

DINAMIČKI ODZIV PLANETARNOG PRENOSNIKA NA SPREŽNU PARAMETARSKU POBUDU

Vojislav J. Batinić, Univerzitet odbrane u Beogradu,
Vojna akademija, Katedra vojnomašinskog inženjerstva

DOI: 10.5937/vojtehg61-2006

OBLAST: mašinstvo

VRSTA ČLANKA: originalni naučni članak

Sažetak:

Unutrašnje dinamičke sile i pomeranja po predviđenim stepenima slobode u planetarnim prenosnicima posledica su, prvenstveno, promenljivih elastičnih deformacija zubaca u sprezi, vibracija delova prenosnika i odstupanja geometrije ozubljenja usled habanja zubaca i grešaka izrade.

U radu se razmatra uticaj vremenski promenljive sprežne krutosti na moguća pomeranja i sile u kontaktima zubaca. Funkcije promene krutosti su korišćene kao nelinearni koeficijenti krutosti u sistemu jednačina za ekvivalentni zupčani prenosnik pri utvrđivanju prirode pomeranja i unutrašnjih dinamičkih sila. Rezultati numeričke analize sistema jednačina kojima je opisano dinamičko ponašanje su vremenski – promenljive funkcije pomeranja tačaka sistema i dinamičkih sila u spregama zubaca centralni zupčanik/satelit i satelit/venčanik.

Ključne reči: planetarni prenosnici, dinamičke sile, sprežna krutost, pomeranje, vibracije.

Uvod

Dinamička opterećenja u sklopovima mašinskih sistema posledica su međusobne interakcije delova. Usled promene elastičnih deformacija nastaju inercijalne sile i sile sudara delova. Odstupanja oblika i dimenzija usled grešaka pri izradi i habanja, ove sile značajno pojačavaju. Klizanje i kotrljanje delova, takođe, doprinose uvećavanju ukupnog opterećenja mašinskih delova i pobuđuju vibracije sistema. Inercija masa koje osciluju je dodatna dinamička sila. Tako je sila uzrok, a istovremeno i posledica vibriranja.

Dinamička opterećenja u setovima planetarnih prenosnika uslovljena su, osim gore navedenih uzroka, još i krutostima sprega zupčanika, neravnomernom raspodelom opterećenja na satelite, elastičnim deformacijama nosača satelita, vezivanjem sunčanog zupčanika i dr.

Opisivanje dinamičkog ponašanja sistema uključuje predviđanje, između ostalog, pomeranja po stepenima slobode i sila u kontaktima zubača. Nivo i karakter pomeranja i sila u zahvatima zubača u spojevima centralni sunčani zupčanik/satelit i satelit/venčanik razmatran je u radovima (August, Kasuba, 1986), (August, Evans, 1981), (Lin, Parker, 2002), (Kasuba, August, 1984), (Kahraman, 1994), (Ognjanović, 1985) na matematičkom modelu koji uključuje vremenske promene sprežnih krutosti modelirane kao pravougaoni oblici signala sa različitim stepenima sprežanja. Ovakve promene sprežnih krutosti su gruba aproksimacija stvarnih promena sprežne krutosti kojima se parametarski pobuđuje sistem.

Cilj rada je uspostavljanje takvog dinamičko–matematičkog modela planetarnog prenosnika koji može predvideti pomeranja tačaka sistema i dinamičke sile u kontaktima zubača zupčanika i pomoći projektantima u konstrukciji boljih prenosnika.

