UDC: 623.566.4

HIDRODINAMIČKI MODEL PODVODNOG PROJEKTILA

Pukovnik dr *Miroslav* Radosavljević, dipl. inž.
Vojna akademija

Rezime:

Radi dobijanja kvalitetnog matematičkog modela podvodnog projektila u radu su definisane ulazne i izlazne veličine, brzine i ubrzanje projektila. Uz zadate uslove mogućeg kretanja projektila definisan je model podvodnog projektila sa šest jednačina.

Ključne reči: *podvodni projektil, koordinatni sistemi, sile i momenti.*

HIDRODINAMICAL MODEL OF AN UNDERWATER PROJECTILE

Summary:

The paper analyzes an underwater projectile. The input and output values, the projectile speed and acceleration are defined for a quality definition of the projectile mathematical model. With the conditions of the projectile potential movement previously set out, the torpedo model is defined by six equations.

Key words: *Underwater projectile, coordinate systems, forces and moments.*

Uvod

Moderni podvodni projektili su kompleksni tehnički sistemi kojima upravljaju računari ugrađeni u njih. Upravljanje takvim projektilima je zahtevno, a sinteza sistema zahteva kvalitetne matematičke modele.

Analiza performansi dobro upravljivih podvodnih projektila neminovno zahteva detaljno poznavanje njihove dinamike, akustičkih senzora, uređaja za merenje pojedinih veličina koje direktno ili indirektno definišu dinamiku podvodnog projektila, kao i poznavanje poremećaja i uslova u kojima projektil izvršava svoju misiju.

Osnovu formiranja matematičkog modela podvodnog projektila čini analiza uslova i energetskog bilansa koji vladaju pri kretanju podvodnog projektila kroz vodu. Na osnovu poznatih zakona hidrodinamike i energetskih bilansa sistema projektila i voda, dolazi se do matematičkog modela dinamike podvodnog projektila. Rešavanjem ovako dobijenih sistema jednačina dobija se stanje podvodnog projektila u vodenom prostranstvu u svakom momentu.

Sl. 1 – Izgled tipičnog podvodnog projektila

Ulazne i izlazne promenljive

Ulazne promenljive

Posmatrani podvodni projektil je multivarijabilni sistem upravljanja. Broj ulaznih promenljivih je različit i zavisi od tipa upravljanja. Klasični podvodni projektili imaju tri grupe upravljačkih organa: kormila (horizontalna i vertikalna), elerone i pogon.

Mada promene pojedinih ulaznih promenljivih deluju dominantno na neku od izlaznih veličina, ne može se zanemariti njihov uticaj na ostale izlazne veličine. Štaviše, jedna ulazna promenljiva može, u određenom režimu rada, delovati značajno na više izlaza. Drugim rečima, sinteza kvalitetnog sistema upravljanja zahteva analizu dinamičkog ponašanja podvodnog projektila kao multivarijabilnog sistema.

Kormila su klasični upravljački organi podvodnog projektila. Postoje od momenta kada se zna za ovu vrstu projektila i u najvećem broju su zadržali svoju ulogu i u današnje vreme. Kormila predstavljaju krute površine koje se ugrađuju na samom kraju (po krmi) podvodnog projektila. Postavljaju se u horizontalnu i vertikalnu (međusobno normalne) ravan podvodnog projektila. Otklon kormila u jednu ili drugu stranu, u odnosu na ravan simetrije, generiše sile i momente pod čijim uticajem se menjaju izlazne veličine.

Sl. 2 – Izgled izvršnih organa kojima se ostvaruju ulazne veličine

Kormila se postavljaju u parovima – simetrično u odnosu na referentnu ravan projektila. Ovako postavljena, omogućavaju zauzimanje bilo kog položaja tačke u vodenom prostranstvu, što određuje manevarske osobine podvodnog projektila.

U horizontalnoj ravni postavljaju se horizontalna kormila, po jedno sa svake strane u odnosu na vertikalnu ravan. Njihovim otklonom ostvaruje se upravljanje u vertikalnoj ravni – zauzimanje određene dubine. Vertikalna kormila ugrađuju se u vertikalnoj ravni podvodnog projektila čijim otklonom se dostiže bilo koja tačka u horizontalnoj ravni.

Ulazne promenljive u modelu dinamike projektila označavaju se sa: otklon smernog kormila $\delta_{RV}\left[{}^{0}\right]$ i otklon dubinskog kormila $\delta_{RH}\left[{}^{0}\right]$.

Otklon kormila od nultog položaja može biti veoma različit. Pri određivanju predznaka otklona kormila najvažniji kriterijum predstavlja izbor odgovarajućih koordinatnih sistema. Među torpedistima je uobičajeno da je otklon vertikalnih kormila ulevo pozitivan, gledajući smer kretanja projektila. Kod horizontalnih kormila pozitivan otklon kormila je prema dole.

Eleroni su upravljački organi podvodnog projektila namenjeni za ograničavanje ugla nagiba u vertikalno-poprečnoj ravni. Svojim zakretanjem generišu silu i moment čijim delovanjem se vrši stabilizacija projektila u poprečnoj vertikalnoj ravni u željene okvire. Izrađuju se u vidu dve krute površine i postavljaju u horizontalnoj ravni. Otklon jedne krute površine elerona je u suprotnu stranu u odnosu na drugu kormilnu površnu. Otklon elerona u modelu podvodnog projektila obeležavaće se sa $\delta_{e}\left[{}^{0}\right]$. Pozitivan otklon je otklon leve površine nadole, a desne nagore, gledajući u smeru kretanja projektila.

Pogon podvodnog projektila je upravljački organ. Svojim radom generiše silu poriva koja, pretežno, obezbeđuje projektilu kretanje u pravcu njegove uzdužne ose. Osnovni element sile poriva je broj obrtaja propelera $n\left[o/s\right]$. Vektor ulaznih promenljivih dat je sledećim izrazom:

$$\vec{u}(t)=\left[n,\delta_{v},\delta_{h},\delta_{e}\right]^{T} \qquad (1)$$

Izlazne promenljive

Izlazne promenljive podvodnog projektila jednoznačno određuju poziciju u vodenom prostranstvu. Predstavljaju meru delovanja ulaznih promenljivih i neželjenih spoljnih, poremećajnih, sila. Izlazne veličinu su: kurs podvodnog projektila $-\Psi\left[{}^{0}\right]$, ugao trima $\Theta\left[{}^{0}\right]$, ugao nagiba – $\varphi\left[{}^{0}\right]$, ugaone brzine – $p\left[{}^{0}/s\right]$, $q\left[{}^{0}/s\right]$ i $r\left[{}^{0}/s\right]$ i brzine podvodnog projektila – V_x, V_y i V_z na odgovarajućim osama i koordinate podvodnog projektila u vodenom prostranstvu – x, y i z.

