ISSN № 9125 0912. ВIСНИК ДНУ. Серiя "Моделювання". № 8. 2013. Вип. 5. С. 143–154

УДК 519.6

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ЛОРЕНЦА

П. И. Ткаченко

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, кафедра дифференциальных уравнений, ул. Казакова 18/14, ДНУ, 49010, Днепропетровск. E-mail: cool.phenom@mail.ru

Основная цель работы состоит в доказательстве ряда теорем, обосновывающих возможность привлечения альтернативных методов определения измеримых перестановок для корректного определения пространств Лоренца.

Ключевые слова: функциональные пространства, пространство Лоренца, измеримые перестановки.

1. Вступление

Основная цель данной работы состоит в изучении качественных свойств весовых функциональных пространств Лоренца Λ_ω^q, которые традиционно определяются как:

$$f \in \Lambda_w^q \Leftrightarrow \left(\int_0^{\mu(\Omega)} w\left(t\right) \left|f^*\left(t\right)\right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} < \infty;$$
$$w\left(x\right) \in L_1\left(\left(0; \mu\left(\Omega\right)\right)\right),\ w\left(x\right) > 0 \text{ почти всюду в } L_1\left(\left(0; \mu\left(\Omega\right)\right)\right),$$

где μ — мера Лебега,

$$f^* : [0; \mu\left(\Omega\right)] \to \mathbb{R}, \tag{1.1}$$
$$f^*\left(s\right) = \inf\left(\left\{t \in \mathbb{R} : \mu\left(\left\{\gamma \in \mathbb{R} : f\left(\gamma\right) > t\right\}\right) \leq s\right\}\right). \tag{1.2}$$

Здесь функция f^* называется перестановкой (decreasing rearrangement) измеримой функции f. Традиционно (1.1)–(1.2) является общепринятым способом ее задания. Однако, как будет показано далее, перестановку можно определить в другой альтернативной форме. А именно,

$$\tilde{f}^*\left(s\right) = \tilde{d}_f^{-1}\left(s\right),$$

где определение функции $\tilde{d}_f^{-1}$ будет дано ниже. Поэтому одним из основных вопросов, обсуждаемых в данной статье, есть проведение сравнительного анализа при использовании двух методов определения измеримой перестановки для конструирования соответствующих весовых пространств Лоренца.

2. Альтернативный подход к построению перестановок

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}$ — открытое связное подмножество и пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}$ — измеримая функция. Введем в рассмотрение следующую функцию:

$$d_f(x) = \mu\left(\{t \in \Omega : f(t) > x\}\right).$$

Определение 2.1. Альтернативной перестановкой функции f будем называть отображение $\tilde{f}^* : [0; \mu(\Omega)] \to \mathbb{R}$, заданное правилом

$$\tilde{f}^*(s) = \tilde{d}_f^{-1}(s), \tag{2.1}$$

где

$$\tilde{d}_f^{-1}(s) = \begin{cases} d_f^{-1}(s), & \text{если в точке } s \text{ существует обратная} \\ & \text{функция к } \ d_f(x)\,; \\ \inf\left\{t \in \mathbb{R} :\ d_f^{-1}(s) = t\right\}, & \text{если в точке } s \text{ функция } d_f^{-1}(s) \\ & \text{многозначна;} \\ \mathrm{C}, & \text{где } C \text{ есть значением, которое} \\ & \text{принимает } f \text{ на участке своего} \\ & \text{постоянства, а } s \text{ есть точкой} \\ & \text{разрыва функции } d_f^{-1}(s). \end{cases}$$

Как следует из определения перестановки $\tilde{f}^*$, для строго возрастающей f имеем:

$$\tilde{f}^*(t) = d_f{}^{-1}(t) = \left(\sup\Omega - f^{-1}\right)^{-1}(t).$$

В то же время, общепринятый способ построения перестановки (см. (1.1)–(1.2)) можно представить в виде [2, 3]:

$$f^*(t) = d_{d_f}(t),$$

где

$$f^*(t) = d_{d_f}(t) = d_{\sup\Omega - f^{-1}}(t) = \left(\sup\Omega - f^{-1}\right)^{-1} - \inf \mathrm{Dom}\left(\sup\Omega - f^{-1}\right).$$

