog mosta

Za most kod koga je  $I_G = 0$  kaže se da je u ravnoteži. U tom slučaju mora biti zadovoljen uslov da je:

$$R_2 R_4 - R_1 R_3 = 0, \text{ odnosno:}$$

$$R_1 = R_4 \frac{R_2}{R_3} \quad (15)$$

Ova relacija kazuje da se bilo kakva promena otpora na jednoj strani mosta može uravnotežiti podešavanjem vrednosti otpora na drugoj strani mosta. Svako izbacivanje mosta iz ravnoteže biće registrovano na mernom instrumentu.

Izlazni napon otvorenog kola izračunava se na osnovu izraza:

$$U_m = \frac{R_2}{R_2 + R_3} \frac{R_1}{R_1 + R_4} U_E \quad (16)$$

Iz jednačine 15 vidi se da napon dijagonala mosta zavisi od otpora u granama mosta, tj. u zavisnosti od toga koliko je mernih traka aktivno. Konfiguracije mosta mogu biti četvrtmost, polumost i puni most.

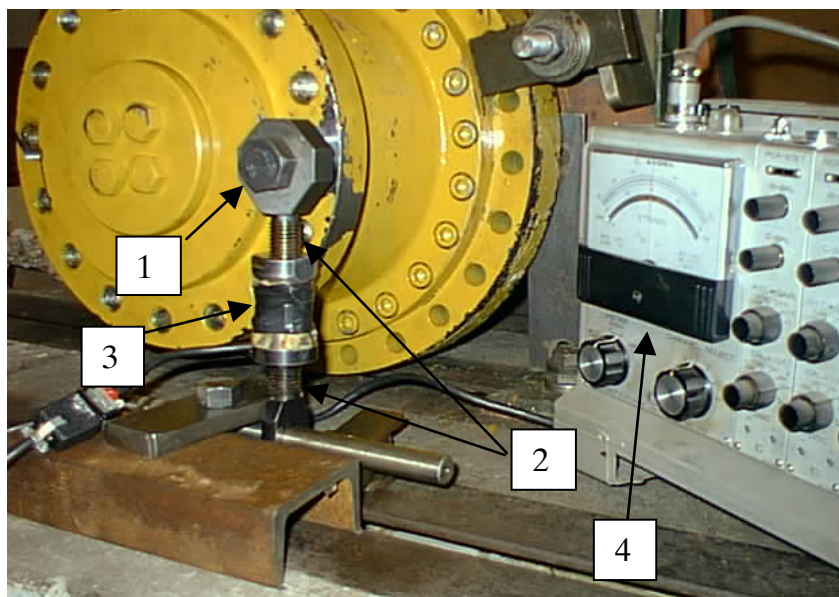
### Određivanje krutosti prenosnika

Krutost planetarnog prenosnika određuje se, posredno, na osnovu izmerene veličine sile kojom se opterećuje prenosnik. Opterećivanje prenosnika, kao i merenje sile, omogućeno je dodavanjem sklopa pogodno ukomponovanih elemenata za opterećivanje silom, kao i njeno merenje, što je prikazano na slici 6. Dodati sklop sastoji se od: zavrtnja 1, zavr-

tanja 2, navrtke sa mernim mostom 3 i galvanometra 4. Zavrtnj 1 spojen je sa izlaznom prirubnicom prenosnika preko jednog od otvora, sa unutrašnjim navojem, na obodu prirubnice.

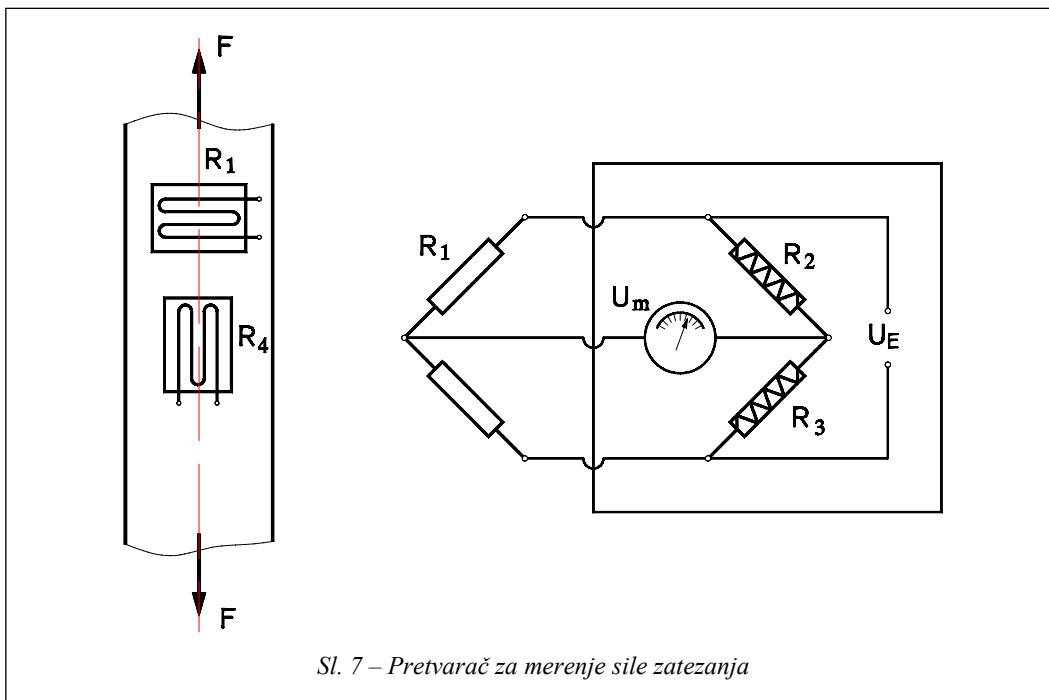
Zavrtnji 2 imaju posebno oblikovane glave, pojedinačno pričvršćene za postolje i zavrtnj na prirubnici 1 i različite navoje, tj. jedan zavrtnj levi, a drugi desni. Okretanjem navrtke 3 sklop će delovati kao zatezač pošto je postavljen tangencijalno na prečnik prirubnice na kojem se nalaze otvori. Sila se meri dinamometrom sa polumostnom konfiguracijom mernog mosta, tj. u most su uključene dve aktivne trake, kao što je prikazano na slici 7.