Kurs podvodnog projektila $\Psi\left[{}^{0}\right]$ predstavlja tradicionalno navigacijski kvantifikator, meru zakretanja podvodnog projektila, u horizontalnoj ravni. Definiše se uglom zakretanja uzdužnice podvodnog projektila od ravni pravog meridijana na poziciji podvodnog projektila.

U ovom radu kurs podvodnog projektila označava zakretanje ulevo ili udesno od uzdužnice broda gađača, koja se predstavlja x-osom inercijskog koordinatnog sistema. Pozitivni ugao je zakretanje podvodnog projektila u desnu stranu gledano u odnosu na smer kretanja podvodnog projektila ili u smeru kretnja kazaljke na satu.

Ugao trima $\Theta\left[{}^{0}\right]$ jeste mera kojom se izražava zakretanje podvodnog projektila u vertikalnoj $x-z$ ravni. Ova ravan leži u uzdužnici podvodnog projektila i normalna je na horizontalnu $x-y$ ravan u kojoj, takođe, leži uzdužnica podvodnog projektila. Ove dve ravni su ravni simetrije podvodnog projektila.[1] Pozitivni ugao zaokreta trima je „na pliće“ ili kretanje u vertikalnoj ravni u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu.

Ugao bočnog nagiba $\varphi\left[{}^{0}\right]$ meri se odstupanjem poprečne ose podvodnog projektila u poprečnoj vertikalnoj ravni od horizontalne ravni. Pozitivno zakretanje je otklon z - ose u odnosu na $x-y$ ravan nadesno.

Brzina podvodnog projektila predstavlja napredovanje težišta podvodnog projektila u smerovima odgovarajućih osa inercijskog koordinatnog sistema. Za ispravnu definiciju kretanja podvodnog projektila mora se uzeti ukupna brzina koja se dobija izrazom:

$$V=\sqrt{V_x^2+V_y^2+V_z^2} \tag{2}$$

a smer sabiranjem vektorskih komponenti brzine.

Koordinate položaja podvodnog projektila u prostoru označavaju dostignuti nivo centra mase u inercijskom koordinatnom sistemu. Iznos vektora $\vec{R}$ određuje se sledećim izrazom:

$$R=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{3}$$

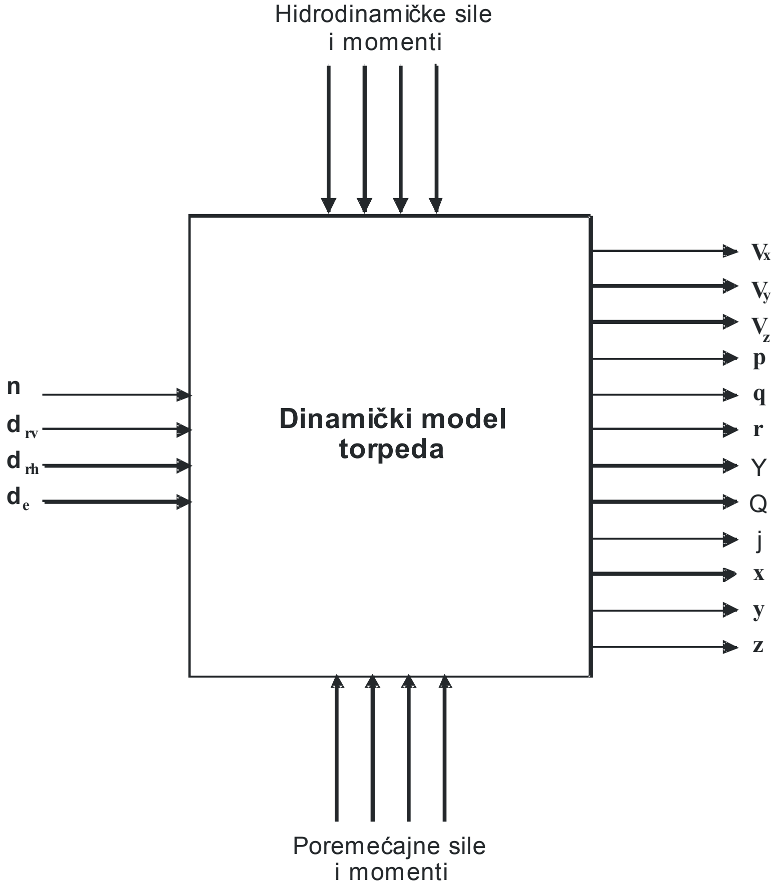
a smer se dobija smerom vektorskog zbira komponenti x, z i z.

Izlazni vektor ima dvanaest promenljivih prikazanih relacijom:

$$\vec{y}=\left[V_x,V_y,V_z,p,q,r,\Psi,\Theta,\varphi,x,y,z\right]^T \tag{4}$$

[1] Projektil je dvoosno simetrično telo.

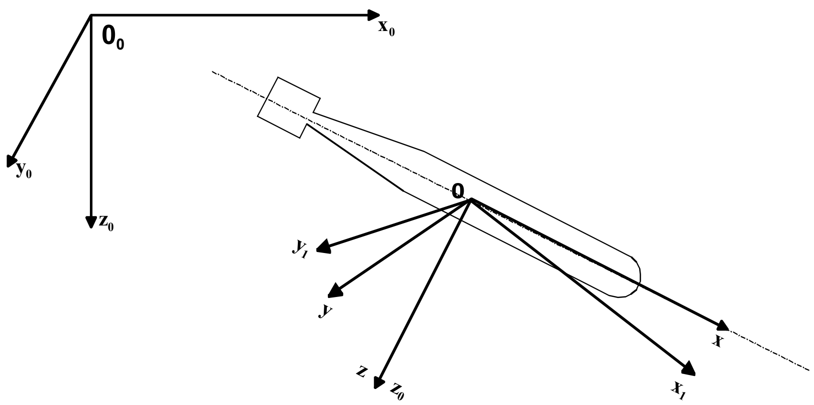
Na slici 3. šematski su prikazane ulazne i izlazne promenljive tipičnog podvodnog projektila – torpeda.



