

UDC: 528
528.1/4

TRANSFORMACIJA KOORDINATA IZMEĐU GAUS-KRIGEROVE I SVETSKE POPREČNE MERKATOROVE PROJEKCIJE ZA TERITORIJU SRBIJE

Potpukovnik mr *Stevan* Radojčić, dipl. inž.
Uprava za operativne poslove J-3 GŠ

Rezime:

U radu je prikazan postupak i predložene su formule za transformacije iz Gaus-Krigerove projekcije, koja se koristi u Srbiji, u Svetsku poprečnu Merkatorovu projekciju i obratno. Osim preračunavanja između koordinata u ravni i na elipsoidu, date su i formule za Helmertovu sedmoparametarsku transformaciju između srpskog datuma i WGS84 (World Geodetic System 1984).

Ključne reči: Gaus-Krigerova projekcija, UTM, transformacija, Beselov elipsoid, WGS84.

PROCEDURE AND FORMULAS FOR COORDINATE
TRANSFORMATIONS BETWEEN THE GAUSS-KRÜGER
PROJECTIONS AND THE UNIVERSAL TRANSVERSE
MERCATOR PROJECTIONS FOR SERBIA

Summary:

This paper gives a procedure and a complete set of formulas for transformations from the Gauss-Krüger projection, used in Serbia, to the Universal Transverse Mercator and vice versa. Besides the conversions between plane and ellipsoid coordinates, the paper gives the formulas for the Helmert's seven-parameter datum transformation between a Serbian datum and a WGS 84 (World Geodetic System 1984) one.

Key words: Gauss-Krüger projection, UTM, transformation, Bessel's ellipsoid, WGS84.

Uvod

Kao državni geodetski datum u Srbiji se koristi elipsoid Besela, pozicioniran 1892. godine u tački Hermannskogel kod Beča, a kao državna projekcija Gaus-Krigerova projekcija (GKP) trostepenih meridijanskih zona. Sve naše topografske karte, a delimično preglednotopografske, pa i

druge karte izdanja Vojnogeografskog instituta, kao i raznovrsni sistemi i sredstva koji koriste geodetski datum ili projekciju – za navigaciju, pozicioniranje, upravljanje vatrom i slične potrebe – počivaju na tim rešenjima.

Sa druge strane, sve više zemalja, posebno evropske zemlje i članice NATO, za geodetski datum usvaja WGS84 (ili GRS80, što je u geometrijskom smislu isto), a za projekciju Svetsku poprečnu Merkatorovu projekciju (UTM). Takvim rešenjima postiže se interoperabilnost i olakšava korišćenje savremenih sistema pozicioniranja kakav je, na primer, sistem globalnog pozicioniranja GPS [1].

Svi korisnici GPS u našoj zemlji, mnogi subjekti saradnje naše zemlje i vojske sa državama i vojskama u okruženju i članicama NATO, autori raznih aplikacija koje se odnose na navigaciju, pozicioniranje, praćenje i druge geoprostorne namene, kao i mnogi drugi, susreću se sa problemom transformacije koordinata između ova dva sistema. Formule koje se ovde prikazuju prilagođene su širem krugu korisnika, odnosno onom bez posebnih geodetskih znanja. Zbog toga se značenje pojedinih izraza ne objašnjava, niti se navode njihovi nazivi, osim tamo gde se to nije moglo izbeći. Takođe, one su uređene tako da se identične formule koriste za transformaciju iz GKP u UTM i obrnuto. Razlikuju se samo određene konstante.

Prelaz iz Gaus-Kriggerove u UTM projekciju

Potpun prelaz iz ravni Gaus-Kriggerove u ravan UTM projekcije podrazumeva sledeće korake:

- pravouglo koordinata y i x neke tačke u GKP konvertuju se u odgovarajuće geodetske koordinate B i L (latituda i longituda) na elipsoidu Besela;
- koordinate B i L se konvertuju u prostorne pravouglo koordinata X , Y i Z , koje se odnose na elipsoid Besela;
- prostorne koordinate X , Y i Z transformišu se u prostorne koordinate X , Y i Z , koje se odnose na WGS84;
- koordinate X , Y i Z se konvertuju u geodetske koordinate B i L na WGS84, i
- koordinate B i L se konvertuju u koordinate E i N u ravni UTM.

