Doi: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

Year: 2015 **Issue:** 01 **Volume:** 21

Published: 30.01.2015 http://www.T-Science.org

SECTION 1. Theoretical research in mathematics.

Madi Akhmetzhanuly Akhmetzhanov
candidate of physic and mathematic sciences
Taraz State Pedagogical Institute, Kazakhstan
madiktz@mail.ru

Gulzhan Kasinbayevna Duisebayeva
magistr of mathematics
Taraz State University named after M.H.Dulaty, Kazakhstan
gulzhankatz@mail.ru

Kagazkul Sadyrbekovna Toktanayeva
Senior Lecturer
Taraz State pedagogical institute, Kazakhstan

ABOUT SMOOTHNESS OF SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF HYPERBOLIC TYPE IN A BOUNDED DOMAIN

Abstract: *The article deals with the smoothness of solutions of differential equations of hyperbolic type defined in a bounded domain. Conditions are found for the unique solvability of semi-batch Dirichle problem for a class of hyperbolic equations.*

Key words: *smoothness, differential operator, hyperbolic equation.*
Language: *Russian*
Citation: Akhmetzhanov MA, Duisebayeva GK, Toktanayeva KS (2015) ABOUT SMOOTHNESS OF SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF HYPERBOLIC TYPE IN A BOUNDED DOMAIN. ISJ Theoretical & Applied Science 01 (21): 178-183. doi: http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.01.21.30

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Аннотация: *В статье рассматриваются вопросы гладкости решений дифференциальных уравнений гиперболического типа заданных в ограниченной области. Найдены условия однозначной разрешимости полупериодической задачи Дирихле для одного класса гиперболических уравнений.*

Ключевые слова: *гладкость, дифференциальный оператор, гиперболическое уравнение.*

Рассмотрим дифференциальный оператор гиперболического типа

$$Lu = u_{xx} - u_{yy} + a(y)u_x + c(y)u\,, \qquad (1)$$

первоначально опеределенный на $C_{0,\pi}^{\infty}(\Omega)$, где $\Omega = \{(x,y): -\pi < x < \pi, -1 < y < 1\}$.

$C_0^{\infty}(\Omega)$ - множество, состоящее из бесконечно дифференцируемых функций и удовлетворяющих условиям:

$$u(-\pi,y) = u(\pi,y),\ u_x(-\pi,y) = u_x(\pi,y)$$

и финитных по переменной y.

Отметим, что оператор L допускает замыкание и его также обозначим через L.

Формулировка основных результатов

Теорема 1. Пусть выполнено условие:

i) $|a(y)| \ge \delta_0 > 0, c(y) \ge \delta > 0$ – непрерывные функции на отрезке $[-1,1]$:

Тогда:

a) оператор $(L + \lambda E)$ при $\lambda > 0$ непрерывно обратим;

b) операторы $r(y)D_x(L+\lambda E)^{-1},\ r(y)D_y(L+\lambda E)^{-1}$ ограничены $L_2(\Omega)$, здесь $D_x = \frac{\partial}{\partial x}, D_y = \frac{\partial}{\partial y}$; $r(y)$ – непрерывная функция на отрезке $[-1,1]$.

Вспомогательные леммы и неравенства.

Рассмотрим оператор

$$(l_n + \lambda E)u = -u'' + \left(-n^2 + ina(y) + c(y) + \lambda\right)u, \quad (2)$$

$(n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$

первоначально опеределенный на $C_0^{\infty}(-1,1)$

.