Sl. 3 – Blok-šema podvodnog projektila kao multivarijabilnog sistema

Koordinatni sistemi

Za rešavanje različitih problema upravljanja podvodnog projektila koristiće se različiti koordinatni sistemi. Pravilan izbor koordinatnih sistema omogućuje dobijanje pogodnog oblika rešavanja matematičkog modela kretanja i upravljanja podvodnog projektila. U ovom radu korišćeni su: inercijalni (nepokretni), vezani i brzinski koordinatni sistemi. Pored navedenih mogu se koristiti i polubrzinski i poluvezani. Na slici 4 prikazana su tri koordinatna sistema koji će se primenjivati u radu.



Sl. 4 – Izgled inercijalnog, vezanog i brzinskog koordinatnog sistema

Inercijalni koordinatni sistem

Pravougli koordinatni sistem $O_0x_0y_0z_0$ nepomičan je u prostoru. Koordinatni početak se vezuje za neku proizvoljno izabranu tačku u prostoru. Osa O_0x_0 leži u smeru početnog kretanja podvodnog projektila, O_0z_0 usmerena je vertikalno naniže ka centru gravitacije Zemlje, a osa O_0y_0 je postavljena tako da čini pozitivno kretanje u smeru kretanja kazaljke na satu.

Zanemarivanjem rotacije Zemlje i kretanje broda gađača ovaj sistem se smatra inercijalnim. U navedenom koordinatnom sistemu prikazuju se putanje centra težišta mase podvodnog projektila.

Vezani koordinatni sistem

Vezani koordinatni sistem $Oxyz$ čvrsto je vezan za centar mase podvodnog projektila. Podužna i Oz-osa leže u ravni simetrije, pri čemu je Ox-osa usmerena u pravcu kretanja, a Oy-osa normalna je na $x-z$ ravan i usmerena je udesno. Položaj vezanog koordinatnog sistema prema inercijalnom određen je Ojlerovim uglovima Ψ, Θ, φ.

Vezani koordinatni sistem često se naziva dinamički koordinatni sistem, a koristi se pri proučavanju i simulaciji samonavođenja podvodnog projektila.

Brzinski koordinatni sistem

Brzinski koordinatni sistem vezan je za putanju podvodnog projektila i koristi se pri definisanju i proučavanju hidrodinamičkih sila i momenata koji deluju na projektil. Definiše se osama $O_1x_1y_1z_1$. Koordinatni početak leži u centru mase podvodnog projektila. Osa O_1x_1 kolinearna je sa vektorom brzine podvodnog projektila, osa Oy_1 pomaknuta je za ugao β u odnosu na Oy-osu, a Oz_1-osa za ugao α u odnosu na Oz osu vezanog koordinatnog sistema.

Transformacija koordinatnih sistema

Položaj vezanog koordinatnog sistema u odnosu na inercijalni određuje se međusobnim položajem odgovarajućih osa.

Položaj vezanog koordinatnog sistema u odnosu na inercijalni određuje se uglovima Ψ, Θ, φ.

Sl. 5 – Prelazak iz inercijalnog u vezani koordinatni sistem

Pretpostavimo da se ose vezanog koordinatnog sistema $Oxyz$ u određenom trenutku poklapaju sa osama $O_0 x_0 y_0 z_0$ inercijalnog koordinatnog sistema. Transformacija iz inercijalnog u vezani kordinatni sistem ostvaruje se preko tri sukcesivne jednoosne rotacije, i to: rotacijom oko ose Oz_0 inercijalnog koordinatnog sistema za ugao Ψ, rotacijom oko ose Oy_0 inercijalnog koordinatnog sistema za ugao Θ, rotacijom oko ose Ox_0 inercijalnog koordinatnog sistema za ugao φ, pri čemu su matrice sukcesivnih jednoosnih rotacija $[\Psi],[\Theta],[\varphi]$ definisane na sledeći način:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \cos\Psi & \sin\Psi & 0 \\ -\sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$[\Theta] = \begin{bmatrix} \cos\Theta & 0 & -\sin\Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\Theta & 0 & \cos\Theta \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \tag{7}$$

Nakon množenja matrica sukcesivnih jednoosnih rotacija dobija se transformacija iz inercijalnog u vezani koordinatni sistem.

$$C_{iD} = [\Psi]\cdot[\Theta]\cdot[\varphi] \tag{8}$$

Ova transformaciona matrica je ortogonalna, pa je transformacija iz vezanog u inercijalni koordinatni sistem definisana sledećom relacijom:

$$C_{Di} = C_{iD}^{T} \tag{9}$$

$$C_{iD} = \begin{bmatrix} \cos\Psi\cos\Theta & \sin\Psi\cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\varphi\cos\Psi\sin\Theta - \cos\varphi\sin\Psi & \sin\varphi\sin\Psi\sin\Theta + \cos\varphi\cos\Psi & \sin\Psi\sin\Theta \\ \cos\varphi\cos\Psi\sin\Theta + \sin\varphi\sin\Psi & \cos\varphi\sin\Psi\sin\Theta - \sin\varphi\cos\Psi & \cos\varphi\cos\Theta \end{bmatrix} \tag{10}$$

Ugao Ψ predstavlja ugao skretanja u horizontalnoj ravni i smatra se pozitivnim pri skretanju osa od $x \to y$, odnosno skretanju u smeru obrtanja kazaljke na satu. Ugao Θ je ugao trima ili propinjanja, a pozitivan smer mu je pri zakretanju ose $z \to x$ ili zakretanju koje je suprotno kretanju kazaljke na satu. Ugao φ je ugao nagiba i smatra se pozitivnim pri skretanju ose $y \to z$,odnosno zakretanju koje je suprotno kretanju kazaljke na satu.

Položaj brzinskog koordinatnog sistema u odnosu na vezani koordinatni sistem definiše se uglovima α, β . Brzinski koordinatni sistem se prevodi iz vezanog obrtanjem određenih osa, kao što je prikazano na slici 4.