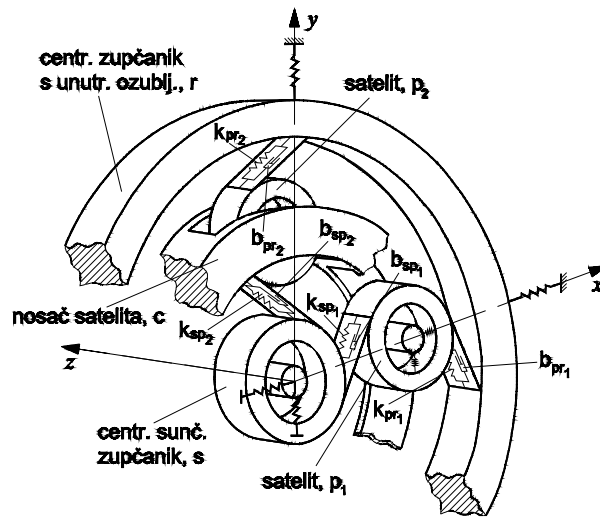
Promene sprežnih krutosti zavisne od promene broja pari zubača u kontaktu, od odstupanja oblika zubača i razradnog habanja ugrađene su u dinamički model planetarnog prenosnika prikazan u ovom radu.

Mehaničko-matematički model

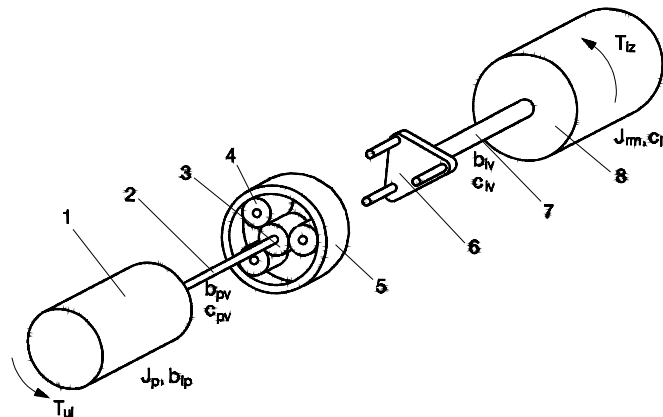
Za analizu dinamičkog ponašanja planetarnog prenosnika treba, prvo, definisati dinamički model prenosnika. Kod većine autora koji su se bavili ovim problemom dinamički model je dat kao na slici 1. Međutim, u ovom modelu se ne vidi veza prenosnika sa pogonskim i radnim delom koji imaju uticaj na dinamiku. Zato je za analizu dinamičkih opterećenja u planetarnom setu posmatran ukupan zupčani prenosni sistem (slika 2). Taj sistem obuhvata izvor snage (pogon), opterećenje od radne mašine, prenosnik, vratila i ostale izvore prigušenja.

Da se eliminiše uticaj brzine nosača satelita na dinamičke karakteristike spojeva kao i nepoznata prigušenja i krutosti nosača satelita kod postavljanja mehaničkog modela prenosnog sistema uzet je za razmatranje ekvivalentni zupčasti prenosnik (sl. 3). Ekvivalentni zupčani prenosnik je dobijen isključivanjem nosača satelita i dodavanjem brzina svim elementima realnog sistema (sl. 1), tako da na ekvivalentnom prenosniku sve komponente rotiraju oko njihovih vlastitih osa sopstvenim brzinama. Uticaj inercije nosača satelita na dinamička opterećenja izražen je pripisivanjem ekvivalentnog momenta inercije centralnom zupčaniku s unutrašnjim ozubljenjem (August, Kasuba, 1986) koji u ekvivalentnom sistemu postaje izlazni element, a određuje se izrazom

