

# OBJEKTIVNI PRISTUP ODREĐIVANJU TEŽINA KRITERIJUMA

Milićević R. *Milić*, Univerzitet odbrane, Vojna akademija, Katedra logistike, Beograd,

Župac Ž. *Goran*, Univerzitet odbrane, Vojna akademija, Katedra menadžmenta u odbrani, Beograd

OBLAST: matematika, operaciona istraživanja

VRSTA ČLANKA: naučna kritika

## Sažetak:

*U radu je dat prikaz metoda objektivnog pristupa određivanju težina kriterijuma koje se mogu uspešno primenjivati u modelima višekriterijumskog odlučivanja. Prikazane su metode: entropije, CRITIC i FANMA, kao i moguća kombinacija metoda objektivnog i subjektivnog pristupa. Iako se zasnivaju na različitim teoretskim postavkama, a time su im algoritmi realizacije različiti, sve metode za polaznu osnovu imaju matricu odlučivanja. Objektivnim pristupom određivanju težina kriterijuma eliminišu se negativni uticaji donosioca odluke na težine kriterijuma i na konačno rešenje višekriterijumskog problema.*

*Osnovni cilj rada jeste sistematizovan prikaz procedura provođenja metoda kao svojevrsna pomoć svima koji se sreću sa problemom određivanja težina kriterijuma pri rešavanju višekriterijumskih zadataka.*

*Mogućnost primene metoda prikazana je na jednom numeričkom primeru.*

Key words: *težine kriterijuma, entropija, CRITIC, FANMA.*

## Uvod

Određivanje težina kriterijuma jedan je od ključnih problema koji se javlja u modelima višekriterijumske analize. Pored činjenice da ne postoji jedinstveno određenje pojma težine kriterijuma, problem određivanja težina kriterijuma dodatno usložava nedovoljno poznavanje mogućih metoda određivanja težina kriterijuma u konkretnoj situaciji odlučivanja. Uzimajući u obzir činjenicu da težine kriterijuma mogu značajno uticati na rezultat procesa odlučivanja, jasno je da se posebna pažnja mora posvetiti objektivnosti težina kriterijuma, što nažalost nije uvek prisutno pri rešavanju praktičnih problema. Poznavanje pravog značenja kriterijuma ima suštinsku važnost za pravilnu primenu metoda i modela.

Generalno je moguće napraviti razliku između dva tipa težina: koeficijentna važnosti i pokazatelja razmene (kompromisa, trade-off). Glavna razlika između težina kao koeficijentna važnosti i težina kao pokazatelja razmene je u načinu na koji se određuju težine, odnosno da li se razmatra kompenzacija između kriterijuma kao mogućnost da dobre performanse po nekim kriterijumima mogu nadoknaditi loše performanse po drugim kriterijumima.

Način na koji se određuju težine kriterijuma mora biti u skladu sa višekriterijumskim modelom koji će biti korišćen. U metodama, koje koriste ordinalnu informaciju o vrednosti kriterijuma, i u kojima težine predstavljaju koeficijente važnosti, doprinos pojedinog kriterijuma ukupnoj performansi neke varijante ne zavisi od intenziteta preferentnosti. U suprotnom, u kompenzacionim metodama, doprinos bilo kog kriterijuma ukupnoj vrednosti varijante je proporcionalan intenzitetu preferentnosti. Postoje i višekriterijumski modeli koji koriste kardinalne informacije o vrednosti kriterijuma i gde težine predstavljaju koeficijente važnosti. U tim slučajevima maksimalan doprinos svakog kriterijuma ukupnoj vrednosti varijante jednak je samoj težini kriterijuma i zato su te metode nekompensacione (kao npr.: PROMETHEE, ELECTRE III).

Procedura za određivanje težina kriterijuma su već godinama predmet istraživanja i naučnih rasprava. U literaturi je moguće pronaći više razvijenih pristupa određivanja težina kriterijuma. Tradicionalne metode određivanja težina kriterijuma uključuju npr.: trade-off metodu, proporcionalnu (ratio) metodu, swing metodu, conjoint metode i AHP. Pored njih zastupljena je grupa metoda u kojima se težine kriterijuma proračunavaju na osnovu ranga kriterijuma. Takođe su razvijene metode u kojima se težine kriterijuma proračunavaju na osnovu informacije sadržane u matrici odlučivanja. U procesu određivanja težina kriterijuma može biti angažovano više eksperata ili zainteresovanih lica što zahteva primenu metoda grupnog odlučivanja uz matematičku ili socijalnu agregaciju individualnih težina.

## Klasifikacija metoda određivanja težina kriterijuma

Na osnovu proučavanja dostupne literature može se izvesti zaključak da ne postoji jedinstvena podela metoda određivanja težina kriterijuma i da je ona vršena po više osnova u skladu sa shvatanjima i potrebama autora za rešavanje konkretnog praktičnog problema.

Tako je u literaturi [1] izvršena podela metoda za određivanja težina kriterijuma na: statističke i algebarske, holističke i dekomponovane, direktne i indirektne i kompenzacione i nekompensacione. U algebarskim načinima proračunava se  $n$  težina na osnovu skupa  $n-1$  rasuđivanja (zaključaka) korišćenjem jednostavnog sistema jednačina. Statističke procedure ko-

riste regresionu analizu zasnovanu na redundantnom skupu zaključaka. Dekomponovane procedure su zasnovane na poređenju jedan na jedan parova kriterijuma, dok u holističkim metodama donosilac odluke, prilikom izražavanja svojih preferenci, razmatra i kriterijume i varijante i vrši ukupnu ocenu varijanti. U direktnim metodama donosilac odluke poredi dva kriterijuma koristeći relacionu (ratio) skalu, dok se u indirektnim metodama na osnovu preferencija donosioca odluke proračunavaju težine kriterijuma.