Transformacija iz brzinskog u vezani koordinatni sistem ostvaruje se preko dve sukcesivne jednoosne rotacije, i to: rotacijom oko ose Oz inercijskog koordinatnog sistema za ugao a i rotacijom oko ose Oy inercijskog koordinatnog sistema za ugao β.

$$[\beta] = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{12}$$

Nakon množenja matrica sukcesivnih jednoosnih rotacija dobija se matrica transformacija iz brzinskog u vezani koordinatni sistem.

$$C = [\alpha]\cdot[\beta] = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \tag{13}$$

Pošto je matrica ortogonalna matrici transformacije, tada se transformacija iz vezanog u brzinski kordinatni sistem može predstaviti sledećim izrazom:

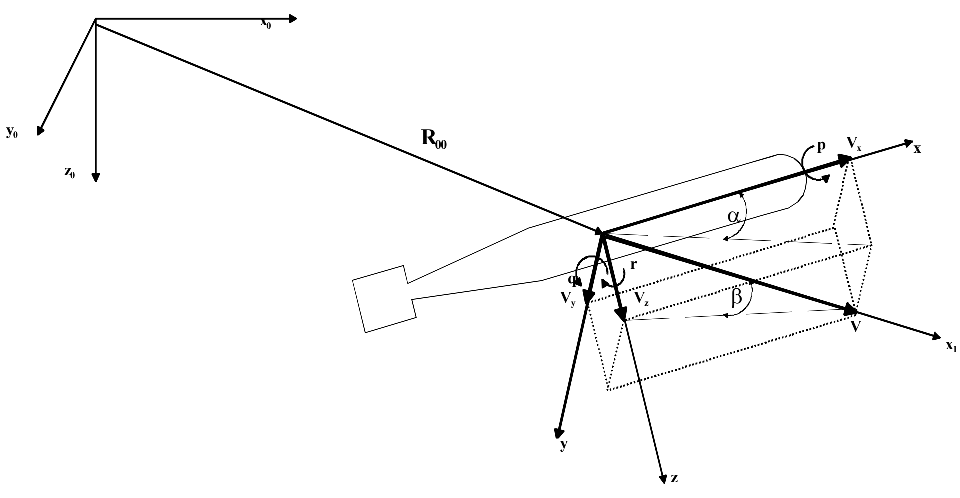
$$C_b = C^T \tag{14}$$

Ugao α je napadni ugao podvodnog projektila i smatra se pozitivnim kada je prednji deo podvodnog projektila usmeren prema površini mora. Ugao β je ugao klizanja, a smatra se pozitivnim kada struja vode dolazi prvo na repni deo podvodnog projektila, pa na prednji.

Brzine i ubrzanja podvodnog projektila

Za određivanje apsolutne brzine i ubrzanja podvodnog projektila u vezanom koordinatnom sistemu pretpostavlja se uopšteno kretanje krutog tela sa šest stepeni slobode. Koordinatni početak inercijalnog i vezanog koordinatnog sistema se, u principu, ne podudaraju (sem u momentu lansiranja). Vezani koordinatni sistem leži u centru mase podvodnog projektila. Kretanje podvodnog projektila predstavlja se kretanjem tačke težišta njegovog centra mase. Na slici 6. prikazani su smerovi komponenata vektora brzine $\vec{V}\left(V_x, V_y, V_z\right)$ i ubrzanja $\vec{\Omega}\left(p, q, r\right)$ podvodnog projektila, kao i uglovi koji daju smer brzini i ubrzanju podvodnog projektila.

Sl. 6 – Grafički prikaz smerova i položaja vektora brzine i ubrzanja podvodnog projektila



U nekom trenutku položaj težišta mase podvodnog projektila u inercijalnom koordinatnom sistemu određen je radijusom vektora $\vec{R}_{OG}$, a u dinamičkom koordinatnom sistemu sa $\vec{R}_G$. Iz slike 6 se vidi da vredi sledeća relacija:

$$\vec{R}_{OG} = \vec{R}_{OO} + \vec{R}_G \tag{15}$$

ili ako se primeni matrica transformacije vezanog koordinatnog sistema u inercijalni:

$$\vec{R}_{OG} - \vec{R}_{OO} = C_{DI} \cdot \vec{R}_G \tag{16}$$

Izraz (16) može se napisati i u sledećoj formi:

$$\vec{R}_G = C_{DI} \cdot \left(\vec{R}_{OG} - \vec{R}_{OO} \right) \tag{17}$$

Ukoliko težište podvodnog projektila ima koordinate x_G, y_G, z_G, a zna se da su $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jedinični vektori vezanog koordinatnog sistema, onda se izraz (15) može napisati u sledećem obliku:

$$\vec{R}_{OG} = \vec{R}_{OO} + \vec{R}_G = \vec{R}_{OO} + x_G \cdot \vec{i} + y_G \cdot \vec{j} + z_G \cdot \vec{k} \tag{18}$$

Kretanje podvodnog projektila podrazumeva translatorno i rotaciono kretanje centra mase u odnosu na inercijalni koordinatni sistem. Ovako definisano kretanje zove se apsolutno kretanje.

Ukoliko se za izraz (18) nađe prvi izvod, dobija se sledeći oblik brzine kretanja centra mase podvodnog projektila:

$$\frac{d\vec{R}_{OG}}{dt} = \frac{dy}{dt} \vec{R}_{OO} + x_G \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} + y_G \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} + z_G \cdot \frac{d\vec{k}}{dt} \tag{19}$$

Primenom Poisonovog izraza za prvi izvod po vremenu izraza (19) na jedinične vektore vezanog koordinatnog sistema, i ako se zameni:

$$\vec{\Omega} = p \cdot \vec{i} + q \cdot \vec{j} + r \cdot \vec{k} \tag{20}$$

dobija se sledeći izraz:

$$\vec{V}_{OG} = \vec{V}_{OO} + \vec{\Omega} \times \vec{R}_G \tag{21}$$

Analizom dobijenih brzina proizilazi da je brzina podvodnog projektila jednaka $\vec{V} \equiv \vec{V}_{OO}$. Izraz (21) se u matričnom obliku može napisati:

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} V_x \cdot \vec{i} \\ V_y \cdot \vec{j} \\ V_z \cdot \vec{k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ x_G & y_G & z_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_x & -r \cdot y_G & q \cdot z_G \\ V_y & -r \cdot x_G & p \cdot z_G \\ V_z & q \cdot x_G & p \cdot y_G \end{bmatrix} \tag{22}$$

Apsolutno ubrzanje težište mase podvodnog projektila u vektorskom obliku dobija se iz izraza (21) i poprima sledeći oblik:

$$\vec{a} = \vec{a}_{OO} + \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{R}_G \right) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{R}_G \tag{23}$$