$$J_r = (J_c + 3J_{p_z}) + (m_c + 3m_{p_z})r_{br}^2. \quad (1)$$

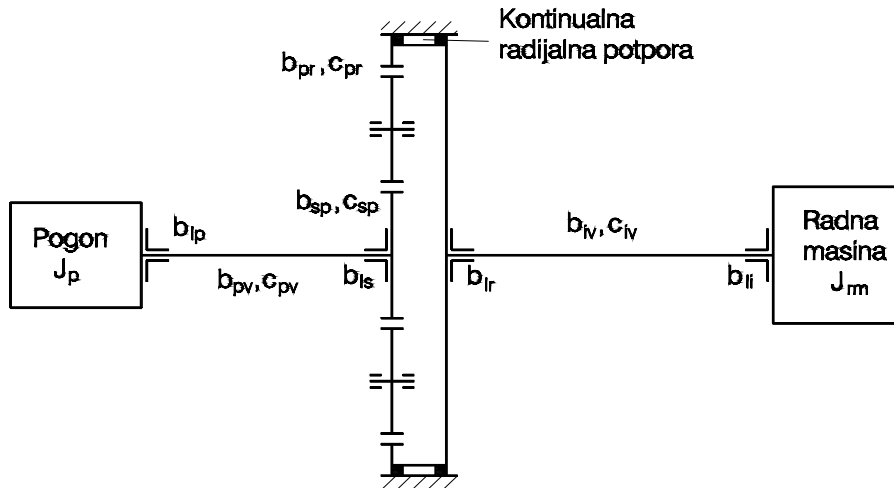


Slika 1 – Dinamički model planetarnog seta sa n-satelita
 Figure 1 – Dynamic model of a planetary gear set with n-planets

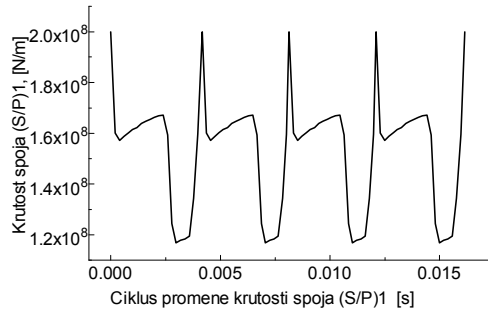


Slika 2 – Model planetarnog prenosa: 1 – pogon, 2 – pogonsko vratilo, 3 – sunčani zupčanik, 4 – satelit, 5 – venčanik, 6 – nosač satelita, 7 – izlazno vratilo, 8 – radna mašina
 Figure 2 – Planetary gear train model: 1 – driver, 2 – input shaft, 3 – sun gear, 4 – planet gear, 5 – ring gear, 6 – carrier, 7 – output shaft, 8 – working machine

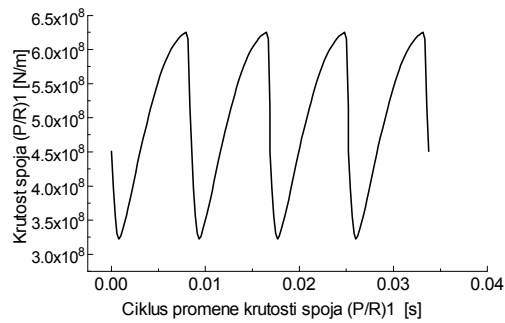
Jednačine kretanja sistema bazirane su na ekvivalentni prenosnik i uključuju opterećenje i promenljivu krutost u kontaktima zubaca zupčanika u sprezi tj. krutost sprege koja zavisi od položaja dodirne tačke profila zubaca. Krutosti sprege (sl. 4 i 5) direktno su povezane sa sedam jednačina kojima je opisan sistem. Nelinearne sprežne krutosti sprege c_{sp} i c_{pr} izračunate su na način opisan u radu (Batinić, 2001).



Slika 3 – Ekvivalentni zupčani prenosnik
 Figure 3 – Equivalent gear train



Slika 4 – Sprežna krutost u spoju S/P
 Figure 4 – Gear mesh stiffness, sun/planet mesh



Slika 5 – Sprežne krutost u spoju P/R
 Figure 5 – Gear mesh stiffness, planet/ring mesh

Ekvivalentno prigušenje u spojevima S/P i P/R zano je sa sopstvenim bliskim masama i krutostima pomoću bezdimenzionalnog koeficijenta prigušenja ξ_G i određuje se izrazima (August, Kasuba, 1986):

$$b_{s_i} = 2x_G \sqrt{\frac{c_{s_i}}{\frac{1}{m_s} + \frac{1}{m_{p_z}}}} \quad \text{i} \quad b_{r_i} = 2x_G \sqrt{\frac{c_{r_i}}{\frac{1}{m_r} + \frac{1}{m_{p_z}}}}. \quad (2)$$

Koeficijenti prigušenja su:

$\xi_G = 0.1$ – prigušenje u kontaktima zubaca,

$\xi_s = 0.05$ – za sunčani zupčanik i

$\xi_s = 0.005$ – zaostala prateća prigušenja.