Kompenzacione metode se koriste za agregaciju parcijalnih vrednosti u metodama višeatributske teorije vrednosti, dok se nekompensacione koriste za agregaciju parcijalnih vrednosti u metodama višeg ranga (outranking methods). Prva grupa metoda podrazumeva strogu kompenzaciju između kriterijuma i težine kriterijuma se koriste kao proračunski faktori, dok se kod druge grupe ne vrši kompenzacija i težine kriterijuma se koriste kao koeficijenti važnosti u agregacionim formulama.

U osnovi, većina pristupa određivanju težina kriterijuma može se podeliti na subjektivne i objektivne. Subjektivni pristupi su zasnovani na određivanju težina kriterijuma na osnovu informacije dobijene od donosioca odluke ili od eksperata uključenih u proces odlučivanja. Subjektivni pristupi odražavaju subjektivno mišljenje i intuiciju donosioca odluke i time donosilac odluke utiče na rezultat procesa odlučivanja. Objektivni pristupi su zasnovani na određivanju težina kriterijuma na osnovu informacije sadržane u matrici odlučivanja primenom određenih matematičkih modela. Objektivni pristupi zanemaruju mišljenje donosioca odluke.

## Metode objektivnog pristupa određivanju težina kriterijuma

U metodama objektivnog pristupa određivanju težina kriterijuma težište je na analizi matrice odlučivanja, odnosno razmatraju se vrednosti varijanti u odnosu na skup kriterijuma, da bi se potom izvela informacija o vrednostima težina kriterijuma. Opštost prilaza kao i pojma matrica odlučivanja se ne narušavaju ni kod tzv. višenivojskih hijerarhija odlučivanja, jer se tada na svakom nivou generišu matrice odlučivanja, a principi dominantnosti i dalje važe.

U objektivnom pristupu određivanju težina kriterijuma kriterijumi se posmatraju kao izvori informacija i relativna važnost kriterijuma reflektuje količinu informacija sadržanu u svakom od njih.

Objektivne težine kriterijuma, merene preko srednje vrednosti unutrašnje (svojtvene) informacije generisane datim skupom varijanti u odnosu na svaki kriterijum, odražavaju prirodu konflikta između kriterijuma.

Količina informacije sadržana u svakom kriterijumu dovodi se u vezu sa intenzitetom kontrasta svakog kriterijuma. Standardna devijacija i en-

tropija su moguće mere intenziteta i načini izvođenja objektivnih težina kriterijuma [2].

Najpoznatije objektivne metode su: metoda entropije, metoda CRITIC i metoda FANMA.<sup>1</sup>

### Metoda entropije

Određivanje objektivnih težina kriterijuma prema metodi entropije se zasniva na merenju neodređenosti informacije koju sadrži matrica odlučivanja i direktno generiše skup težinskih vrednosti kriterijuma na osnovu međusobnog kontrasta pojedinačnih kriterijumskih vrednosti varijanti za svaki kriterijum i zatim istovremeno za sve kriterijume [3].

Neka je data matrica odlučivanja:

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} C_1 & C_2 & \dots & C_m \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1)$$

u kojoj je poznato:

- varijante  $A_i, i=1,2,\dots,n$ ,
- kriterijumi  $C_j, j=1,2,\dots,m$ ,
- kriterijumske vrednosti varijanti  $a_{ij}$ .

Određivanje težina kriterijuma  $w_j$  provodi se kroz tri koraka. U prvom koraku vrši se normalizacija kriterijumskih vrednosti varijanti  $a_{ij}$  primenom obrasca:

$$r_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{i=1}^n a_{ij}} \quad (2)$$

<sup>1</sup> Pored navedenih metoda, za objektivno određivanje težina kriterijuma može se iskoristiti metoda DEA (Data Envelopment Analysis). Budući da određivanje težina kriterijuma nije primarni cilj metode DEA, već se one dobijaju kao međurezultat rangiranja varijanti po efikasnosti, ona u ovom radu neće biti obrađena.

Na taj način dobija se normalizovana matrica odlučivanja:

$$R = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & \dots & C_m \\ & w_1 & w_2 & \dots & w_m \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nm} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3)$$

Količina informacije sadržana u normalizovanoj matrici odlučivanja (3) i emitovana od svakog kriterijuma  $C_j$  može biti merena kao vrednost entropije  $e_j$ :

$$e_j = -k \sum_{i=1}^n r_{ij} \ln r_{ij} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

Uvođenjem konstante  $k=1/\ln n$  obezbeđeno je da se sve vrednosti  $e_j$  nalaze u intervalu  $[0, 1]$ .