Izraz (23) može se predstaviti u matričnom obliku na sledeći način:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} \dot{V}_x \\ \dot{V}_y \\ \dot{V}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ V_x - r \cdot y_G + q \cdot z_G & V_y + r \cdot x_G - p \cdot z_G & V_z - q \cdot x_G + p \cdot y_G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_x & j & k \\ \dot{p} & \dot{q} & \dot{r} \\ x_G & y_G & z_G \end{bmatrix} \tag{24}$$

ili u matričnom obliku:

$$a = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_x - rV_y + qV_z - \left(q^2 + r^2 \right) x_G + \left(pq - \dot{r} \right) y_G + \left(rp + \dot{q} \right) z_G \\ \dot{V}_y - pV_z + rV_x - \left(p^2 + r^2 \right) y_G + \left(rq - \dot{p} \right) z_G + \left(qp + \dot{r} \right) x_G \\ \dot{V}_z - qV_x + pV_y - \left(r^2 + q^2 \right) z_G + \left(pr - \dot{q} \right) x_G + \left(rq + \dot{p} \right) z_G \end{bmatrix} \tag{25}$$

Hidrodinamički model podvodnog projektila

Osnovna pretpostavka za određivanje matematičkog modela podvodnog projektila jeste da se njegovo kretanje može dovoljno tačno predstaviti modelom krutog tela u kvazistacionarnom strujnom polju vode. Pored navedene, uvode se i sledeće pretpostavke: kretanje okružujuće vode podvodnog projektila nastaje jedino usled kretanja podvodnog projektila; kretanje vode je bezvrtložno; oko projektila postoji beskonačna tečnost; projektil poseduje dve međusobno normalne ravni simetrije; projektilu se u odnosu na pravac kretanja mogu razlikovati prednji, zadnji, gornji i donji deo; projektil predstavlja kruto telo sa šest stepeni slobode kretanja; sistem projektila i okružujuća voda ima isto toliko stepeni slobode kao i samo kruto telo; za projektil je čvrsto vezan dinamički koordinatni sistem; hidrodinamički koeficijenti sila i momenata zavise od Rejnoldsovog broja, vektora brzine, ubrzanja, ugaone brzine i otklona komandnih površina; projektil i hidrodinamički efekti na trup podvodnog projektila u kretanju potiču od sila i momenata koje nastaju usled kretanja vode i spoljne sile i momenata tih sila koje podrazumevaju neinercijalne sile.

Kretanje u idealnoj vodi

Karakteristike idealne vode su nestišljivost, homogenost i bezviskoznost. Za kretanje podvodnog projektila i vode postoji potencijal $\varphi_p\left(x_0, y_0, z_0, t\right)$ brzine kretanja vode $\vec{u}_s$. Projekcija ove brzine na ose inercijalnog koordinatnog sistema date su u sledećem obliku:

$$u_{s x_0} = \frac{\partial \varphi_p}{d x_0}; u_{s y_0} = \frac{\partial \varphi_p}{d y_0}; u_{s z_0} = \frac{\partial \varphi_p}{d z_0} \tag{26}$$

U hidrodinamici je poznato da potencijal φ_p mora da zadovolji Laplasovu jednačinu:

$$\Delta \varphi_p = \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial {x_0}^2} + \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial^2 y_0} + \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial^2 z_0} = 0 \tag{27}$$

Granični uslovi ovog izraza su:

– na dovoljno velikim rastojanjima voda miruje, što se matematički može predstaviti izrazom:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial {x_0}^2} = \lim_{r\to\infty} \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial^2 y_0} = \lim_{r\to\infty} \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial^2 z_0} = 0 \tag{28}$$

– voda ne prolazi kroz površinu podvodnog projektila (ne ulazi u unutrašnjost podvodnog projektila):

$$V_n = \frac{d\varphi_n}{dn}\Big|_S \tag{29}$$

gde je:

V_n – brzina vode u smeru normale na površinu tela,

$\frac{d\varphi_n}{dn}$ – normalna brzina čestica u dodiru sa projektilima u istoj tački,

$n-$ spoljna normala na element površine podvodnog projektila dS, $V=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\to\infty$.

Potencijal φ_p moguće je odrediti samo ako se poznaju komponente brzine pojedinih tačaka površine podvodnog projektila *S*.

Za centar mase podvodnog projektila vezan je koordinatni početak vezanog koordinatnog sistema koji se kreće brzinom *V* i ugaonom brzinom $\vec{\Omega}$. Brzina bilo koje tačke *M*, proizvoljno izabrane na površini podvodnog projektila *S*, u inercijalnom koordinatnom sistemu se u vektorskom obliku može predstaviti:

$$\vec{V}_M=\vec{V}+\vec{\Omega}\times\vec{R} \tag{30}$$

Izraz $\vec{R}=x_0\cdot\vec{i}+y_0\cdot\vec{j}+z_0\cdot\vec{k}$ predstavlja udaljenost izabrane tačke M na površini podvodnog projektila *S* od koordinatnog početka inercijalnog koordinatnog sistema.

Normalna komponenta brzine bilo koje tačke na površini podvodnog projektila može se izraziti sledećim izrazom :

$$V_n=\frac{d\varphi_n}{dn}\Big|_S=\vec{V}\circ\vec{n}=\vec{V}_0\circ\vec{n}+\left(\vec{\Omega}\times\vec{R}\right)\circ\vec{n} \tag{31}$$

Veličina brzine u pravcu normale na površinu prema izrazu (32) je:

$$\begin{aligned}V_n&=V_{x_0}\cos(n,x)+V_{y_0}\cos(n,y)+V_{z_0}\cos(n,z)+\\&+p\left[y\cos(n,z)-y\cos(n,y)\right]+q\left[z\cos(n,x)-x\cos(n,z)\right]+\\&+r\left[x\cos(n,y)-y\cos(n,x)\right].\end{aligned} \tag{32}$$