Ovi koeficijenti su saglasni sa eksperimentalnim promatranjem prigušenja u različitim zupčastim sistemima (August, Evans, 1981).

Na slici 6 prikazana je sprega jednog satelita sa sunčanim zupčanikom spoljnog ozubljenja i venačnog zupčanika sa unutrašnjim ozubljenjem. Pomeranje u kontaktima zubaca sunčanog zupčanika i satelita može se odrediti na osnovu njihovih smerova obrtanja i mogućih pomeranja. Projektovano na dodirnicu, to pomeranje u funkciji promenljivih koordinata, prema parametrima datim na slici 6, je

$$p_{spi} = [y_s \sin \theta_i + x_s \cos \theta_i + u_s - u_{pi}], \quad (3)$$

pri čemu su:

$u_s = r_{bs} \psi_s$ – ugaono pomeranje sunčanog zupčanika,

$u_{pi} = r_{bpi} \psi_{pi}$ – ugaono pomeranje i -tog satelita.

Diferencijalne jednačine kretanja delova sistema:

Pogon

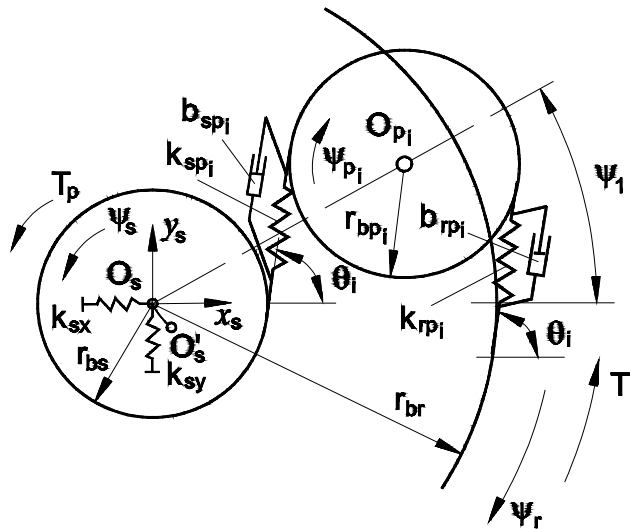
$$J_p \ddot{\psi}_p + b_{lp} \dot{\psi}_p + b_{pv} (\dot{\psi}_p - \dot{\psi}_s) + c_{pv} (\psi_p - \psi_s) = T_u. \quad (4)$$

Centralni sunčani zupčanik

$$J_s \ddot{\psi}_s + b_{ls} \dot{\psi}_s + b_{pv} (\dot{\psi}_s - \dot{\psi}_p) + c_{pv} (\psi_s - \psi_p) + \sum_{i=1}^3 (r_{bs} \cdot F_{ds_i}) = 0, \quad (5)$$

$$m_s \ddot{x}_s + b_f \dot{x}_s + c_f x_s + \sum_{i=1}^3 \left[F_{ds_i} \cdot \cos \left(\pi - \alpha_s - \frac{(i-1)2\pi}{3} \right) \right] = 0, \quad (6)$$

$$m_s \ddot{y}_s + b_f \dot{y}_s + c_f y_s + \sum_{i=1}^3 \left[F_{ds_i} \cdot \sin \left(\pi - \alpha_s - \frac{(i-1)2\pi}{3} \right) \right] = 0. \quad (7)$$



Sika 6 – Model translacionih i rotacionih stepeni slobode planetarnih prenosnika
 Figure 6 – Translational and rotational degrees of freedom model of planetary gears