U drugom koraku određuje se stepen divergencije  $d_j$  u odnosu na prosečnu količinu informacije sadržanu u svakom kriterijumu:

$$d_j = 1 - e_j \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (5)$$

$d_j$  predstavlja svojstven intenzitet kontrasta kriterijuma  $C_j$ . Što je veća divergencija početnih kriterijumskih vrednosti  $a_{ij}$  varijanti  $A_i$  za dati kriterijum  $C_j$ , vrednost  $d_j$  za dati kriterijum je veća, pa se zaključuje da je važnost kriterijuma  $C_j$  za dati problem odlučivanja veća. Ako sve varijante imaju slične vrednosti stepena divergencije za određeni kriterijum, onda je taj kriterijum manje važan za dati problem odlučivanja. Takođe, ako su sve vrednosti stepena divergencije varijanti za određeni kriterijum iste, dati kriterijum može biti izostavljen jer on ne donosi novu informaciju donosiocu odluke.<sup>2</sup>

Budući da vrednost  $d_j$  predstavlja specifičnu meru intenziteta kontrasta kriterijuma  $C_j$ , konačna relativna težina kriterijuma, u trećem koraku metode, može da se dobije jednostavnom aditivnom normalizacijom:

$$w_j = \frac{d_j}{\sum_{j=1}^m d_j} \quad (6)$$

<sup>2</sup> Zeleny M., *Multiple Criteria Decision Making*. McGraw-Hill, New York, 1982.

Metoda se može smatrati objektivnom jer generiše težinske vrednosti kriterijuma direktno iz kriterijumskih vrednosti varijanti i eliminiše problem subjektivnosti, nekompetentnosti ili odsustva donosioca odluke. Takođe, nisu bitni ni priroda i tip kriterijuma.

### *Metoda CRITIC*

Konflikt između različitih kriterijuma jedna je od osnovnih pojava u višekriterijumskom odlučivanju koja predstavlja suštinu svake situacije odlučivanja. U višekriterijumskim problemima kod kojih su kriterijumske vrednosti varijanti po svim kriterijumima u potpunoj saglasnosti rešenje je očigledno. Međutim, kada su kriterijumi međusobno konfliktni, rešenje višekriterijumskog problema zahteva primenu složenih postupaka izbora jedne preferirane varijante ili utvrđivanja poretka varijanti.

Metoda CRITIC (CRiteria Importance Through Intercriteria Correlation) [4] je metoda za određivanje objektivnih vrednosti težina kriterijuma koja uključuje intenzitet kontrasta i konflikt koji je sadržan u strukturi problema odlučivanja. Ona spada u klasu korelacionih metoda i zasniva se na analitičkom ispitivanju matrice odlučivanja radi utvrđivanja informacija sadržanih u kriterijumima po kojima se ocenjuju varijante.

Za utvrđivanje kontrasta kriterijuma koriste se standardna odstupanja normiranih kriterijumskih vrednosti varijanti po kolonama, kao i koeficijenti korelacije svih parova kolona.

Polazeći od opšte definicije višekriterijumskog problema:

$$\max \{f_1(a), f_2(a), \dots, f_m(a) | a \in A\} \quad (7)$$

za svaki kriterijum  $f_j$  definiše se funkcija pripadnosti  $x_j$  koja sve vrednosti kriterijuma  $f_j$  prevodi u interval  $[0, 1]$ .

$$x_{aj} = \frac{f_j(a) - f_j^-}{f_j^+ - f_j^-} \quad (8)$$

Ova transformacija zasnovana je na konceptu idealne tačke. Vrednost  $x_{aj}$  izražava koliko je varijanta  $a$  blizu idealne vrednosti  $f_j^+$ , koja predstavlja najbolju vrednost kriterijuma  $f_j$ , i koliko je udaljena od antiidealne vrednosti  $f_j^-$ , koja je najlošija vrednost kriterijuma  $f_j$ . Obe vrednosti postignute su kod bar jedne od posmatranih varijanti.

Na taj način je početna matrica konvertovana u matricu sa generičkim elementima  $x_{ij}$ . Vektor kriterijuma moguće je posmatrati izolovano:

$$x_j = (x_j(1), x_j(2), \dots, x_j(n)) \quad (9)$$

Svaki vektor ima standardno odstupanje  $\sigma_j^3$ , koje predstavlja meru odstupanja vrednosti varijanti za dati kriterijum od neke srednje vrednosti. To je mera intenziteta kontrasta posmatranog kriterijuma. Standardno odstupanje datog kriterijuma je veličina koja se razmatra u daljem procesu odlučivanja.

U nastavku metode potrebno je konstruisati simetričnu matricu dimenzija  $m \times m$  sa elementima  $r_{jk}$ , koji predstavljaju koeficijente linearne korelacije vektora  $x_j$  i  $x_k$ . Što je veće neslaganje između kriterijumskih vrednosti varijanti za kriterijume  $j$  i  $k$ , to je manja vrednost koeficijenta  $r_{jk}$ . Izraz

$$\sum_{k=1}^m (1 - r_{jk}) \quad (10)$$

predstavlja meru konflikta kriterijuma  $j$  u odnosu na ostale kriterijume u datoj situaciji odlučivanja.

Umesto koeficijenta  $r_{jk}$  može se primeniti Spirmenov koeficijent korelacije ranga  $R_{jk}^s$  da bi se postiglo uopštenije kvantifikovanje saglasnosti rangova elemenata sadržanih u vektorima  $x_j$  i  $x_k$ .

Količina informacije  $C_j$  sadržana u kriterijumu  $j$  određuje se kombinacijom prethodno navedenih veličina  $\sigma_j$  i  $r_{jk}$  na sledeći način:

$$C_j = \sigma_j \sum_{k=1}^m (1 - r_{kj}) \quad (11)$$

Na osnovu prethodne analize može se zaključiti da veća vrednost  $C_j$  podrazumeva veću količinu informacije koja se dobija od datog kriterijuma, a time je i relativna važnost posmatranog kriterijuma za dati proces odlučivanja veća.