Ovaj algoritam podrazumeva da se za transformaciju geodetskih datuma koristi Helmertova sedmoparametarska transformacija, čija se primena i inače preporučuje za transformaciju između našeg datuma i WGS84. Takođe, podrazumeva se da je za tačku čije se koordinate transformišu poznata visina (h) i to elipsoidna visina, tj. udaljenost od površi elipsoida. S obzirom na to da za naš datum te visine nisu poznate, uzimaju se odgovarajuće nadmorske visine.

Šematski se to može prikazati na sledeći način:

$$(y,x)_{GK} \rightarrow (B, L)_{Bes} \rightarrow (X, Y, Z)_{Bes} \rightarrow (X, Y, Z)_{WGS84} \rightarrow (B, L)_{WGS84} \rightarrow (E, N)_{UTM}$$

Prvi korak: $(y, x)_{GK} \rightarrow (B, L)_{Bes}$

U ovom koraku važi sledeće:

$a = 6\,377\,397,155$ (velika poluosa Beselovog elipsoida),

$b = 6\,356\,078,96325$ (mala poluosa Beselovog elipsoida),

$m_0 = 0,9999$ (linijski razmer duž srednjeg meridijana zone GKP),

$y_0 = 6\,500\,000$ i $L_0 = 18^\circ$ za tačke u 6. zoni GKP, odnosno:

$y_0 = 7\,500\,000$ i $L_0 = 21^\circ$ za tačke u 7. zoni GKP.

Sledi računanje nedomuliranih koordinata:

$$y' = \frac{y - y_0}{m_0}; \quad x' = \frac{x}{m_0} \quad (1)$$

a dalje se računaju pomoćne veličine [2]:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}; \quad e' = \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}; \quad (2)$$

$$\mu_1 = \frac{x'}{a(1 - e^2/4 - 3e^4/64 - 5e^6/256)} \quad (3)$$

$$e_1 = \frac{1 - (1 - e^2)^{1/2}}{1 + (1 - e^2)^{1/2}} \quad (4)$$

$$B_1 = \mu_1 + \left(\frac{3}{2} e_1 - \frac{27}{32} e_1^3 \right) \sin 2\mu_1 + \left(\frac{21}{16} e_1^2 - \frac{55}{32} e_1^4 \right) \sin 4\mu_1 + \frac{151}{96} e_1^3 \sin 6\mu_1 + \frac{1097}{512} e_1^4 \sin 8\mu_1 \quad (5)$$

$$V_1 = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 B_1)^{1/2}} \quad (6)$$

$$M_1 = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 B_1)^{3/2}} \quad (7)$$

$$T_1 = \tan^2 B_1; \quad C_1 = e'^2 \cos^2 B_1; \quad D = \frac{y'}{V_1} \quad (8)$$

Tražene koordinate su [2]:

$$B = B_1 - \frac{V_1 \tan B_1}{M_1} \left[\frac{D^2}{2} - (5 + 3T_1 + 10C_1 - 4C_1^2 - 9e'^2) \frac{D^4}{24} + (61 + 90T_1 + 298C_1 + 45T_1^2 - 252e'^2 - 3C_1^2) \frac{D^6}{720} \right] \quad (9)$$

$$L = L_0 + \frac{1}{\cos B_1} \left[D - (1 + 2T_1 + C_1) \frac{D^3}{6} + (5 - 2C_1 + 28T_1 - 3C_1^2 + 8e'^2 + 24T_1^2) \frac{D^5}{120} \right] \quad (10)$$

Drugi korak: $(B, L)_{Bes} \rightarrow (X, Y, Z)_{Bes}$

Dobijene geodetske koordinate B i L na Beselovom elipsoidu treba konvertovati u prostorne pravougle koordinate X , Y i Z (koje se odnose na isti elipsoid). Postupak je sledeći:

$$V = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{1/2}} \quad (11)$$

$$X = (V + h) \cos B \cos L; \quad Y = (V + h) \cos B \sin L; \quad Z = [V(1 - e^2) + h] \sin B \quad (12)$$