Satelit i-ti

$$J_{p_z} \cdot \ddot{\psi}_{p_{zi}} + b_{p_{zi}} \cdot \dot{\psi}_{p_{zi}} + r_{bp_{zi}}' \cdot F_{ds_i} - r_{bp_{zi}}' \cdot F_{dr_i} = 0, \quad i = 1, n. \quad (8)$$

Centralni zupčanik sa unutrašnjim ozubljenjem – venčanik

$$J_r \cdot \ddot{\psi}_r + b_{lr} \cdot \dot{\psi}_r + b_{iv} (\dot{\psi}_r - \dot{\psi}_i) + c_{iv} (\psi_r - \psi_i) + \sum_{i=1}^3 (r_{br_i}' \cdot F_{dr_i}) = 0. \quad (9)$$

Radna mašina

$$J_{rm} \cdot \ddot{\psi}_i + b_{li} \cdot \dot{\psi}_i + b_{iv} (\dot{\psi}_i - \dot{\psi}_r) + c_{iv} (\psi_i - \psi_r) = -T_i, \quad (10)$$

pri čemu su:

- | | |
|---|---|
| J – moment inercije, | F_d – dinamička sila, |
| ψ – ugao pomeranja, | $\dot{\psi}$ – ugaone brzine, |
| T – moment uvijanja, | m – masa, |
| k – krutost zubaca u spoju, | r_b – polupr. baznog kruga, |
| $\ddot{\psi}$ – ugaona ubrzanja, | k_s – krutost oslonca sunčanog zupčanika, |
| r – polupr. podeonog kruga, | p_z – satelitski zupčanik, |
| k_v – krutost vratila, | ξ_G – koef. prigušenja u spoju, |
| s – sunčani zupčanik, | b – prigušenje, |
| ξ – kr. prig. ostalih delova, | r – venčanik, |
| b_s – prigušenje oslonca,
sunčanog zupčanika | x_s, y_s – pomeranje sunčanog zupčanika, |

l – ležaj, b_v – prigušenje vratila,
 p – pogonski agregat, u – ulaz,
 i – izlaz, rm – radna mašina,
 v – vratilo, n – broj satelita,
 S/P – spoj sunčani zupčanik/satelit i
 P/R – spoj satelit/venčanik.

Promenljive F_{ds_i} i F_{ds_i} u jednačinama (4–10) su trenutne sile u sprezi zubaca za i -ti spoj S/P i P/R , određene su slaganjem sila od promenljivih krutosti u spregama zubaca i sopstvenih srodnih dinamičkih pomeranja, a određene su jednačinama

$$F_{ds_i} = b_{s_i} \left[r_{bs} \cdot \dot{\psi}_s - r_{bp_{zi}} \cdot \dot{\psi}_{p_{zi}} + \dot{x}_s \cdot \cos \alpha_i + \dot{y}_s \cdot \sin \alpha_i \right] + \quad (11)$$

$$c_{s_i} \left[r_{bs} \cdot \psi_s - r_{bp_{zi}} \cdot \psi_{p_{zi}} + x_s \cdot \cos \alpha_i + y_s \cdot \sin \alpha_i \right],$$

$$F_{dr_i} = b_{r_i} \left[r_{br} \cdot \dot{\psi}_r - r_{bp_{zi}} \cdot \dot{\psi}_{p_{zi}} \right] + c_{r_i} \left[r_{br} \cdot \psi_r - r_{bp_{zi}} \cdot \psi_{p_{zi}} \right], \quad (12)$$

uzimajući pri tome da je $\alpha_i = \pi - \alpha_s - \frac{(i-1)2\pi}{3}$ – ugao koji zaklapaju sile sprege sa osom x , a α_s – ugao dodirnice. Jednačine 11 i 12 važe za radnu situaciju kada je $\left(r_{bg} \cdot \dot{\psi}_g \right)_i < \left(r_{bp} \cdot \dot{\psi}_p \right)_i$, pri čemu su: (') – trenutna vrednost, p – pogonski zupčanik, g – gonjeni zupčanik u bilo kom i -tom satelitskom spoju.