Objektivne težine kriterijuma dobijaju se normalizacijom veličina  $C_j$ :

$$w_j = \frac{C_j}{\sum_{k=1}^m C_k} \quad (12)$$

Težine kriterijuma moguće je odrediti samo na osnovu vrednosti standardnog odstupanja vektora  $x_j$ :

$$w_j = \frac{\sigma_j}{\sum_{k=1}^m \sigma_k} \quad (13)$$

<sup>3</sup> Umesto standardnog odstupanja  $\sigma_j$ , prema mišljenju autora rada, bolje je koristiti empirijsku vrednost standardnog odstupanja  $s_j$ , jer se radi o ograničenom broju kriterijuma koji se mogu posmatrati uzorkom populacije kriterijuma.

## Metoda FANMA

Određivanje težina kriterijuma metodom FANMA zasniva se na korišćenju principa rastojanja od idealne tačke i tzv. rane težinske normalizacije [5].

Prvo je potrebno izvršiti skalarizaciju elemenata matrice odlučivanja A i formirati matricu  $X = [x_{ij}]_{n \times m}$  na sledeći način:

a) za kriterijume koji se maksimiziraju:

$$x_{ij} = \frac{a_{ij} - a_j^{\min}}{a_j^{\max} - a_j^{\min}}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad (14)$$

$$a_j^{\max} = \max\{a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}\}, \quad a_j^{\min} = \min\{a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}\}$$

b) za kriterijume koji se minimiziraju:

$$x_{ij} = \frac{a_j^{\max} - a_{ij}}{a_j^{\max} - a_j^{\min}}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad (15)$$

Matrica odlučivanja X se dalje transformiše u novu, otežanu matricu  $Y = [y_{ij}]_{n \times m}$ , gde je:  $y_{ij} = w_j x_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, m$ .

„Idealno rešenje“ može se definisati kao veštačka varijanta  $A^* = \{y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*\}$ , gde je:  $y_j^* = w_j x_j^*$ , a  $x_j^* = \max\{x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}\}$  predstavlja idealnu vrednost kriterijuma  $C_j$ .

Kao meru rastojanja svake alternative u odnosu na idealnu, može se iskoristiti kvadratno rastojanje:

$$g_i = \sum_{j=1}^m (y_j^* - y_{ij})^2 = \sum_{j=1}^m w_j^2 (x_j^* - x_{ij})^2, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

Jasno je da je za manje  $g_i$ , varijanta  $A_i$  bolja.

Težinski koeficijenti  $w_j$  određuju se rešavanjem višekriterijumskog optimizacionog modela:

minimizirati:

$$G^* = \{g_1, g_2, \dots, g_n\} \quad (17)$$

uz ograničenja:  $e^T w = 1$  i  $w \geq 0$ ,

gde su:  $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T$  i  $e = (1, 1, \dots, 1)^T$ .

Skalarizacijom vektorske kriterijumske funkcije dobija se uprošćen jednokriterijumski model:

minimizirati:

$$\sum_{i=1}^n g_i = w^T H w \quad (18)$$

uz ograničenja:  $e^T w = 1$  i  $w \geq 0$ .



H je dijagonalna matrica sa elementima:

$$h_{jj} = \sum_{i=1}^n (x_j^* - x_{ij})^2, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (19)$$

Uvođenjem Lagranžijana  $L = w^T H w + 2\lambda(e^T w - 1)$  i diferenciranjem po  $w$ , a zatim po  $\lambda$  dobijaju se dve jednačine:

$$Hw + \lambda e = 0 \quad (20)$$

$$e^T w = 1$$

čijim se rešavanjem dobija:

$$w^* = \frac{H^{-1}e}{e^T H^{-1}e} \quad (21)$$

$$\lambda^* = \frac{-1}{e^T H^{-1}e}$$

Ako se u prethodni izraz uvrste vrednosti inverzne matrice  $H^{-1}$  i izvrše potrebna preračunavanja, dobija se traženi vektor  $w^*$ :

$$w_j^* = \frac{1}{\left[ \sum_{i=1}^n (x_j^* - x_{ij})^2 \right] \left[ \sum_{j=1}^m \frac{1}{\sum_{i=1}^n (x_j^* - x_{ij})^2} \right]} \quad (22)$$

## Kombinacija subjektivnog i objektivnog pristupa određivanju težina kriterijuma

Određivanje težina kriterijuma kombinovanim pristupom primenjuje se s ciljem obezbeđenja uticaja subjektivnih i objektivnih faktora na težine kriterijuma. Postoji više mogućnosti kombinovanja subjektivnih i objektivnih metoda određivanja težina kriterijuma. Jedan interesantan primer predstavlja kombinacija metode otežanih najmanjih kvadrata (subjektivni pristup) i metode FANMA (objektivni pristup) formiranjem dvokriterijumskog modela matematičkog programiranja [6]:

$$\min \begin{pmatrix} z_1 = w^T F w \\ z_2 = w^T H w \end{pmatrix} \quad (23)$$

uz ograničenja:

$$e^T w = 1 \quad (24)$$

$$w \geq 0$$

Matrica  $F$  se formira u metodi otežanih najmanjih kvadrata (The Weighted Least Squares Method – WLS) koja minimizira funkciju  $L_2$  Euklidskog rastojanja definisanu za elemente nepoznatog vektora prioriteta  $w$  i poznate ocene  $a_{ij}=w_i/w_j$ .