Kućiče prenosnika, kao i njegovo ulazno vratilo, pre merenja se dobro učvrste. Okretanjem navrtke 3 zatezača ostvaruje se određena sila istezanja koja se pomoću skale na galvanometru i ka-



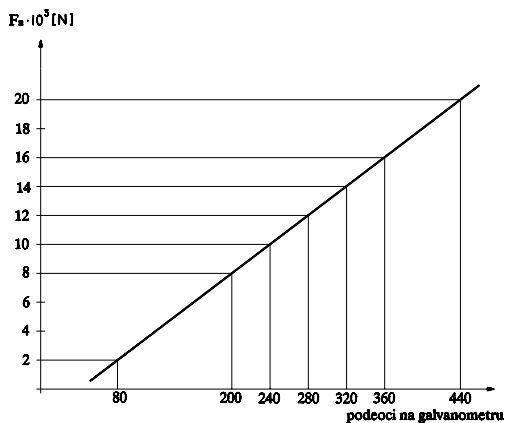
Sl. 6 – Planetarni prenosnik sa dodacima za opterećivanje i merenje sile





Sl. 7 – Pretvarač za merenje sile zatezanja

rakteristike dinamometra prevodi u silu izraženu u jedinicama sile. Karakteristika dinamometra prikazana je na slici 8.



Sl. 8 – Karakteristika dinamometra

Jedan pun obrtaj navrtke 3 zatezača odgovara pomeraju od dva koraka, tj.  $2P$ . Za zavrtanj M20 korak je:  $P = 2 \text{ mm}$ .

Okretanjem navrtke 3 zatezača lučni pomeraj prirubnice po prečniku na kojem se nalaze otvori približno je jednak pomeraju po tangenti na taj krug. Za četvrtinu obrtaja lučni pomeraj i sila su:

$$\frac{2P}{4} \quad 1,0 \text{ mm}; \quad F = 2000 \text{ N} \quad (\text{odgovara } 80 \text{ podeoka skale}). \quad (17)$$

Ugao i moment uvijanja su:

$$\frac{\varphi}{r} = 0,00806 \text{ rad}; \quad T = F \cdot r = 248 \text{ Nm} \quad (18)$$

Odnos momenta uvijanja  $T$  i ugla uvijanja  $\varphi$  predstavlja krutost prenosnika i ona iznosi:

$$c_2 = \frac{T}{\varphi} = 3,077 \cdot 10^4 \text{ Nm/rad} \quad (19)$$

## Zaključak

Na osnovu analitički i eksperimentalno dobijenih rezultata može se zaključiti:

– u kontaktnu krutost su, pri analitičkom određivanju, uključeni momenti inercije koji se za složene oblike (delovi planetarnog prenosnika) određuju sa priličnom aproksimacijom;

– učvršćivanje prenosnika i zatezača na probnom stolu izvedeno je sa više delova nego što bi bilo optimalno, tako da su sve krutosti spojeva, koje su u rednoj vezi, uticale na smanjenje ukupne krutosti;

– rezultati dobijeni eksperimentom ( $c_2 = 3,077 \cdot 10^4$  Nm/rad) razlikuju se od onih dobijenih analitičkim postupkom

( $c_2 = 3,3711 \cdot 10^4$  Nm/rad), ali, s obzirom na navedene uticaje, razlika u rezultatu je takva da se ove vrednosti mogu koristiti kao orijentacione krutosti planetarnog prenosnika u dinamičkim jednačinama ravnoteže.

### Literatura:

- [1] Brčić, V., Čukić, R.: Eksperimentalne metode u projektovanju konstrukcija, Građevinska knjiga, Beograd, 1988.
- [2] Colbourne, J. R.: The geometric design of internal gear pairs, AGMA Technical Paper, 87 FTM2, 1987.
- [3] Kahraman, A.: Planetary gear train dynamics, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Mechanical Design, Vol. 116, pp. 713–720, 1994.
- [4] Kasuba, R., and August, R.: Gear Mesh Stiffness and Load Sharing in Planetary Gearing, Fourth ASME International Power Transmission Conference, ASME Paper 84-DET-229, Cambridge, MA, Oct. 10-12, 1984.
- [5] Muller H. W.: Epicyclic Drive Trains, Wayne State University Press, Detroit, 1982.