

STO GODINA TEORIJE REDOVA ČEKANJA

Pukovnik dr *Nebojša* Nikolić, dipl. inž.,
nebojsa.nikolic11@mod.gov.rs,
Institut za strategijska istraživanja, SPO MO

Rezime:

*U radu je prikazan nastanak i razvoj Teorije redova čekanja, poznate i kao Teorija masovnog opsluživanja. Opisan je i istorijskotehno-
loški kontekst vremena u kojem je došlo do publikovanja prvih radova u
oblasti koja će se kasnije razviti u samostalnu naučnu disciplinu. U 2009.
godini Teorija redova čekanja navršava čitav vek od svog nastanka.*

Ključne reči: masovno opsluživanje, redovi čekanja, Erlang.

A HUNDRED YEARS OF THE QUEUEING THEORY

Summary:

*The paper presents a short review of historical development of
the Queueing Theory, also known as Theory of Waiting Lines or The-
ory of Mass Servicing. We described historical and technological con-
ditions at the time when first Queueing Theory papers were published.
The motivation for this report comes from fact that the year 2009 is the
100th birthday of this theory.*

Key words: Queueing Theory, Theory of Waiting Lines, Erlang.

Uvod

U 2009. godini navršava se sto godina od nastanka teorije redova čekanja, koja je poznata i kao teorija masovnog usluživanja (ili posluživanja). Povodom toga održaće se naučni skup u Kopenhagenu u Danskoj, uz učešće najeminentnijih naučnika za ovu naučnu disciplinu iz čitavog sveta.

Predmet izučavanja teorije redova čekanja jesu sistemi masovnog usluživanja. Teorija je posvećena kvantitativnim aspektima fenomena redova čekanja (vreme čekanja na opslugu, dužina reda čekanja, nivo iskorišćenja kanala koji vrše opsluživanje, itd.). Pod sistemom masovnog usluživanja podrazumeva se svaki sistem u kojem pojava nekog događaja, klijenta ili zahteva uzrokuje potrebu da se na nju reaguje, da se zahtev zadovolji i da

klijenta usluži određeni entitet – kanal opsluživanja. Resursi za usluživanje su, po pravilu, ograničenih mogućnosti, što znači da će prvi klijenti biti primljeni na usluživanje odmah, a oni koji pristignu kasnije moraće da sačekaju da se neki od već zauzetih kanala oslobodi. Često je pojava zahteva za usluživanjem slučajnog karaktera: ne zna se unapred kada će se tačno pojaviti zahtev za opslugom. Isti je slučaj i sa usluživanjem koje može da traje različito vreme. Ovaj opšti koncept sistema masovnog usluživanja sugerise mogućnost njegove široke primene. Rađanje teorije masovnog opsluživanja bio je odgovor nauke na probleme telefonskog saobraćaja u periodu njegove komercijalne ekspanzije u prve dve decenije dvadesetog veka.

Agner Krarup Erlang

Osnivačem teorije masovnog usluživanja najčešće se smatra Agner Krarup Erlang, (1878–1929), danski matematičar koji je prvi rad iz ove oblasti objavio 1909. godine, pod naslovom „Teorija verovatnoće i telefonski razgovori“.



Agner Krarup Erlang (1878–1929)

Agner Krarup Erlang rođen je 1. januara 1878. godine u Danskoj, u siromašnoj učiteljskoj porodici [1]. Njegov dar za učenje, a posebno matematiku, rano je uočen, što mu je pomoglo da u kasnijim studijama dobi je stipendiju. Tokom studija u Kopenhagenu upoznaje se sa teorijom verovatnoće koja će mu kasnije postati glavna preokupacija.

U to vreme su, takođe, postojale veze između univerziteta i industrije, u ovom slučaju telefonske kompanije u Kopenhagenu. Po savetu profesora matematike Erlang se posvećuje istraživanju mogućnosti primene teorije verovatnoće u rešavanju problema telefonskog saobraćaja i piše prve radove 1907. i 1908. godine, koje kasnije uobličava i dopunjuje formalnim matematičkim dokazima i objavljuje pod pomenutim nazivom u danskom matematičkom časopisu: „Nyt Tidsskrift for Matematik“ B, Vol. 20, 1909, p. 33.