Da bi odredio težine kriterijuma, donosilac odluke vrši parna poređenja kriterijuma. Rezultati poređenja kriterijuma (skup poređenja parova kriterijuma) prikazuju se u formi matrice  $A=[a_{ij}]_{n \times n}$ . Elementi matrice  $a_{ij}$  zadovoljavaju ograničenja:  $a_{ij}>0$ ,  $a_{ij}=1/a_{ji}$ ,  $a_{ii}=1$  i predstavljaju relativnu važnost kriterijuma  $C_i$  u odnosu na kriterijum  $C_j$ .

Iz matrice  $A$  potrebno je identifikovati vektor  $w=(w_1, w_2, \dots, w_n)^T$  koji najbolje ocenjuje koeficijente  $w_i/w_j$  na osnovu svih elemenata matrice. Ako se elementi vektora  $w$  normalizuju aditivnim metodom tako da je njihov zbir 1, konačne vrednosti predstavljaju relativne prioritete kriterijuma, a vektor  $w$  vektor prioriteta matrice  $A$ .

Metode za određivanje  $w$  iz date matrice poređenja  $A$  nazivaju se zajedničkim imenom prioritizacione metode. Postoji više metoda prioritizacije, a ovde će biti prikazana metoda otežanih najmanjih kvadrata.

Težine kriterijuma dobijaju se rešavanjem sledećeg ograničenog nelinearnog problema optimizacije:

$$\min z = w^T F w = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (w_i - a_{ij} w_j)^2 \quad (25)$$

uz uslov:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (26)$$

gde je matrica  $F=[f_{kj}]_{n \times n}$ , sa elementima:

$$f_{kk} = n - 2 + \sum_{i=1}^n a_{ik}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (27)$$

$$f_{kj} = -(a_{kj} + a_{jk}), \quad k, j = 1, 2, \dots, n, \quad k \neq j$$

Matrica  $F$  je, tzv.  $M$ -matrica [7], isključivo je pozitivna ako za bilo koje  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$  postoji bar jedno  $a_{kj} \neq a_{ki} a_{ij}$ . Pretpostavlja se da se gornji problem može rešiti tako da se dobije da je  $w > 0$  bez postavljanja ovog ograničenja. Navedeni model spada u klasu nelinearnih.

Uvođenjem Lagranžijana:  $L_1 = w^T F w + 2\lambda_1 (e^T w - 1)$  i njegovim diferenciranjem po  $w$  i  $\lambda_1$  dobija se sistem od  $(n+1)$  nehomogenih linearnih jednačina sa  $(n+1)$  nepoznatom:

$$\begin{aligned} Fw + \lambda_1 e &= 0 \\ e^T w &= 1 \end{aligned} \quad (28)$$

Rešavanjem navedenog sistema jednačina dobija se:

$$w^* = \frac{F^{-1}e}{e^T F^{-1}e}, \quad \lambda_1^* = \frac{-1}{e^T F^{-1}e} \quad (29)$$

Za primenu kombinovanog pristupa određivanju težina kriterijuma nije potrebno provoditi proceduru metode otežanih najmanjih kvadrata u potpunosti, već je dovoljno odrediti matricu  $F$ . Ovde je ona prikazana u potpunosti radi sagledavanja metode u potpunosti.

Matrica  $H$  u modelu (33) definisana je u metodi FANMA i njeno određivanje neće biti ponovo prikazano.

Za rešenje kombinovanog problema datog modelima (33) i (34) može se koristiti otežani linearni aditivni metod višeciljnog programiranja. Procedura je sledeća:

$$\min(z_3 = w^T Qw) \quad (30)$$

uz ograničenja:

$$\begin{aligned} e^T w &= 1 \\ w &\geq 0 \end{aligned} \quad (31)$$

gde je  $Q = \alpha F + \beta H$ , a elementi matrice  $Q$  su:

$$\begin{aligned} q_{ii} &= \alpha(n-2 + \sum_{k=1}^n a_{ki}) + \beta \sum_{k=1}^n (x_i^* - x_{ki})^2, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ q_{ij} &= -\alpha(a_{ij} + a_{ji}), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j \end{aligned} \quad (32)$$

$\alpha$  i  $\beta$  odražavaju relativnu važnost subjektivnog i objektivnog pristupa respektivno i zadovoljavaju:  $0 < \alpha, \beta < 1$  i  $\alpha + \beta = 1$ .

Da bi postavljeni problem bio rešen, potrebno je ignorisati ograničenja  $w \geq 0$  i uvesti Lagranžijan  $L_3 = w^T Qw + 2\lambda_3(e^T w - 1)$ . Diferenciranjem po  $w$  i  $\lambda_3$  dobija se sledeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned} Qw + \lambda_3 e &= 0 \\ e^T w &= 1 \end{aligned} \quad (33)$$

Rešavanjem sistema jednačina dobija se:

$$w^* = \frac{Q^{-1}e}{e^T Q^{-1}e}, \quad \lambda_1^* = \frac{-1}{e^T Q^{-1}e} \quad (34)$$

gde  $w^*$  predstavlja vektor težina kriterijuma određen subjektivnim i objektivnim pristupom. Vektor težina kriterijuma  $w^*$  ima praktično značenje ako su zadovoljena ograničenja  $w \geq 0$ .