Treći korak: $(X, Y, Z)_{Bes} \rightarrow (X, Y, Z)_{WGS84}$

Za transformaciju koordinata između dva geodetska datuma potrebno je poznavati tzv. parametre transformacije, do kojih se dolazi na osnovu tačaka za koje su koordinate poznate u oba datuma. Što je više takvih tačaka i što je bolji njihov raspored na razmatranoj teritoriji, to će ocena parametara biti bolja (naravno, do granice koju određuje tačnost našeg datuma). Za Helmertovu transformaciju koja se ovde izlaže, a za koju je rečeno da predstavlja optimalan izbor kada je u pitanju transformacija našeg datuma, potrebno je poznavati sedam parametara: tri translacije duž koordinatnih osa X , Y i Z (t_x , t_y , t_z), tri rotacije oko koordinatnih osa X , Y i Z (α , β , γ) i faktor razmera (dm). Korisnik može sam da odredi parametre, ili da ih preuzme od nacionalne geodetske ili kartografske agencije ili neka druge odgovarajuće institucije. Vojnim korisnicima u Srbiji parametre saopštava Vojnogeografski institut.

Ako se od sračunatih koordinata formira vektor $r_{Besel} = [X \ Y \ Z]_{Besel}$, a od parametara translacije vektor $t = [t_x \ t_y \ t_z]$ matrica rotacije biće [3]:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ -\cos \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (13)$$

Sada je vektor pravouglavih koordinata koje se odnose na WGS84:

$$r_{WGS84} = [X \ Y \ Z]_{WGS84} = (1 + dm)R^T(r_{Besel} - t) \quad (14)$$

Četvrti korak: $(X, Y, Z)_{WGS84} \rightarrow (B, L)_{WGS84}$

Za dalja računanja potrebni su parametri elipsoida WGS84:

$a = 6\,378\,137$ (velika poluosa WGS84)

$b = 6\,356\,752,31425$ (mala poluosa WGS84)

Sledi računanje pomoćnih veličina [4]:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}; \quad e' = \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} \quad (15)$$

$$p = \sqrt{X^2 + Y^2}; \quad \theta = \arctan \frac{Za}{pb} \quad (16)$$

i, konačno, koordinata tačke:

$$B = \arctan \frac{Z + e'^2 b \sin^3 \theta}{p - e^2 a \cos^3 \theta}; \quad L = \arctan \frac{Y}{X}; \quad h = \frac{p}{\cos B} - N \quad (17)$$

Geodetska latituda B i elipsoidna visina h obično se računaju na osnovu složenijeg postupka, iterativno. Međutim, ovde su date jednostavnije, direktne formule, jer one daju rešenja koja su, za našu teritoriju, sasvim saglasna sa iterativnim [5].

Peti korak: $(B, L)_{WGS84} \rightarrow (E, N)_{UTM}$

Ovde važi:

$m_0 = 0,9996$ (linijski razmer duž srednjeg meridijana zone UTM)

$L_0 = 21^\circ$ (za 34. zonu UTM)

Dalje je [2]:

$$A = (L - L_0) \cos B; \quad T = \tan^2 B; \quad C = e'^2 \cos^2 B \quad (18)$$

$$V = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{1/2}} \quad (19)$$

$$M = a \left[\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 \right) B - \left(\frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{32}e^4 + \frac{45}{1024}e^6 \sin 2B \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{15}{256}e^4 + \frac{45}{1024}e^6 \sin 4B \right) - \frac{35}{3072}e^6 \sin 6B \right] \quad (20)$$

$$y' = V \left[A + (1 - T + C) \frac{A^3}{6} + (5 - 18T + T^2 + 72C - 58e'^2) \frac{A^5}{120} \right] \quad (21)$$

$$x' = M + V \tan B$$

$$\left[\frac{A^2}{2} + (5 - T + 9C + 4C^2) \frac{A^4}{24} + (61 - 58T + T^2 + 600C - 330e'^2) \frac{A^6}{720} \right] \quad (22)$$

i, konačno:

$$E = y'm_0 + 500000; \quad N = x'm_0 \quad (23)$$

Prelaz iz UTM u Gaus-Krugerovu projekciju

Prelaz iz UTM u GKP vrši se analogno prelazu iz GKP u UTM, s tim da se polazi od koordinata E i N u UTM, a završava sa y i x u GKP, odnosno:

$$(E, N)_{UTM} \rightarrow (B, L)_{WGS84} \rightarrow (X, Y, Z)_{WGS84} \rightarrow (X, Y, Z)_{Bes} \rightarrow (B, L)_{Bes} \rightarrow (y, x)_{GK}$$