Numerička analiza

Numerička analiza ovog problema urađena je za konkretnu konstrukciju planetarnog prenosnika sa sledećim parametrima

$$T_u = 470 \text{ Nm}, z_s = 18, z_p = 43, z_r = 102 \text{ zupca}, m = 2.5, \alpha_s = 22.5^\circ,$$

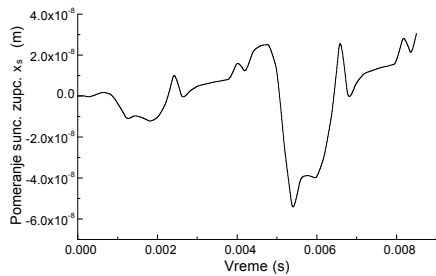
$$m_s = 2.6 \text{ kg}, m_c = 2.6 \text{ kg}, m_p = 2.85 \text{ kg}, m_r = 24.3 \text{ kg}, J_s = 0.001 \text{ kgm}^2,$$

$$J_{rm} = 2.2 \text{ kgm}^2, J_{p_1} = J_{p_2} = J_{p_3} = 0.0029 \text{ kgm}^2, J_r = 0.175 \text{ kgm}^2,$$

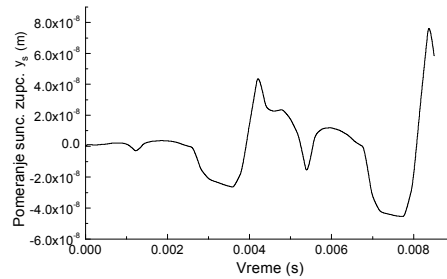
$$J_p = 0.56 \text{ kgm}^2, c_{pv} = 10^5 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}, c_{iv} = 10^5 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}}, c_f = 1.75 \cdot 10^{10} \text{ N/m},$$

$$\varepsilon_{\alpha_{(S/P)}} = 1.64, \varepsilon_{\alpha_{(P/R)}} = 2.$$

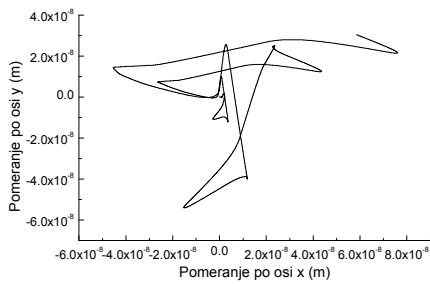
Parametri mehaničkog modela su ekvivalentni masama i krutostima realnog prenosnika. Vrednosti pomeranja i dinamičkih sila u spojevima date su na slikama 7 do 13.



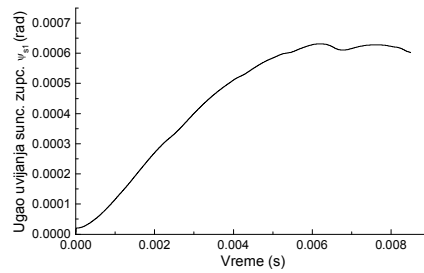
Slika 7 – Pomeranje sunčanog zupčanika – x_s
Figure 7 – Translation movement of the sun gear – x_s



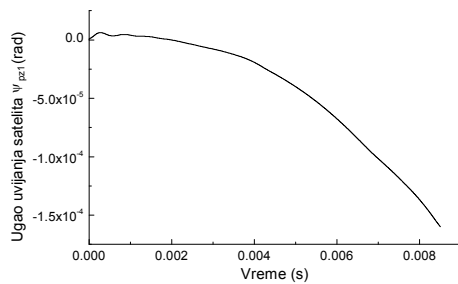
Slika 8 – Pomeranje sunčanog zupčanika – y_s
Figure 8 – Translation movement of the sun gear – y_s