Pored prikazane izabrane kombinacije subjektivnog i objektivnog pristupa, u opštem slučaju, kombinovanje bilo koje metode objektivnog i subjektivnog pristupa može se izvršiti na sledeći način:

- primenom izabrane metode subjektivnog pristupa odrediti težine kriterijuma  $w_j^{(s)}$ ,
- izabranom metodom objektivnog pristupa odrediti težine kriterijuma  $w_j^{(o)}$ ,
- konačne težine kriterijuma  $w_j$  odrediti pomoću izraza:

$$w_j = \frac{w_j^{(s)} w_j^{(o)}}{\sum_{j=1}^m w_j^{(s)} w_j^{(o)}} \quad (35)$$

## Primer određivanja težina kriterijuma objektivnim metodama

Način određivanja težina kriterijuma primenom navedenih metoda biće prikazan na jednom ilustrativnom primeru. Budući da je osnovna namena primera prikaz primene metoda objektivnog određivanja težina kriterijuma, u radu neće biti detaljnije razrađivana priroda problema koji se rešava. Pretpostavlja se da je analizom konkretne situacije odlučivanja formirana matrica odlučivanja A data u tabeli 1. Potrebno je izvršiti rangiranje osam varijanti na osnovu sedam kriterijuma, od kojih je pet kriterijuma tipa maksimuma, a dva su tipa minimuma. Za svaki kriterijum određene su kriterijumske vrednosti varijanti.<sup>4</sup> Postoje svi potrebni podaci za određivanje težina kriterijuma.

Tabela 1  
Table 1

Matrica odlučivanja A  
A decision matrix

i \ j		Kriterijumi						
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7
Varijante	V1	80	2688	50	65	65	1524.6	15
	V2	100	4044.8	25	10	25	1224	10
	V3	50	2252.8	25	65	65	1836	65
	V4	35	2252.8	65	100	80	2448	25
	V5	1	3584	50	100	80	3051	90
	V6	5	3584	80	100	100	3051	70
	V7	80	4480	100	15	100	2754	40
	V8	80	2688	10	65	35	2134.8	55
		min	max	max	max	max	max	min

<sup>4</sup> Kvalitativne kriterijumske vrednosti varijanti se pogodnim transformacijama pretvaraju u kvantitativne.

## Određivanje težina kriterijuma metodom entropije

**Korak 1:** primenom obrasca (2) izvršena je normalizacija vrednosti početne matrice odlučivanja. Normalizovana matrica odlučivanja R data je u tabeli 2.

Tabela 2  
Table 2

Normalizovana matrica odlučivanja R  
Normalized R decision matrix

	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7
V1	0.186	0.105	0.123	0.125	0.118	0.085	0.041
V2	0.232	0.158	0.062	0.019	0.045	0.068	0.027
V3	0.116	0.088	0.062	0.125	0.118	0.102	0.176
V4	0.081	0.088	0.160	0.192	0.145	0.136	0.068
V5	0.002	0.140	0.123	0.192	0.145	0.169	0.243
V6	0.012	0.140	0.198	0.192	0.182	0.169	0.189
V7	0.186	0.175	0.247	0.029	0.182	0.153	0.108
V8	0.186	0.105	0.025	0.125	0.064	0.118	0.149

Primenom izraza (4), za  $k=0,481$  dobijene su sledeće vrednosti entropije  $e_j$ :

$$e_j=(0,864; 0,985; 0,919; 0,918; 0,962; 0,979; 0,913)$$

**Korak 2:** vrednosti stepena divergencije  $d_j$ , određenih na osnovu izraza (5), su sledeće:

$$d_j=(0,136; 0,015; 0,081; 0,082; 0,038; 0,021; 0,087)$$

**Korak 3:** aditivnom normalizacijom stepena divergencije dobijene su vrednosti težina kriterijuma:

$$w_j=(0,297; 0,032; 0,176; 0,178; 0,082; 0,045; 0,190).$$

## Određivanje težina kriterijuma metodom CRITIC

Skalarizacijom podataka datih u matrici A primenom izraza (8) dobijena je matrica X (tabela 3). Primenjeni način skalarizacije polaznih podataka ne uzima u obzir tip kriterijuma (min. ili max.).

Tabela 3  
Table 3

Matrica X  
Matrix X

	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7
V1	0.798	0.195	0.444	0.611	0.533	0.165	0.063
V2	1.000	0.805	0.167	0.000	0.000	0.000	0.000
V3	0.495	0.000	0.167	0.611	0.533	0.335	0.688
V4	0.343	0.000	0.611	1.000	0.733	0.670	0.188
V5	0.000	0.598	0.444	1.000	0.733	1.000	1.000
V6	0.040	0.598	0.778	1.000	1.000	1.000	0.750
V7	0.798	1.000	1.000	0.056	1.000	0.837	0.375
V8	0.798	0.195	0.000	0.611	0.133	0.499	0.563

Za svaki kriterijum K1 do K7 proračunata je vrednost standardnog odstupanja  $s_j$ :

$$s_j = (0,377; 0,378; 0,338; 0,403; 0,366; 0,378; 0,356).$$

Vrednosti linearnog koeficijenta korelacije kriterijumskih vrednosti varijanti  $r_{ij}$  date su u tabeli 4.