Лемма 1. Пусть вынолнено условие i). Тогда при $\lambda > 0$ существует непрерывный обратный $(l_n + \lambda E)^{-1}$ опеределенный в $L_2(-1,1)$ где $(l_n + \lambda E)^{-1}$ – обратный оператор к замкнутому оператору $l_n + \lambda E$. [5. c.768-771]

Доказательство. Для любого $u(y) \in C_0^2(-1,1)$ имеем:

$$< (l_n + \lambda E)u, u >= \int_{-1}^{1} \left[-u'' + \left(-n^2 + ina(y) + c(y) + \lambda \right) u \right] \bar{u} dy .$$

Интегрируя правую сторону по частям, получим:

$$< (l_n + \lambda E)u, u >= \int_{-1}^{1} \left[|u'|^2 + \left(-n^2 + ina(y) + c(y) + \lambda \right) |u|^2 \right] dy ,$$

$$\left| < (l_n + \lambda E)u, u > \right| = \left| \int_{-1}^{1} \left(|u'|^2 + \left(-n^2 + c(y) + \lambda \right) |u|^2 \right) dy + \int_{-1}^{1} ina(y) |u|^2 dy \right| .$$

Отсюда учитывая условие $i)$ находим:

$$\left| < (l_n + \lambda E)u, u > \right| \geq \left| \int_{-1}^{1} ina(y) |u|^2 dy \right| \geq |n| \delta_0 \|u\|^2 .$$

Теперь, пользуясь неравенством Коши-Буняковского получаем, что

$$\|(l_n + \lambda E)u\|_2 \geq c\|u\|_2, \quad (c > 0). \qquad (3)$$

Далее, если показать что множество $(l_n + \lambda E)D(l_n)$ плотно в L_2, то будет следовать, что оператор $(l_n + \lambda E)$ имеет непрерывный обратный оператор $(l_n + \lambda E)^{-1}$. Мы докажем это от противного.

Допустим, что множество $(l_n + \lambda E)D(l_n)$ не является плотным в $L_2(-1,1)$. Тогда существует элемент $v \in L_2(v \neq 0)$ такой, что $< (l_n + \lambda E)u, v >= 0$ для всех $u \in D(l_n)$. Это показывает

$$(l_n^* + \lambda E)v = -v'' + \left(-n^2 - ina(y) + c(y) + \lambda \right) v = 0$$

в смысле теории определения.

Поскольку функции $a(y), c(y)$, ограниченные, непрерывные функции на отрезке $[-1,1]$. Тогда функции $\left(-n^2 - ina(y) + c(y) + \lambda \right) v \in L_2(-1,1)$ и следовательно $v'' \in L_2(-1,1)$.

Покажем, что элемент v, для которого $(l_n^* + \lambda E)v = 0$ принадлежит $v \in D(l_n)$, то есть

$$v(-1) = v(1) = 0 .$$

В этом можем убедиться, интегрируя по частям:

$$0 =< u, \left(l_n^* + \lambda E \right) v >= \int_{-1}^{1} u \left[-\bar{v}'' + \left(-n^2 - ina(y) + c(y) + \lambda \right) \bar{v} \right] dy =$$

$$= -\int_{-1}^{1} u\bar{v}'' dy + \int_{-1}^{1} \left(-n + -ina(y) + c(y) + \lambda \right) u\bar{v} dy =$$

$$= -\int_{-1}^{1} u d\bar{v}' + \int_{-1}^{1} \left(-n^2 + ina(y) + c(y) + \lambda \right) u\bar{v} dy =$$

$$= -u\bar{v}' \Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \bar{v}' du + \int_{-1}^{1} \left(-n^2 + ina(y) + c(y) + \lambda \right) u\bar{v} dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \bar{v}' du + \int_{-1}^{1} \left(-n^2 + ina(y) + c(y) + \lambda \right) u\bar{v} dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} u'\bar{v}' dy + \int_{-1}^{1} \left(-n^2 + ina(y) + c(y) + \lambda \right) u\bar{v} dy.$$

Здесь, мы воспользовались тем, что $u \in D(l_n)$.