Radeći od 1908. godine u telefonskoj kompaniji u Kopenhagenu, Erlang se suočio sa problemima tadašnjeg telefonskog saobraćaja u čijem rešavanju je primenio svoja matematička znanja i razvio nove metode. Ova kompanija angažovala je Erlanga kao naučnog saradnika i rukovodioca laboratorije za istraživanja formirane pri kompaniji, gde je ostao i radio do kraja svog života. Upravo tu nastao je i Erlangov rad „Teorija verovatnoće i telefonski razgovori“, objavljen 1909. godine, koji se u naučnoj zajednici smatra prvim publikovanim radom iz oblasti teorije redova čekanja.

Jedan od prvih koraka u proučavanju realnih sistema usluživanja jeste istraživanje karaktera dolaznog toka zahteva klijenata (telefonski pretplatnici koji koriste telefon). Radi ilustracije Erlang je izradio evidenciju dužine 2461 telefonskog razgovora. Usledio je teorijski zaključak, odnosno definisanje opštije formule za skup mogućih raspodela frekvencija dužine telefonskih razgovora (danas poznata kao Erlangova raspodela).

Svoje najznačajnije delo Erlang objavljuje 1917. godine pod nazivom „Rešenje nekih problema u teoriji verovatnoće od značaja za automatski telefonski saobraćaj“ (u danskom časopisu: „Elektrotekniker“, Vol. 13, 1917., p. 3), gde je prezentovao neke od temeljnih formula za oblast koja će postati nova naučna disciplina. Formula koju je Erlang predložio daje vezu između prosečnog broja zahteva klijenata (poziva) za opsluživanje i broja raspoloživih kanala opsluživanja (servera). Formula daje verovatnoću da će, pri datim uslovima, svi kanali biti zauzeti. To znači da novi klijenti koji su došli u sistem u kojem su svi kanali opsluge zauzeti neće moći da budu odmah usluženi, odnosno odustaju od opsluge ako ne žele da čekaju. Za telefonsku kompaniju ovo odustajanje klijenata je čist gubitak. Sa druge strane, kompanija ne može sebi da priušti ni preveliki broj kanala opsluživanja, jer i to ima svoju cenu. Tom formulom data je mogućnost za razmatranje različitih scenarija po pitanju dimenzioniranja broja kanala usluživanja, pri zadatom nivou intenziteta pojave zahteva klijenata i za željeni nivo verovatnoće otkaza klijentima. Verovatnoća zauzetosti svih kanala opsluživanja, u slučaju sistema usluživanja bez čekanja, jeste verovatnoća otkaza. Otuda i široko prihvaćen termin za ovaj izraz – Erlangova formula otkaza“ („Erlang’s Loss formula“). Formula Erlanga je vrlo brzo nakon objavljivanja našla široku praktičnu primenu u projektovanju i dimenzionisanju telefonskih centrala širom sveta. Originalni Erlangov rad bio je objavljen u danskom časopisu, na danskom jeziku, ali je ubrzo preveden i objavljen na engleski, francuski i nemački.

Tore Olaus Engset

Najnovija istraživanja [2] ukazuju da se, uz Erlanga, za osnivača teorije masovnog usluživanja može smatrati i norveški inženjer i menadžer Tore Olaus Engseta (1865–1943), koji je radni vek proveo (na kraju i kao generalni direktor) u norveškoj telekomunikacionoj kompaniji Telegrafverket, koja je kasnije prerasla u Telenor.



Tore Olaus Engset (1865–1943)

U vreme kada je mladi Erlang tek započinjao svoju karijeru u telefonskoj kompaniji u Kopenhagenu, radeći na problemima telefonskog saobraćaja, Engset je već bio jedan od čelnih menadžera slične kompanije u Norveškoj. Engset nije bio klasični naučnik već jedan od direktora telefonske kompanije. Menadžer Engset ostavljao je vrlo malo vremena inženjeru Engsetu, entuzijasti, pa se njegov teorijski rad uglavnom odvijao noću.

Rezultat teorijskog rada Egseta bila je neobjavljena studija iz 1915. godine od 130 strana pod nazivom „O proračunu skretnica u automatskom telefonskom sistemu“. Delove ove studije Engset je publikovao tek kasnije: 1918. i 1921. godine. Erlang i Engset sreli su se 1913. godine kada je Engset posećio telefonsku kompaniju u Kopenhagenu, pa se može pretpostaviti da su razmenili i stručna iskustva, a kasnije i saradivali. Engsetov pristup je sasvim drugačiji i opštiji od Erlangovog, mada kao takav i sa složenijim kalkulacijama, pa i to, pored vremena objavljivanja radova, može biti jedan od razloga slabije primene u praksi i preferiranje jednostavnijeg Erlangovog pristupa.