Komponente translatorne i ugaone brzine su funkcije vremena, dok koordinate *x, y, z* to nisu. Iz izraza (32) proizilazi da se granični uslovi, dati izrazima (28) i (29), na površini tela podvodnog projektila *S* mogu izraziti u obliku zbira od šest članova, pri čemu je:

$$\frac{\partial\varphi_p}{\partial n}=V_x\frac{\partial\varphi_{p1}}{\partial n}+V_y\frac{\partial\varphi_{p2}}{\partial n}+V_z\frac{\partial\varphi_{p3}}{\partial n}+p\frac{\partial\varphi_{p4}}{\partial n}+q\frac{\partial\varphi_{p5}}{\partial n}+r\frac{\partial\varphi_{p6}}{\partial n} \tag{33}$$

gde su $\varphi_{pi}\left(i=1,2,...,6\right)$ pojedini potencijali koji zadovoljavaju Laplasovu jednačinu i uslov da je u beskonačnosti $\varphi_{pi}\to 0$, a na površini tela važe sledeći granični uslovi:

$$\frac{\partial \varphi_{p1}}{\partial n} = \cos(n,x); \frac{\partial \varphi_{p2}}{\partial n} = \cos(n,y); \frac{\partial \varphi_{p3}}{\partial n} = \cos(n,z);$$
$$\frac{\partial \varphi_{p4}}{\partial n} = y \cdot \cos(n,z) - y\cos(n,y);$$
$$\frac{\partial \varphi_{p5}}{\partial n} = z\cos(n,x) - x\cos(n,z) \tag{34}$$
$$\frac{\partial \varphi_{p6}}{\partial n} = x\cos(n,y) - y\cos(n,x)$$

Granični uslovi na površini tela ne zavise od vremena, što navodi na zaključak da potencijal $\varphi_{pi}\left(i = 1,2,...,6\right)$ zavisi samo od oblika tela. Radi jednostavnijeg pisanja uvode se sledeće smene:

$$v_1 = V_x; v_2 = V_y; v_3 = V_z; v_4 = p; v_5 = q; v_6 = r \tag{35}$$

Korišćenjem izraza (2.35) potencijal φ_{pi} može se predstaviti sledećim izrazom:

$$\varphi_p\left(x,y,z,t\right) = \sum_{i=1}^{6} v_i\left(t\right) \cdot \varphi_{pi}\left(x,y,z\right) = \sum_{i=1}^{6} v_i \varphi_{pi} \tag{36}$$

Kinetička energija sistema projektil – okružujuća voda

Kinetička energija sistema definiše se kao zbir kinetičkih energija podvodnog projektila i okružujuće sredine vode, odnosno:

$$T_S = \frac{1}{2} \cdot C^T \cdot D_S \cdot C \tag{37}$$

gde je:

$C = \left[V_x, V_y, V_y, p, q, r\right]^T$ – vektor opštih brzina,

D_s – matrica inercije sistema koja se izračunava kao:

$$D_S = D_L + D \tag{38}$$

Iz hidrodinamike je poznato da se kinetička energija tečnosti može predstaviti u obliku površinskog integrala površine podvodnog projektila S s potencijalom φ_p,

$$T_L = -\frac{\rho}{2} \cdot \iint_S \varphi_p \frac{\partial \varphi_p}{\partial n} dS \tag{39}$$

Izraz (39) izvodi se uzimajući spoljnu normalu na kontrolnu površinu posmatrane zapremine. Negativni predznak potiče od spoljne normale na površinu tela u kretanju, što je suprotno od prethodno uzimanih. Ukoliko se izraz (36) uvrsti u izraz (39) izraz za kinetičku energiju vode može se prikazati u sledećem obliku:

$$T_L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\sum_{k=1}^{6} v_i v_k \left(-\rho \cdot \iint_S \varphi_{pi} \frac{\partial \varphi_{pk}}{\partial n} dS \right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{6}\sum_{k=1}^{6} v_i v_k \lambda_{ik} \tag{40}$$

gde je:

$\lambda_{ik} = -\rho \cdot \iint_S \varphi_{pi} \frac{\partial \varphi_{pk}}{\partial n} dS$ koja se zove pridruženim masama[1] u širem smislu reči.

$$D_L = [\lambda_{ik}] = [\lambda_{ki}], \quad (i = 1,2,...,6;\ k = 1,2,...,6) \tag{41}$$

Zbog simetričnosti članova matrice od 36 elemenata, matrica D_L može se predstaviti sa 21 elementom. Ravni simetrije dalje smanjuju broj članova $\lambda_{ik} \neq 0$. Za projektil koji ima dve ravni simetrije *(xy)* i *(xz)* potrebno je odrediti samo 8 elemenata $-\lambda_{ik}$: $(\lambda_{ik})_{ik=1,2,3}$ ima dimenziju mase $[kg]$; $\lambda_{26}, \lambda_{35}$ ima dimenziju statičkog momenta [kgm] i $(\lambda_{ik})_{ik=4,5,6}$ ima dimenziju momenta inercije *[kgm²]*.

S obzirom na postojanje ravnine simetrije *(xy)* i *(xy)*, te postavljanjem koordinatnog početka u težište mase podvodnog projektila i postavljanjem koordinatnih osa tako da predstavljaju ose inercije $(I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0)$, matrica inercije podvodnog projektila je:

$$D = \begin{bmatrix} m & & & & & \\ & m & & 0 & & \\ & & m & & & \\ & & & I_{xx} & & \\ & 0 & & & I_{yy} & \\ & & & & & I_{zz} \end{bmatrix} \tag{42}$$

[1] Na osnovu Kirhovljeve i Lambove teorije za određivanje hidrodinamičkih sila pri kretanju krutog tela u idealnoj homogenoj tečnosti javlja se pojam o pridruženoj vodi. Pridružena masa je neka zamišljena masa vode sa svojstvom da se njena kinetička energija pri kretanju brzinom jednakoj brzini tela jednaka kinetičkoj energiji celokupne tekućine koja okružuje telo. Inercijsko delovanje vode na telo jednako je povećanju mase tela u odgovarajućem smeru za određeni iznos.