Далее

$$0 =< u, (l_n^* + \lambda E)v >= -\int_{-1}^{1} u' d\bar{v} + \int_{-1}^{1} \left(-n^2 + ina(y) + c(y) + \lambda\right) u\bar{v}dy =$$

$$= -u'\bar{v}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} u''\bar{v}dy + \int_{-1}^{1} \left(-n^2 + ina(y) + c(y) + \lambda\right) u\bar{v}dy =$$

$$= -u'\bar{v}\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \left[-u'' + (-n^2 + ina(y) + c(y) + \lambda)u\right]\bar{v}dy =$$

$$= u'\bar{v}\Big|_{-1}^{1} + <(l_n + \lambda E)u, v > .$$

По предложению $<(l_n + \lambda E)u, v >= 0$, следовательно $u'\bar{v}\Big|_{-1}^{1} = 0$. Отсюда в силу произвольности функции u следует, что

$$\bar{v}(-1) = \bar{v}(1) = 0.$$

Таким образом окончательно имеем, что

$$v'' \in L_2(-1,1), \quad v(-1) = v(1) = 0 .$$

Для завершения остается доказать, что справедливо неравенство

$$\left\|(l_n^* + \lambda E)v\right\|_2 \ge |n|\delta\|v\|_2, \quad n = \pm1, \pm2, \pm3, ... \quad (4)$$

Для этого скалярное произведение $\left|< (l_n^* + \lambda E)v, v >\right|$ интегрируем по частям и учитываем, что вне интегральные члены исчезают в силу только что написанных краевых условий, и получим:

$$\left|< (l_n^* + \lambda E)v, v >\right| = \left|\int_{-1}^{1}\left[-v'' + \left(-n^2 - ina(y) + c(y) + \lambda\right)v\right]\bar{v}dy\right| =$$

$$\left|\int_{-1}^{1}\left[|v'|^2 + \left(-n^2 - ina(y) + c(y) + \lambda\right)|v|^2\right]dy\right| \ge \left|\int_{-1}^{1} -ina(y)|v|^2 dy\right|.$$

Теперь, пользуясь неравенством Коши-Буняковского и учитывая условие i), получим неравенство:

$$\left\|(l_n^* + \lambda E)v\right\|_2 \ge |n|\delta\|v\|_2.$$

Из неравенства (4), в силу

$$(l_n^* + \lambda E)v = 0,$$

следует что $v = 0$.

Лемма 1 полностью доказана.

Лемма 2. Пусть выполнено условие $i)$. Тогда оператор $L + \lambda E$ при $\lambda \ge 0$ непрерывно обратим и для него справедливо равенство:

$$(L + \lambda E)^{-1} f = \sum_{n=-\infty}^{(\infty)} (l_n + \lambda E)^{-1} f_n e^{inx} \quad (5)$$

в смысле $L_2(\Omega)$.

Доказательство. Из леммы 1 получаем, что

$$u_k = \sum_{n=-k}^{(k)} (l_n + \lambda E)^{-1} f_n(y) e^{inx} \quad (6)$$

является решением уравнения

$$(l_n + \lambda E)u_k = f_k \in L_2(\Omega), \quad (7)$$

где, $f_k \xrightarrow{L_2} f$, $f_k = \sum_{n=-k}^{k} f_n(y)e^{inx}$,

$$(l_n + \lambda E)u = -u'' + \left(-n^2 + ina(y) + c(y) + \lambda\right)u$$

в силу (3) имеем:

$$\|u_k\| \le c\|f_k\|, \quad (8)$$

c - постоянное число, независящая от k.

Так как $f_k \xrightarrow{L_2} f$, то из (8) находим, что $\|u_k - u_m\|_2 \le c\|f_k - f_m\|_2 \to 0$ при $k, m \to \infty$.

Отсюда, в силу полноты пространства L_2 следует, что существует единственная функция $u \in L_2(\Omega)$ такая что

$$u_k \to u \text{ при } k \to \infty. \quad (9)$$

Из (7), (9) следует, что

$\|u_k - u\|_2 \to 0,\ \|f_k - f\|_2 \to 0$ при $k \to \infty$.

Последние неравенства дают, что $u \in L_2(\Omega)$ является решением уравнения $(L+\lambda E)u = f$, а из (6) имеем, что

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (l_n + \lambda E)^{-1} f_n(y) e^{inx}.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 3. Пусть оператор $(l_n + \lambda E)$ опеределен равенством (2) на множестве $C_0^\infty(-1;1)$ и пусть выполнено условие $i)$. Тогда справедлива оценка

$$\left\|(l_n+\lambda E)^{-1}\right\|_{2\to 2} \le \frac{c}{\lambda^{1/2}},$$

где $c > 0$ - постоянная, независящая от n.