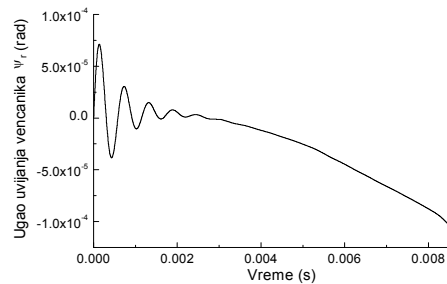
Slika 9 – Rezultujuće pomeranje centra sunčanog zupčanika
Figure 9 – Resulting sun gear center movement



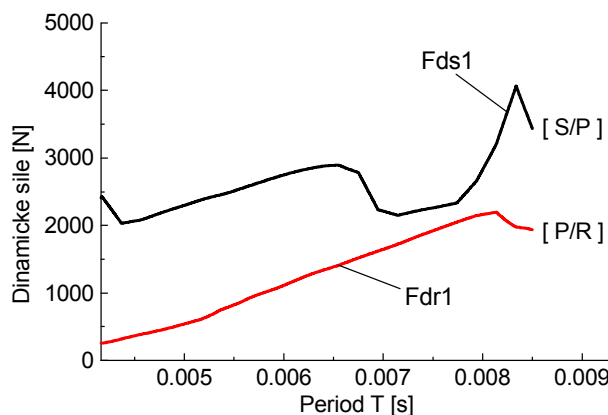
Slika 10 – Ugao uvijanja sunčanog zupčanika – ψ_s
Figure 10 – Angular displacement of the sun gear – ψ_s



Slika 11 – Ugao uvijanja prvog satelita – $\psi_{p_{z1}}$
Figure 11 – Angular displacement of the first planet – $\psi_{p_{z1}}$



Slika 12 – Ugao uvijanja venačnog zupčanika – ψ_r
Figure 12 – Angular displacement of the ring gear – ψ_r



Slika 13 – Promena dinamičke sile u spojevima S/P i P/R
 Figure 13 – Dynamic load distributions in the S/P and P/R interfaces

Zaključak

Razvijen je model za simulaciju dinamičkog ponašanja jednostepenog planetarnog prenosnika sa zupčanicima sa pravim zupcima. Periodične funkcije pobude upotrebene su kao vektori saglasno sprežnoj krutosti i parametrima statičkih grešaka prenosa koje su pretpostavljene kao poznate iz statičko-elastične analize.

Rezultati proračuna su vremenske funkcije promene pomeranja tačaka sistema po stepenima slobode i sila u spojevima S/P i P/R. Dobijeni rezultati u brojnom primeru daju osnovu da se zaključi:

- Sile u spojevima S/P i P/R planetarnog seta nisu konstantne već zavise od elastičnih deformacija zubaca u sprezi – krutosti sprege i imaju oscilatorni karakter,
- Sila u spoju sunčani zupčanik/satelit je većeg intenziteta u odnosu na silu u kontaktu satelit/venačni zupčanik što je i realno s obzirom na stepene sprežanja parova zupčanika,
- Pomeranja sunčanog zupčanika daju mogućnost predviđanja dinamičkih sila u ležaju.

Literatura

August, R., Kasuba, R., 1986, *Torsional Vibrations and Dynamic Loads in a Basic Planetary Gear System*, ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 108, pp. 348–353.

August, R., Evans, J. W., 1981, *An Extended Model for Determining Dynamic Loads in Spur Gearing*, ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 103, No. 2, pp. 398–409.

Batinić, V., 2001, *Unutrašnje dinamičke sile planetarnih prenosiča*, Naučnotehnički pregled, vol. LI, br. 3, pp.43–48, Beograd.

Lin, J., Parker, R. G., 2002, *Planetary gear parametric instability Caused by mesh stiffness variation*, Journal of Sound and Vibration 249(1), pp. 129–145.

Kasuba, R., August, R., 1984, *Gear Mesh Stiffness and Load Sharing in Planetary Gearing*, Fourth ASME International Power Transmission Conference, ASME PAPER 84–DET–229, 6 p., Cambridge, MA, Oct. 10–12.

Kahraman, A., 1994, *Planetary gear train dynamics*, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Mechanical Design, Vol. 116, pp. 713–720.