Uvrštavanjem (41) i (42) u (43) dobija se matrica inercije sistema:

$$D = \begin{bmatrix} m+\lambda_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m+\lambda_{22} & 0 & 0 & 0 & \lambda_{26} \\ 0 & 0 & m+\lambda_{33} & 0 & \lambda_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{xx}+\lambda_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{53} & 0 & I_{yy}+\lambda_{55} & 0 \\ 0 & \lambda_{62} & 0 & 0 & 0 & I_{zz}+\lambda_{66} \end{bmatrix} \tag{43}$$

Uvrštavanjem izraza (43) u (37) dobija se izraz za kinetičku energiju:

$$\begin{aligned} T_S = \frac{1}{2}\Big[& \left(m+\lambda_{11}\right)\cdot V_x^2 + \left(m+\lambda_{22}\right)\cdot V_y^2 + \left(m+\lambda_{33}\right)\cdot V_z^2 + \\ & \left(I_{xx}+\lambda_{44}\right)\cdot p^2 + \left(I_{xx}+\lambda_{55}\right)\cdot q^2 + \left(I_{xx}+\lambda_{66}\right)\cdot r^2 \Big] \end{aligned} \tag{44}$$

Opšti oblik jednačine kretanja podvodnog projektila

Za inercijalni prostor u kojem razmatramo inercijalni koordinatni sistem, poznati zakon dinamike (zakon količine kretanja i momenta količine kretanja) u neograničenom vodenom prostranstvu može se napisati u obliku:

$$\frac{d_S\vec{R}}{dt} = \frac{d_S\left(\vec{Q}+\vec{B}\right)}{dt} = \vec{F} \tag{45}$$

$$\frac{d_S\vec{L}}{dt} = \frac{d_S\left(\vec{K}+\vec{I}\right)}{dt} = \vec{M} \tag{46}$$

gde su:

$\vec{R}$ – glavni vektor količine kretanja težišta mase podvodnog projektila,

$\vec{Q}$ – glavni vektor količine kretanja tela,

$\vec{B}$ – glavni vektor količine kretanja vode,

$\vec{F}$ – glavni vektor spoljašnjih sila,

$\vec{L}$ – moment količine kretanja s obzirom na težište,

$\vec{K}$ – glavni momenat količine kretanja tela,

$\vec{I}$ – glavni momenat količine kretanja vode,

$\vec{M}$ – glavni momenat spoljnih sila,

d_S/dt – označava prvi izvod po vremenu u inercijalnom koordinatnom sistemu.

Jednačina kretanja tela s hidrodinamičkim karakteristikama najčešće se razvija u vezanom koordinatnom sistemu. Njegova primena zahteva niz transformacija. Imajući u vidu osobine prvog izvoda vektorske funkcije u vezanom i inercijalnom prostranstvu zakoni dinamike su napisani u prikladnoj formi u sledećem izrazu:

$$\frac{d_S\vec{R}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \left(\vec{\Omega}\times\vec{R}\right) \tag{47}$$

$$\frac{d_S\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} + \left(\vec{\Omega}\times\vec{L}\right) + \left(\vec{\vec{V}}\times\vec{R}\right) \tag{48}$$

gde su:

$\vec{\Omega}$ – ugaona brzina zakretanja podvodnog projektila,

$\vec{V}$ – translacijska brzina kretanja podvodnog projektila.

Izrazi su pisani za opšti slučaj, kada težište centra mase i težište tela ne leže u istoj tački. Prvi član u izrazu (47) predstavlja relativnu brzinu vrha vektora $\vec{R}$ u vezanom koordinatnom sistemu, a drugi član je prenosna brzina. Treći član u izrazu (48) posledica je kretanja koordinatnog početka vezanog koordinatnog sistema u odnosu na inercijalan.

Pomoću izraza (49) mogu se izraziti jednačine kretanja u vezanom koordinatnom sistemu:

$$\frac{d\vec{R}}{dt} + \left(\vec{\Omega}\times\vec{R}\right) = \vec{F} \tag{49}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} + \left(\vec{\Omega}\times\vec{L}\right) + \left(\vec{\vec{V}}\times\vec{R}\right) = \vec{M} \tag{50}$$

Iz teorijske mehanike poznate su projekcije impulsne sile $\vec{R} = \vec{Q} + \vec{B}$ i impulsnog momenta $\vec{L} = \vec{K} + \vec{I}$ na osama vezanog koordinatnog sistema. Određene su parcijalnim izvodima ukupne kinetičke energije sistema voda + projektil, po odgovarajućim komponentama brzine, odnosno ugaone brzine:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \frac{\partial T_S}{\partial V_x} \\ \frac{\partial T_S}{\partial V_y} \\ \frac{\partial T_S}{\partial V_z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q \cdot \frac{\partial T_S}{\partial V_z} - r \cdot \frac{\partial T_S}{\partial V_y} \\ r \cdot \frac{\partial T_S}{\partial V_x} - p \cdot \frac{\partial T_S}{\partial V_z} \\ p \cdot \frac{\partial T_S}{\partial V_z} - q \cdot \frac{\partial T_S}{\partial V_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_Y \\ F_z \end{bmatrix} \tag{51}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \frac{\partial T_S}{\partial p} \\ \frac{\partial T_S}{\partial q} \\ \frac{\partial T_S}{\partial r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q \cdot \frac{\partial T_S}{\partial r} - r \cdot \frac{\partial T_S}{\partial q} \\ r \cdot \frac{\partial T_S}{\partial p} - p \cdot \frac{\partial T_S}{\partial r} \\ p \cdot \frac{\partial T_S}{\partial q} - q \cdot \frac{\partial T_S}{\partial p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_y \cdot \frac{\partial T_S}{\partial V_z} - V_z \cdot \frac{\partial T_S}{\partial V_y} \\ V_z \cdot \frac{\partial T_S}{\partial V_x} - V_x \cdot \frac{\partial T_S}{\partial V_z} \\ V_x \cdot \frac{\partial T_S}{\partial V_z} - V_y \cdot \frac{\partial T_S}{\partial V_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_Y \\ M_z \end{bmatrix} \tag{52}$$

gde su:

F_x, F_y, F_z – uzdužna, bočna i poprečna spoljašnja sila na telo podvodnog projektila,

M_x, M_y, M_z – momenti bočnog nagiba, posrtanja i zakretanja izazvani spoljnim silama.