Tabela 4  
Table 4

Koeficijenti linearne korelacije kriterijumskih vrednosti varijanti  $r_{ij}$   
Coefficients of the linear correlation of the criteria values of  $r_{ij}$  variants

	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7
K1	1.000	0.128	-0.321	-0.852	-0.628	-0.775	-0.749
K2	0.128	1.000	0.471	-0.546	0.194	0.253	0.007
K3	-0.321	0.471	1.000	0.058	0.890	0.631	0.028
K4	-0.852	-0.546	0.058	1.000	0.391	0.538	0.543
K5	-0.628	0.194	0.890	0.391	1.000	0.791	0.390
K6	-0.775	0.253	0.631	0.538	0.791	1.000	0.710
K7	-0.749	0.007	0.028	0.543	0.390	0.710	1.000

Kada se na podatke date u tabeli 4 primene potrebni proračuni iz obrasca (10), a zatim se uvrste u izraz (11), dobijaju se vrednosti  $C_j$ :

$$C_j = (3,463; 2,078; 1,433; 2,364; 1,456; 1,457; 1,807).$$

Aditivnom normalizacijom vrednosti  $C_j$  dobijaju se težine kriterijuma  $w_j$ :

$$w_j = (0,246; 0,148; 0,102; 0,168; 0,104; 0,104; 0,129).$$

### Određivanje težina kriterijuma metodom FANMA

Skalarizacijom podataka iz matrice A pomoću izraza (14) i (15) dobija se matrica X (tabela 5). Za razliku od metode CRITIC, prilikom skalarizacije podatka u metodi FANMA u obzir se uzima tip kriterijuma.

Tabela 5  
Table 5

Matrica X  
Matrix X

	K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7
V1	0.202	0.195	0.444	0.611	0.533	0.165	0.938
V2	0.000	0.805	0.167	0.000	0.000	0.000	1.000
V3	0.505	0.000	0.167	0.611	0.533	0.335	0.313
V4	0.657	0.000	0.611	1.000	0.733	0.670	0.813
V5	1.000	0.598	0.444	1.000	0.733	1.000	0.000
V6	0.960	0.598	0.778	1.000	1.000	1.000	0.250
V7	0.202	1.000	1.000	0.056	1.000	0.837	0.625
V8	0.202	0.195	0.000	0.611	0.133	0.499	0.438

Lako se može uočiti da je po svim kriterijumima maksimalna kriterijumska vrednost varijanti jednaka jedinici.

Realizujući potrebne proračune zahtevane u izrazu (22), dobijaju se vrednosti težina kriterijuma  $w_j$ :

$$w_j=(0,120; 0,108; 0,123; 0,168; 0,169; 0,156; 0,156).$$

### Uporedni prikaz dobijenih vrednosti težina kriterijuma

U tabeli 6 dat je uporedni prikaz vrednosti težina kriterijuma određenih metodama entropije, CRITIC i FANMA.

Tabela 6  
Table 6

Uporedni prikaz vrednosti težina kriterijuma  
Comparative review of the value of criteria weights

Metoda		Kriterijumi						
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	K7
entropija	$w_j$	0,297	0,032	0,176	0,178	0,082	0,045	0,190
	rang	1	7	4	3	5	6	2
CRITIC	$w_j$	0,246	0,148	0,102	0,168	0,104	0,104	0,129
	rang	1	3	7	2	5	5	4
FANMA	$w_j$	0,120	0,108	0,123	0,168	0,169	0,156	0,156
	rang	6	7	5	2	1	3	3

Opšte poznata činjenica da različite metode daju različite vrednosti težina kriterijuma potvrđena je navedenim primerom. Detaljna analiza i utvrđivanje uzroka nastanka navedene činjenice nije predmet ovog rada. Međutim, može se uočiti da se kod razmatranih metoda primenjuju različiti načini skalarizacije i normalizacije početnih podataka. Ako bi se u metodi CRITIC primenio način skalarizacije dat u metodi FANMA, dobile bi se sledeće vrednosti težina kriterijuma:  $w_j=(0,126; 0,17; 0,096; 0,165; 0,1; 0,11; 0,234)$  koje se značajno razlikuju od vrednosti dobijenih originalnom metodom.

Može se opravdano pretpostaviti da način transformacije početne matrice odlučivanja utiče na vrednosti težina kriterijuma. U skladu sa navedenim, način transformacije početne matrice odlučivanja izabrane metoda određivanja težina kriterijuma mora biti u skladu sa načinom transformacije početnih podataka metode višekriterijumske analize.

Poređenjem vrednosti  $w_j$  u tabeli 6 uočava se da metoda entropije daje najveći raspon vrednosti težina kriterijuma ( $w_j^{max}-w_j^{min}=0,265$ ), zatim metoda CRITIC (0,144), a kod metode FANMA raspon je najmanji (0,061).

Najveća korelacija vrednosti težina kriterijuma je između metoda entropije i CRITIC ( $r=0,69$ ). Između vrednosti težina kriterijuma metoda CRITIC i FANMA postoji negativna korelacija ( $r=-0,35$ ), dok je najmanja korelacija između metoda entropije i FANMA ( $r=-0,11$ ).

## Zaključak

Određivanje težina kriterijuma jedan je od ključnih koraka u rešavanju problema višekriterijumske analize. Značaj težina kriterijuma ogleda se u činjenici da težine kriterijuma mogu uticati na konačno rešenje konkretnog višekriterijumskog problema.

Razvijeno je više metoda određivanja težina kriterijuma koje se, u najopštijem slučaju, mogu podeliti na subjektivne i objektivne. Za razliku od subjektivnih metoda, objektivne metode isključuju uticaj donosioca odluke na vrednost težina kriterijuma.

Opis najčešće korišćenih objektivnih metoda određivanja težina kriterijuma, datih u radu, može biti od velike pomoći prilikom rešavanja konkretnih višekriterijumskih metoda što jeste osnovna svrha rada.

Za primenu navedenih metoda, potrebno je formirati matricu odlučivanja, odnosno odrediti skup varijanti, skup kriterijuma po kojima se ocenjuju varijante i odrediti kriterijumske vrednosti varijanti.