Istorijsko-tehnološki kontekst

Krajem devetnaestog i početkom dvadesetog veka došlo je do velike komercijalne ekspanzije primene telefona. Interesantno je da su na samom početku veka (1900. godine) nordijske zemlje prednjačile u primeni telefonske tehnologije u odnosu na ostatak Evrope (sa izuzetkom Švajcarske koja je bila na nivou nordijskih zemalja), sa nekoliko puta većim procentualnim brojem telefona po stanovniku. Švedska i Norveška imale su po glavi stanovnika tri puta više telefona nego Nemačka ili Britanija, oko pet puta više od Holandije i Belgije i čak trinaest puta više od Austro-ugarske [2].

Telefon je za to vreme bio i prilično skup, a cene su varirale zavisno od poslovne politike telefonskih kompanija. Na primer, Internacionalna telefonska kompanije Bel u Oslu je 1880. godine imala godišnju telefonsku pretplatu po aparatu koja je bila jednaka dvema mesečnim platama jednog radnika na telefonskoj centrali, da bi razvojem monopola bila duplirana za samo godinu dana. Uvođenjem još jedne telefonske kompanije na tržište (nezavisna norveška kompanija Kristiania Telefonforening) cena je postala niža četiri puta već u sledećoj godini [2]. Niže cene učinile su da je telefon postao dostupniji mnogim korisnicima, što je dovelo do povećanja broja pretplatnika. Međutim, sa povećanjem broja korisnika pojačavao se i telefonski saobraćaj, što je nametalo nove zahteve u njihovom usluživanju. U to vreme telefonske centrale su, uglavnom, bile manuelne i zapošljavale su veliki broj operatera (prva takva centrala puštena je u rad 1878. godine u Njuhevenu, Konektikat, SAD).



Manuelna telefonska centrala

U Norveškoj je, na primer, kulminacija žalbi klijenata na dugo čekanje veze nastupila već od 1910. godine. Telefonska kompanija je narednih godina planirala da uvede automatske telefonske centrale, što je odloženo zbog Prvog svetskog rata i realizovano tek 1921. godine [2].

Osnovna veza između telefonskog saobraćaja i teorije verovatnoće jeste u tome da se ne zna kada će koji klijent koristiti telefonski aparat, koga će zvati i koliko dugo će razgovarati. Naravno, telefonska kompanija ne može da zna planove svih klijenata. Zato se može reći da su pozivi klijenata, sa aspekta telefonske kompanije, slučajnog karaktera. Sa druge strane, telefonska kompanija ima na raspolaganju ograničene resurse, koji imaju svoju cenu. Ako su ti resursi predimenzionirani (centrala velikog kapaciteta), klijenti će biti brzo usluženi jer će uvek biti slobodnog radnika na centrali koji će ih uslužiti (kanal usluživanja). To je odgovarajuća opcija za radnike na centrali, jer nisu mnogo zauzeti, ali i za klijente koji su zadovoljni, jer ne čekaju na uslugu. Međutim, telefonska kompanija to mora da plati, ali će imati finansijske gubitke. Ako su resursi poddimenzionirani radnici na centrali biće bolje radno iskorišćeni, ali će klijenti morati duže da čekaju na uslugu, pa će biti nezadovoljni. Situacija sa nezadovoljnim klijentima, dugoročno posmatrano, takođe vodi kompaniju u gubitke. Prema tome, mora se naći kompromis između ove dve krajnje opcije, odnosno neki način da se izloženi problem kvantifikuje i optimalno reši prema zadatim kriterijumima.

Traganja za kvantifikovanim opisom i rešavanjem problema rada telefonskih centrala u prvoj i drugoj deceniji dvadesetog veka u Danskoj (Agner Krarup Erlang) i Norveškoj (Tore Olaus Engset) upravo su rezultirala nastankom i razvojem naučne discipline koja nosi naziv teorija masovnog upsluživanja.

Andrej Nikolajevič Kolmogorov

Snažan impuls razvoju teorije masovnog upsluživanja dao je ruski naučnik Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903–1987), koji je 1931. godine pokazao vezu između stohastičkih procesa Markovskog i jedne klase diferencijalnih jednačina. To je omogućilo opis stanja sistema masovnog upsluživanja preko verovatnoća tih stanja. Sa aspekta verodostojnog modelovanja realnih sistema rezultati Kolmogorova su od ogromnog značaja, jer omogućavaju opisivanje dinamičke (vremenski zavisne) prirode rada realnih sistema. Nešto kasnije, 1933. godine, Kolmogorov je dao i aksiomatiku teorije verovatnoće, čime je ona i u najstrožem smislu definisana kao nauka.



Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903–1987)

Interesantno je istaći da potpuni matematički opis jednog sistema masovnog usluživanja predstavlja sistem diferencijalnih jednačina stanja sistema (poznate i kao Kolmogorove ili Erlangove jednačine). Prvo publikovano potpuno rešenje (za dinamički odziv sistema) za najjednostavniji sistem masovnog usluživanja (jednokanalni sistem, Poasonov protok klijenata i eksponencijalno vreme usluživanja) pojavilo se tek 1956. godine (rad Ledermana i Rojtera), što svedoči o matematičkoj složenosti teorije masovnog usluživanja.

Dejvid G. Kendal

Prvu sistematizaciju označavanja sistema masovnog usluživanja dao je D. G. Kendal, 1953. godine. Uveo je jednostavnu oznaku tipa A/B/C, gde je: A-tip ulaznog toka klijenata; B-tip izlaznog toka klijenata; C-broj kanala usluživanja. Kasnije su dodata i proširenja osnovne oznake koja obuhvataju i: broj mesta u redu čekanja i vrstu discipline pristupa serveru iz reda čekanja („prvi prispeo, prvi uslužen“, ili „poslednji prispeo, prvi uslužen“, itd.). U njegovu čast, ova vrsta standardizacije označavanja tipa sistema usluživanja naziva se Kendalova oznaka.

Filip Morze (1903–1985)

Prva knjiga posvećena teoriji masovnog usluživanja je „Queues, Inventory and Maintenance“ (u slobodnom prevodu: „Repovi, zalihe i održavanje“), iz 1958. godine, autora Filipa Morzea. Bukvalnim prevodom engleske reči „queue“ nastao je termin „repovi“ i „teorija repova“, koji se mogu naći u starijim izdanjima pisanim na nekadašnjem srpskohrvatskom jeziku.

Filip Morze bio je profesor na čuvenom univerzitetu MIT (Masačusetski tehnološki institut) više od 30 godina, gde je 1956. godine osnovao Centar za operaciona istraživanja. Smatra se za jednog od osnivača operacionih istraživanja u SAD. Tokom Drugog svetskog rata organizovao je istraživačku grupu za proučavanje operacija u protivpodmorničkom ratovanju.

Interesantno je da se upravo u Morzeovoj knjizi može naći praktično upotrebljiva teorijska aproksimacija za dužinu trajanja prelaznog režima rada za najosnovniji model sistema usluživanja (jednokanalni sistem usluživanja sa Poasonovim ulaznim tokom klijenata i eksponencijalnim tipom raspodele usluživanja). Problem prelaznog režima rada svoju punu afirmaciju dobio je nešto kasnije – sa širom primenom simulacionih metoda u opisu i rešavanju sistema masovnog usluživanja, što traje do današnjih dana. Korišćenjem te jednostavne formule može se lako odrediti vreme trajanja prelaznog perioda za SMO tipa $M/M/1/\infty$, u funkciji nivoa opterećenosti. Praktičan značaj problema prelaznog režima rada SMO u proučavanju realnih sistema može se videti u [7] i [8].

Džon Litl

Džon Litl prvi je izveo dokaz formule koja daje direktnu vezu intenziteta ulaznog toka klijenata, srednjeg vremena čekanja i srednjeg broja klijenata u redu čekanja, koji se po njemu naziva Litlova teorema. To je jedan od najopštijih teorijskih rezultata, koji jeste logičan i intuitivan, ali je Litl bio prvi koji je to matematički dokazao.

Metode Monte Karlo i teorija redova čekanja

Na izmene ove teorije danas utiču problemi modernih telekomunikacija (mobilna telefonija, internet, lokalne računarske mreže, itd.), ali i drugi vidovi saobraćaja (vazdušni, pomorski, kopneni), usluga, trgovine i vojne primene.

Teoriju redova čekanja karakteriše izuzetno velika matematička složenost, što znači da za mnoge složene modele i uslove rada praktično ne može da pruži upotrebljiva rešenja. Potvrda o izuzetnoj složenosti teorije redova čekanja može se naći i u [3] i [4], kao nekim od najcitiranijih sveobuhvatnih knjiga za teoriju masovnog usluživanja. I upravo tu gde je praktična moć klasične teorije masovnog usluživanja iscrpljena, stupaju na scenu metode simulacionog modelovanja slučajnih procesa, poznatije kao simulaciono modelovanje Monte Karlo.