Nakon jednostavnijih transformacija izrazi (51) i (52) mogu se jednostavnije napisati na sledeći način:

$$\vec{D}_S \cdot \frac{d\vec{C}}{dt} + \vec{B} \cdot \vec{D}_S \cdot \vec{C} = \vec{P} \tag{53}$$

gde je:

$P = \left[F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z\right]^T$ – vektor spoljnih sila i momenata,

B – kvadratna matrica opštih brzina oblika:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -r & q & 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & -p & 0 & 0 & 0 \\ -q & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -V_z & V_y & 0 & -r & p \\ V_z & 0 & -V_x & r & 0 & q \\ -V_y & V_x & 0 & -q & p & 0 \end{bmatrix} \tag{54}$$

Nakon svih množenja vektorske jednačine (53) dolazi se do šest skalarnih jednačina kretanja podvodnog projektila u vezanom koordinatnom sistemu:

$$\begin{bmatrix} (m+\lambda_{11})\cdot\dot{V}_x-(m+\lambda_{22})\cdot V_y\cdot r-\lambda_{26}\cdot r^2+(m+\lambda_{33})\cdot V_z\cdot q+\lambda_{35}\cdot q^2 \\ (m+\lambda_{22})\cdot\dot{V}_y+\lambda_{26}\cdot\dot{r}+(m+\lambda_{11})\cdot V_x\cdot r-(m+\lambda_{33})\cdot V_z\cdot p-\lambda_{35}\cdot p\cdot q \\ (m+\lambda_{33})\cdot\dot{V}_z+\lambda_{35}\cdot\dot{q}-(m+\lambda_{11})\cdot V_x\cdot q+(m+\lambda_{22})\cdot V_y\cdot p+\lambda_{26}\cdot p\cdot r \\ (I_{xx}+\lambda_{44})\div\dot{p}-(m+\lambda_{22})\cdot V_x\cdot V_z-\lambda_{26}\cdot V_z\cdot r+(m+\lambda_{33})\cdot V_y\cdot V_z+\lambda_{35}\cdot V_y\cdot q- \\ (I_{yy}+\lambda_{55})\cdot q\cdot r-\lambda_{35}\cdot V_z\cdot r+(I_{zz}+\lambda_{66})\cdot q\cdot r+\lambda_{26}\cdot V_y\cdot q \\ (I_{yy}+\lambda_{55})\cdot\dot{q}+\lambda_{35}\cdot\dot{V}_z+(m+\lambda_{11})\cdot V_x\cdot V_z-(m+\lambda_{33})\cdot V_x\cdot V_z-\lambda_{35}\cdot V_x\cdot q+ \\ (I_{xx}+\lambda_{44})\cdot p\cdot r+(I_{zz}+\lambda_{66})\cdot p\cdot r-\lambda_{26}\cdot V_y\cdot p \\ (I_{zz}+\lambda_{66})\cdot\dot{r}+\lambda_{26}\cdot\dot{V}_y-(m+\lambda_{11})\cdot V_x\cdot V_y+(m+\lambda_{22})\cdot V_x\cdot V_y+\lambda_{26}\cdot V_x\cdot r- \\ (I_{xx}+\lambda_{44})\cdot p\cdot q+(I_{zz}+\lambda_{55})\cdot p\cdot q+\lambda_{35}\cdot V_z\cdot p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ \\ \\ M_y \\ \\ M_z \\ \\ \end{bmatrix} \tag{55}$$

Zaključak

Sprovedenim modelovanjem podvodnog projektila pokazano je da se radi o multivarijabilnom objektu sa šest stepeni slobode. Analizom objekta definisane su ulazne i izlazne veličine i njihove mere. Kvalitetnim izborom koordinatnih sistema omogućeno je dobijanje matematičkog modela za rešavanje na računaru.

Uvažavanjem osnovnih zakona mehanike i uslova koji vladaju pri kretanju projektila kroz vodu uspostavljena je statička i dinamička ravnoteža na osnovu kojih je formiran sistem od šest diferencijalnih jednačina.

Sagledavanjem karakteristika tipičnih projektila broj jednačina sveden je na potrebni (minimalni). U sistem jednačina uključena je masa vode (pridružene mase) koja se javlja pri kretanju projektila kroz vodu. Na desnoj strani sistema jednačina date su sile i momenti koji uravnotežuju sistem. Navedene sile, momenti i pridružene mase, svakako, traže dalje istraživanje.

Literatura

[1] Podobrij, G.M. i dr.: Teoretičeskije osnovi torpednogo oružija, Boennoe izdateljstvo Ministarstva oboroni SSSR, 1969.

[2] Patrašev, A.N. i dr.: Prikladnaja gidromehanika, Ministrastvo oboroni SSSR, Moskva, 1970.

[3] Voronjec, K., Obradović, N.: Mehanika fluida, Građevinska knjiga, Beograd, 1979.

[4] Grupa autora: Podmornički trenažer, matematički model podmornice, Brodarski institut Zagreb, 1980.

[5] Nenadović, M.: Stabilnost i upravljivost letelica, prvi deo, SSNO, Beograd, 1981.

[6] Stojić, R.: Prilog sintezi dinamičkog upravljanja letom aviona, doktorska teza, Tehnička vojna akademija, Beograd, 1984.

[7] Zabnev, A. F.: Torpednoe oružie, M. Boenoizdat, Moskva, 1984.

[8] Neimark J. I. i dr.: Dinamičeskie modeli teoriji upravlenija, Nauka, Glavnaja redakcija fiziko-matematičeskoj literaturi, Moskva, 1985.

[9] Dorodni, V. P.: Torpedi, DOSAAF SSSR, Moskva, 1986.

[10] Marinković, M.: Dinamička analiza torpeda, Doktorska disertacija, Zagreb, 1987.

[11] Minović, S.: Osnovi teorije samonavođenih raketa, VINC, Beograd, 1987.

[12] Lazarević, Ž.: Tehnička hidroakustika, MT Uprava GŠ JNA, Beograd, 1987.

[13] Rusov, L.: Mehanika - Dinamika Naučna knjiga, Beograd, 1988.

[14] Radosavljević, M., Milovanović, M., Mataušek, M.: Softversko i softversko-hardverska simulacija samonavođenja akustičkog torpeda na brazdu broda, XLII konferencija ETRAN-a, Vrnjačka banja, 1998.

[15] Radosavljević, M.: Računarska realizacija sistema samonavođenja torpeda na trag broda, Vojnotehnički glasnik, juli–avgust, 432–438, 1998.

[16] Radosavljević, M. Modelovanje i softversko-hardverska simulacija upravljanja akustičkim torpedom, magistarki rad, ETF Beograd, 1998.

[17] Milovanović, M., Radosavljević, M.: HIL simulacija samonavođenja akustičkog torpeda na brazdu broda, Naučnotehnički pregled, br. 4, str. 15–23, Beograd, 1999.

[18] Radosavljević, M.: Teorijski i eksperimentalni načini određivanja pridruženih masa vode pri kretanju podvodnih projektila, Naučnotehnički pregled, br. 5, str. 81–86, Beograd, 2001.

[19] Tomašević, N.: Matematika 3 – udžbenik, GŠVSCG, Uprava za školstvo i obuku, VA, Beograd, 2002.