Доказательство. Составим скалярное произведение $<(l_n+\lambda E)u, u>$

$$<(l_n+\lambda E)u,u> = \int_{-1}^{1}\left[-u'' + \left(-n^2 + ina(y) + c(y) + \lambda\right)u\right]\bar{u}dy.$$

Интегрируя по частям:

$$<(l_n+\lambda E)u,u> = \int_{-1}^{1}\left[|u'|^2 + \left(-n^2 + ina(y) + c(y) + \lambda\right)|u|^2\right]dy, \qquad (10)$$

$$<(l_n+\lambda E)u,u> = \left|\int_{-1}^{1}|u'|^2 + \left(-n^2 + c(y) + \lambda\right)|u|^2 dy + \int_{-1}^{1} ina(y)|u|^2 dy\right|$$

$$<(l_n+\lambda E)u,u> \ge \left|\int_{-1}^{1} ina(y)|u|^2 dy\right|.$$

Отсюда и учитывая условие $i)$ находим:

$$|<(l_n+\lambda E)u,u>| \ge |n|\delta_0\|u\|^2.$$

Теперь пользуясь неравенством Коши-Буняковского, получаем:

$$\|(l_n+\lambda E)u\|_2 \ge |n|\delta_0\|u\|_2. \qquad (11)$$

Из (10) и неравенства Коши при $\varepsilon = 1$ вытекает, что

$$\frac{1}{2}\|(l_n+\lambda E)u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u\|_2^2 \ge \int_{-1}^{1}\left[|u'|^2 + (c|y| + \lambda)|u|^2\right]dy - \int_{-1}^{1} n^2|u|^2 dy$$

или

$$\frac{1}{2}\|(l_n+\lambda E)u\|_2^2 \ge \int_{-1}^{1}\left[|u'|^2 + \left(c|y| + \lambda - \frac{1}{2}\right)|u|^2\right]dy - \int_{-1}^{1} n^2|u|^2 dy.$$

Пользуясь условием $i)$ и тем, что $\lambda > 0$ получаем:

$$\frac{1}{2}\|(l_n+\lambda E)u\|_2^2 \ge \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[|u'|^2 + (c|y| + \lambda)|u|^2\right]dy - \int_{-1}^{1} n^2|u|^2 dy \qquad (12)$$

Объединяя неравенства (11) и (12), окончательно имеем:

$$c^2\|(l_n+\lambda E)u\|_2^2 \ge \lambda\|u\|_2^2.$$

Из последнего неравенства следует утверждение леммы 3.

Лемма 4. Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда справедливо оценка

$$\left\|(l_n+\lambda E)^{-1}\right\|_{2\to 2} \le \frac{1}{|n|\delta_0},\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (13)$$

Доказательство леммы 4 следует из неравенства (11).

Лемма 5. Пусть выполнены условия $i)$. Тогда справедлива оценка

$$\left\|\frac{d}{dy}(l_n+\lambda E)^{-1}\right\|_{2\to 2} \le c,$$

где $c > 0$ - постоянное число.

Доказательство. Благодаря условию $i)$ и неравенствам (11) и (12) получаем, что

$$c\left\|\left(l_n + \lambda E\right)u\right\|_2^2 \geq \left\|u'\right\|_2^2 + \left\|u\right\|_2^2,$$

где $c > 0$ - не зависят от u, n.

Отсюда

$$\left\|\frac{d}{dy}\left(l_n + \lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2} = \sup_{f\in L_2(-1,1)} \frac{\left\|\frac{d}{dy}\left(l_n + \lambda E\right)^{-1} f\right\|_2}{\left\|f\right\|_2} =$$

$$= \sup_{u\in D(l_n+\lambda E)} \frac{\left\|u'\right\|_2}{\left\|\left(l_n + \lambda E\right)u\right\|_2} \leq c < \infty.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.