Od sredine dvadesetog veka u proučavanju sistema masovnog opsluživanja, pored tradicionalne matematičke metodologije, intenzivno se koristi i metodologija simulacionog modelovanja Monte Karlo. Simulacio-

no modelovanje i njegova primena je poseban fenomen u nauci i praktično je nezamislivo bez blagodeti informacionih tehnologija (moćni računari i odgovarajući softver). Ime i sistematski razvoj metoda Monte Karlo praktično počinje od 1944. godine i čuvenog projekta Menhetn u okviru kojeg je razvijana atomska bomba. Istraživanja su podrazumevala simulaciju probabilističkih problema: difuzija neutrona u fisionom materijalu je stohastičkog (slučajnog) karaktera. Sa matematičkog aspekta rulet je jednostavni generator slučajnih brojeva, a grad Monte Karlo, kao prestonica ruleta i kocke Formalno, metoda Monte Karlo nastala je 1949. godina, kada je objavljen istoimeni članak Metropolis i Ulama. Ova metoda obezbeđuje približna rešenja za niz matematičkih problema primenom statističkog uzorkovanja eksperimenata nad računarskim modelima.

Vojna oblast i teorija redova čekanja

Brojni su sistemi, procesi i situacije u vojnoj oblasti koji se mogu prikazati kao sistemi masovnog usluživanja. Složenost ovih modela diktirana je realnošću, pa se, pored klasične teorije redova čekanja, intenzivno koriste metodi simulacionog modelovanja Monte Karlo.

Moderno ratovanje odlikuje se visokim intenzitetom dejstava i angažovanja, nelinearnostima, asimetričnošću i relativno kratkim trajanjem. Bojevi i ratovi uvek su neizvesni, a resursi koji se daju vojnim snagama često izgledaju nedovoljni za date zadatke. U svakom ratu oduvek su postojale bar dve strane koje su jedna drugu „usluživale“ na bojnopolju. Ofanzive su trajale nedeljama i mesecima, a ratovi godinama. Moderno doba skratilo je vreme ratova na nivo od nekoliko meseci ili čak nedelja (bojevi ili pojedinačne „kampanje“ se mere danima), ali je povećalo intenzitet i složenost dejstava i naprezanje resursa, pri čemu je neizvesnost ostala i dalje najvažnija konstanta. Ovakva konstelacija složenih faktora nametnula je imperativnu potrebu primene metode simulacija Monte Karlo u proučavanju savremenih problema u vojnoj oblasti koji su konceptualno opisivi kao sistemi redova čekanja. Više informacija o simulacionom modelovanju Monte Karlo, mogućnostima i ograničenjima teorije redova čekanja, kao i ključnim izazovima na tom polju, nalazi se u [9].

Umesto zaključka

Teorija redova čekanja i simulaciono modelovanje Monte Karlo zasnovani su na rezultatima teorije verovatnoće. Još 1812. godine čuveni francuski naučnik Pjer Simon Laplas je u svojoj knjizi „Analitička teorija verovatnoće“ rekao da je fascinantno da nauka koja je počela svoj razvoj

proučavanjem problema igara na sreću treba da postane najvažniji predmet ljudske preokupacije. Najvažnija pitanja života su većim delom, u stvari, problemi verovatnoće.

Literatura

- [1] Brockmeyer, E., Halstrom H., Jensen A., *The life and works of A. K. Erlang*, The Copenhagen Telephone Company, Copenhagen, Denmark, 1948.
- [2] Stordahl, K., *The History Behind the Probability Theory and the Queuing Theory*, *Elektronikk*, No.2, 2007., str. 123–140
- [3] Kleinrock, L., *Queueing systems, Volume I: Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1975.
- [4] Gross, D., Harris, M. C., *Fundamentals of queueing theory*, John Wiley & Sons, New York, 1974.
- [5] Morse, P. M., *Queues, inventories and maintenance*, John Wiley & Sons, New York, 1958.
- [6] Vukadinović, S., *Masovno opsluživanje*, Naučna knjiga, Beograd, 1988.
- [7] Nikolić, N., *Korisnički aspekt prelaznog režima rada sistema masovnog opsluživanja*, *Vojnotehnički glasnik*, br. 4, 2007., str. 429–440.
- [8] Nikolić, N., *Limitations of theoretical and commonly used simulation approaches in considering military queueing systems*, *Proceedings 15th European Simulation Symposium*, Delft, Holland, Oct. 2003., str. 602–607.
- [9] Nikolić, N., *Monte Carlo Modeling of Military Queueing Systems – Challenge of the Initial Transience*, monografija, Zadužbina Andrejević i Institut za strategijska istraživanja, Beograd, 2008., (www.zandrejevic.org).