Različite metode daju različite vrednosti težina kriterijuma. Način transformacije polaznih podataka utiče na vrednosti težina kriterijuma. Poređenje različitih metoda i detaljna analiza rezultata koji se dobijaju njihovom primenom može biti predmet daljih istraživanja ovog problema.

## Literatura

[1] Weber, M., Borcherding, K., *Behavioral influences on weight judgments in multiattribute decision making*. European Journal of Operational Research, 67, 1-12, 1993.

[2] Zeleny, M., *Multiple Criteria Decision Making*. McGraw-Hill, New York, 1982.

[3] Srđević, B., Medeiros Y.D.P., Faria, A.S., Schaer, M., *Objektivno vrednovanje kriterijuma performanse sistema akumulacija*. Vodoprivreda, 35, 163-176, Novi Sad, 2003.

[4] Diakoulaki, D., Mavrotas, G., Papayannakis L., *Determining objective weights in multiple criteria problems: the CRITIC method*. Computers and Operations Research, 22, 763-770, 1995.

[5] Srđević, B., *Nepriistrasna ocena značaja kriterijuma u višekriterijumskoj optimizaciji*. Vodoprivreda, 37, 53-58, 2005.

[6] Jian, M., Zhi-Ping, F., Li-Hua H., *A subjective and objective integrated approach to determine attribute weights*. European Journal of Operational Research, 112, 397-404, 1999.

[7] Graham, A., *Nonnegative matrices and applicable topics in linear algebra*. Ellis Horwood, Chichester, UK, 1987.



## AN OBJECTIVE APPROACH TO DETERMINING CRITERIA WEIGHTS

FIELD: Mathematics (Operations Research)

ARTICLE TYPE: Scientific Criticism

### Summary:

*This paper presents an objective approach to determining criteria weights that can be successfully used in multiple criteria models. The methods of entropy, CRITIC and FANMA are presented in this paper as well as a possible combination of the methods of objective and subjective approaches. Although based on different theoretical settings, and therefore with different algorithms of realization, all methods have a decision matrix as a starting point. An objective approach to determining the weight of criteria eliminates the negative impacts of a decision maker on criteria weights as well as on the final solution of multicriteria problems.*

*The main aim of this paper is to systematize description procedures as a kind of help when encountering a problem of determining the criteria weights for solving multicriteria tasks.*

*A possibility of the method application is shown in a numerical example.*

### Introduction

*The determination of criteria weights is one of the key problems arising in models of multicriteria analysis. Criteria weights may significantly affect the outcome of the decision making process.*

*Generally speaking, there are two types of weights: coefficients of importance and trade-off indicators. The main difference between the weights as coefficients of importance and weights as trade-off indicators is the way of determining the weights, or whether the compensation between criteria is considered.*

*The procedures for determining the weight criteria have been a subject of intensive research and scientific discussion for many years. In the literature it is possible to find more developed approaches to determining criteria weights.*

### Classification of the methods for determining criteria weights

*The division of the methods for determining criteria weights was carried out in accordance with the author's concepts and needs for the solution of particular practical problems.*

*The main divisions of the methods for determining criteria weights are to: statistical and algebraic, holistic and decomposed, direct and indirect, compensation and noncompensation ones.*

*The approaches to determining criteria weights can be divided into subjective and objective ones. Subjective approaches are based on determining criteria weights on the basis of information received by decision-makers or experts involved in the decision making process. Objective ap-*

*proaches are based on determining criteria weights on the basis of information contained in the decision matrix of some mathematical models.*

Methods of objective approach to determining criteria weights

*In the objective approach to determining criteria weights, criteria are viewed as sources of information and the relative importance of criteria reflects the amount of information contained in any of them.*

*The amount of information contained in each criterion is associated with the contrast intensity of each criterion. A standard deviation and entropy are possible measures of the intensity and the ways of the implementation of objective criteria weights.*

*In the rest of this part of the work, the algorithms of the methods of entropy, CRITIC and FANMA are described in detail.*

*A possible combination of subjective and objective approach is also shown. The described method is a combination of the weighted least squares method (subjective approach) and the FANMA method (objective approach) by forming a bicriteria model of mathematical programming.*

Example of determining the criteria weights by objective methods

*The methods of determining the criteria weights using the above methods are shown in an illustrative example. Data needed to solve a particular multicriteria problem are contained in the decision matrix. The criteria weights for seven criteria, five of which are the types of the maximum and two are the types of the minimum, have been determined by these methods.*

*Finally, the values of criteria weights are compared and a brief feedback of the results is given.*

Conclusion

*There are several developed methods for determining criteria weights which, in general, can be divided into subjective and objective ones. In contrast to subjective methods, objective methods exclude the impact of the decision maker on the value of criteria weights.*

*The description of the most commonly used objective methods for determining criteria weights, given in the paper, can be of great help in solving specific multicriteria methods, which is the main purpose of this paper.*

*For the application of these methods, it is necessary to form a decision matrix and determine a set of alternatives, i.e. a set of criteria by which to evaluate alternatives and determine the criteria values of alternatives.*

*Different methods give different values of criteria weights. A way of transforming initial data affects the value of criteria weights. The comparison of different methods and a detailed analysis of the results obtained by their application may be a subject of further research.*

Keywords: *criteria weights, entropy, CRITIC, FANMA.*

Datum prijema članka: 18. 04. 2011.

Datum dostavljanja ispravki rukopisa: 10. 05. 2011.

Datum konačnog prihvatanja članka za objavljivanje: 11. 05. 2011.