Доказательства пункта а) теоремы 1 сразу вытекает из леммы 2.

Докажем пункт б) теоремы 1.

В силу пункта а) и леммы 4 имеем

$$\left\|r(\mathrm{y})D_x\left(L + \lambda E\right)^{-1}\right\|_2^2 = \left\|r(y)\sum_{-\infty}^{\infty} in\left(l_n + \lambda E\right)^{-1} f_n e^{inx}\right\|_2^2 =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\|r(y)in\left(l_n + \lambda E\right)^{-1} f_n\right\|_2^2 \leq$$

$$\leq \max_{y\in[-1,1]}\left|r(y)\right|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2\left\|\left(l_n + \lambda E\right)^{-1}\right\|_2^2 \left\|f_n\right\|_2^2 \leq$$

$$\leq c_0 \sup_{\{n\}}\left|n\right|^2\left\|\left(l_n + \lambda E\right)^{-1}\right\|_2^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\|f_n\right\|_2^2 \leq \frac{c_0}{\delta_0}\left\|f\right\|_2^2.$$

Отсюда

$$\left\|r(\mathrm{y})D_x\left(L + \lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2} \leq \frac{c_0}{\delta_0} < \infty .$$

Далее вычислим норму:

$$\left\|r(\mathrm{y})D_y\left(L + \lambda E\right)^{-1}\right\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\|r(y)\frac{d}{dy}\left(l_n + \lambda E\right)^{-1} f_n\right\|_2^2 \leq$$

$$\leq \max_{y\in[-1,1]}\left|r(y)\right|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\|\frac{d}{dy}\left(l_n + \lambda E\right)^{-1} f_n\right\|_2^2 \leq$$

$$\leq c_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\|\frac{d}{dy}\left(l_n + \lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2}^2 \left\|f_n\right\|_2^2.$$

Отсюда в силу леммы 5 получаем, что

$$\left\|r(\mathrm{y})D_y\left(L + \lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2} \leq c < \infty .$$

Пункт б) теоремы 1 доказан.

References:

1. Titchmarsh EC (1961) Razlozhenie po sobstvennym funktsiyam, svyazannye s differentsial'nymi uravneniyami vtorogo poryadka. Moscow: IL, -1961.-T.1, 2. -278.

2. Hormander L (1968) The spectral function of an elliptic operator. Acta Math. -1968. 121, №3-4, -pp.193-218.
3. Birman MS (1961) O spektre singulyarnykh granichnykh zadach. Mat. sb.-1961. -T.55, №2. -pp.125-174.
4. Kostyuchenko AG (1967) O nekotorykh spektral'nykh svoystvakh differentsial'nykh operatorov. Mat. zametki. -1967. -T.1, №3. -pp.365-378.
5. Otelbaev M, Levitan BM (1977) Ob usloviyakh samosopryazhennosti operatorov Shredingera i Diraka. Dokl. AN SSSR. -1977.-T.235, -pp.768-771.
6. Otelbaev M (1977) Dvustoronnie otsenki poperechnikov i ikh primeneniya. Dokl. AN SSSR. -1977. -T.234, №6. –pp.1265.
7. Gasymov M (1969) O raspredelenii sobstvennykh znacheniy samosopryazhennogo obyknovennogo differentsial'nogo operatora. Dokl. AN SSSR. -1969. -T.186, №4. -pp.753-756.
8. Kostyuchenko AG (1966) O nekotorykh spektral'nykh svoystvakh differentsial'nykh operatorov: Dis. ... dokt. fiz.-mat. nauk. Moscow: MGU. -1966.
9. Levitan BM, Sargsyan IS (1970) Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu. Moscow: Nauka, -1970. –pp.672.
10. Sargsyan IS (1958) Ob odnoy asimptoticheskoy formule raspredeleniya sobstvennykh znacheniy operatora Shredingera v dvumernom prostranstve. Dokl. AN ArmSSR. -1958. -T.27, №3. -pp.129-137.