Ognjanović, M., 1985, *Uzajamne zavisnosti odstupanja mera, vibracije i šuma zupčastih prenosiča*, I deo, Mašinstvo, No. 34, pp. 1183–1190, Beograd.

PLANETARY GEAR DYNAMIC RESPONSE TO MESH PARAMETRIC EXCITATION

FIELD: Mechanical Engineering

ARTICLE TYPE: Original Scientific Paper

Summary:

Internal dynamic forces and displacements along the anticipated degrees of freedom in planetary gear trains are a consequence of coupled teeth elastic deformations, vibrations of train parts and changes in gear geometries due to tooth wear and cutting errors.

This paper considers the influence of time-varying mesh stiffness on possible displacements and forces in tooth contacts. The time-varying mesh stiffness functions were useful as nonlinear coefficients of gear mesh stiffness in a system of differential equations for an equivalent gear train model in the determination of the nature of displacements and internal dynamic forces. The results of the numerical analysis of differential equations describing dynamic behaviour are time-varying functions of displacements of system points and dynamic forces in tooth meshes of the sun-planet and ring-planet meshes.

Introduction

Describing the dynamic behavior of a system includes, among other things, predicting the movement provided by the degrees of freedom and forces in the contact of gear teeth. The level and the character of the displacements and the forces in the sun gear/planet and planet/ring meshes were discussed in papers (August, Kasuba, 1986), (August, Evans, 1981), (Lin, Parker, 2002), (Kasuba, August, 1984), (Kahraman, 1994), (Ognjanović, 1985) on a mechanical-mathematical model that includes time-varying mesh stiffness values modeled as rectangular waveforms with different contact ratios. Such changes of mesh stiffness values are a rough approximation of actual changes that parametrically excite the system.

Changes in mesh stiffness dependent on the changes in the number of pairs of teeth in contact, on the tolerances in shape and on tooth

wear are incorporated into the dynamic model of the planetary gear shown in this paper.

Mechanical-mathematical Model

To analyze the dynamic behavior of a planetary gear „a dynamic model of transmission should be defined first. Most authors who have dealt with this problem give the dynamic model as in Fig. 1. However, this model cannot show the connection with the drive gear and a working part having an impact on dynamics. Therefore, for the analysis of dynamic loads in the planetary gear, the complete transmission system (Fig. 2) was observed. This system includes a power source (plant), the load of machinery, gears, shafts and other damping sources. To eliminate the influence of the planet carrier on the dynamic characteristics of the meshes, an equivalent gear carrier was taken into consideration during the installation of a transmission system mechanical model. (Fig. 3).

The dynamics of the system is described by the differential equations from 4 to 10.

Numerical Analysis

The numerical analysis of this problem was done for a real planetary gear structure.

Conclusion

A model to simulate the dynamic behavior of single-stage planetary gears with straight-teeth gears is developed in this paper. Periodic excitation functions were used as vectors in accordance with the mesh stiffness and the parameters of static transmission errors assumed as known from the static-elastic analysis.

The calculation results are the functions of time changes of the system points displacements along the degrees of freedom and the forces in the S/P and P/R meshes.

The results obtained in the numerical example provide a basis for the following conclusions:

- Forces in the S/P and P/R planetary set meshes are not constant but dependent on the elastic deformation of teeth of mesh-mesh stiffness and have an oscillatory character,
- Force in the S/P mesh is more intense than the force in the P/R mesh, which is realistic given the contact ratio of meshing gears,
- Sun gear displacement gives the ability to predict the dynamic force in the bearing.

Key words: *planetary gear train, dynamic forces, mesh stiffness, displacement, vibrations.*

Datum prijema članka/Paper received on: 15. 05. 2012.

Datum dostavljanja ispravki rukopisa/ Manuscript corrections submitted on: 31. 05. 2012.

Datum konačnog prihvatanja članka za objavljivanje/ Paper accepted for publishing on: 02. 06. 2012.