Prvi korak: $(E, N)_{UTM} \rightarrow (B, L)_{WGS84}$

U ovom koraku važi sledeće:

$a = 6\,378\,137$ (velika poluosa WGS84)

$b = 6\,356\,752,31425$ (mala poluosa WGS84)

$m_0 = 0,9996$ (linijski razmer duž srednjeg meridijana zone UTM)

$L_0 = 21^\circ$ (za 34. zonu UTM)

Najpre se sračuna:

$$y' = \frac{E - 500000}{m_0}; \quad x' = \frac{N}{m_0} \quad (24)$$

Dalje važe formule (2)-(10).

Drugi korak: $(B, L)_{WGS84} \rightarrow (X, Y, Z)_{WGS84}$

Važe formule (11) i (12).

Treći korak: $(X, Y, Z)_{WGS84} \rightarrow (X, Y, Z)_{Bes}$

Postupak je analogan gornjem: od sračunatih koordinata formira se vektor $r_{WGS84} = [X \ Y \ Z]_{WGS84}$ i pomoću vektora translacije t i matrica rotacije R odrede prostorne koordinate:

$$r_{Besel} = [X \ Y \ Z]_{Besel} = (1 + dm)R^T(r_{WGS84} - t) \quad (25)$$

Četvrti korak: $(X, Y, Z)_{Bes} \rightarrow (B, L)_{Bes}$

Prelaskom na Beselov elipsoid važi:

$a = 6\,377\,397,155$ (velika poluosa Beselovog elipsoida),

$b = 6\,356\,078,96325$ (mala poluosa Beselovog elipsoida).

Dalje se primenjuju formule (15)–(17).

Peti korak: $(B, L)_{Bes} \rightarrow (y, x)_{GKP}$

Po analogiji sada je:

$m_0 = 0,9999$ (linijski razmer duž srednjeg meridijana zone GKP)

$y_0 = 6\,500\,000$ i $L_0 = 18^\circ$ za tačke u 6. zoni GKP, odnosno

$y_0 = 7\,500\,000$ i $L_0 = 21^\circ$ za tačke u 7. zoni GKP

Dalje se koriste formule (18)–(22), nakon čega je:

$$y = y'm_0 + y_0; \quad x = x'm_0 \quad (26)$$

Zaključak

S obzirom na sve širu zastupljenost WGS84 i UTM u raznim aplikacijama i sistemima, posebno onim zasnovanim na GPS, širi se krug zainteresovanih za poznavanje procedura i načina prelaska iz tih sistema u naše odgovarajuće sisteme, tj. naš datum (Beselov elipsoid) i našu državnu projekciju (Gaus-Krugerovu projekciju).

Pitanje transformacija, u principu, zahteva specijalizovano geodetsko znanje, posebno u delu koji se odnosi na izbor modela i parametara transformacije, jer od toga zavisi kakva će biti tačnost transformisanih koordinata. Međutim, najveći broj potreba mogu zadovoljiti i korisnici bez takvog znanja, ukoliko se definišu jasne procedure i obezbede valjane formule.

Literatura

[1] Borisov, M.: *Topografsko-kartografski sistem prema novim vojnim standardima*, Vojnotehnički glasnik, broj 3-4, Beograd, 2005.

[2] Lapaine, M, Tutić, D.: *Relationships between the old Gauss- Krüger projection and UTM projection for Croatia*, Reports of the Symposium of the IAG Subcommision for Europe (EUREF), Dubrovnik, 2001.

[3] Torge, W.: *Geodesy, Walter de Gruyter*, Berlin – New York, 2001.

[4] Vaniček, P, Krakiwskz, E: *Geodesy: The Concepts Elsevier Science BV*, Amsterdam, 1986.

[5] Božić. B.: *Globalni sistem pozicioniranja*, Viša građevinsko-geodetska škola, Beograd, 2001.