Ясно, что если f — ограничена, то ее перестановка $\tilde{f}^*$ — ограничена и принимает значения $\tilde{f}^*(0) = \sup\limits_{x\in\Omega} f(x)$, $\tilde{f}^*(\mu(\Omega)) = \inf\limits_{x\in\Omega} f(x)$. В дальнейших рассуждениях будем понимать $d_f^{-1}(s) = \tilde{d}_f^{-1}(s)$, если иначе не оговорено.

Утверждение 2.1. Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}$ — строго монотонна и непрерывна на Ω. Тогда $\tilde{f}^* : [0; \mu(\Omega)] \to \mathbb{R}$ — убывающая и непрерывная функция.

Доказательство. Как следует из определения функции $d_f(x)$, имеем:

$$d_f(x) : \left[\inf_{x\in\Omega} f(x) ; \sup_{x\in\Omega} f(x)\right] \to [0; \mu(\Omega)] .$$

Свойство её монотонности очевидно, поскольку

$$c_1 > c_2 \Rightarrow \{x \in \Omega : f(x) > c_1\} \subsetneq \{x \in \Omega : f(x) > c_1\}.$$

Далее заметим, что

$$|d_f(x+h) - d_f(x)| = \mu(\{t \in \Omega : f(t) \in (f(x) ; f(x+h))\})$$

и покажем, что функция $d_f(x)$ непрерывна. Действительно, так как Ω — связное множество, то для всех $c \in \operatorname{Im}\Omega$, в случае монотонно убывающей функции f на $(-\infty; b)$, имеем: $d_f(c) = f^{-1}(c) - \inf\Omega$. Если f возрастает на $(a; +\infty)$, то для всех $c \in \operatorname{Im}\Omega$ выполняется $d_f(c) = \sup\Omega - f^{-1}(c)$. Следовательно, $\mu(\{t \in \Omega : f(t) \in (f(x) ; f(x+h))\}) = f^{-1}(x+h) - f^{-1}(x)$.

Поскольку функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ непрерывна на Ω, то обратная к ней тоже непрерывна. Поэтому

$$\lim_{h\to 0, x+h\in\Omega} |d_f(x+h) - d_f(x)| = \lim_{h\to 0, x+h\in\Omega} \left|f^{-1}(x+h) - f^{-1}(x)\right| = 0.$$

Откуда находим, $d_f(x)$ — непрерывная функция.

По построению $d_f(x)$ строго убывающая функция. Из этого следует существование обратной к ней функции

$$d_f^{-1}(y) : \left[\inf_{x\in\Omega} f(x) ; \sup_{x\in\Omega} f(x)\right] \to [0; \mu(\Omega)] .$$

Поэтому

$$\tilde{f}^*_{x\in\Omega}(b-x) = d_f^{-1}(b-x) .$$

Тем самым искомые свойства перестановки $\tilde{f}^*$ становятся очевидными. В случае, когда $d_f(c) = f^{-1}(c) - \inf\Omega$, доказательство аналогичное. Таким образом, $\tilde{f}^* : [0; \mu(\Omega)] \to \mathbb{R}$, как обратная к убывающей, есть убывающей и непрерывной функцией. □

Следствие 2.1. *Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}$ — строго монотонная на Ω функция. Тогда $\tilde{f}^* : [0; \mu(\Omega)] \to \mathbb{R}$ — дифференцируема почти всюду на области определения.*

Ясно, что если f — строго монотонна на Ω, то она дифференцируема почти всюду, и такие же свойства имеет функция d_f.

Утверждение 2.2. Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, которая не имеет интервалов постоянства. Тогда $d_f(c)$ — непрерывная строго убывающая функция.

Доказательство. Представим область значений в виде $\operatorname{Im}\Omega = \bigcup_{i=1}^{n}[c_i; c_{i+1}]$, где c_i — локальные экстремумы функции f. Так как их может быть не больше счётного числа, то будем строить функцию d_f на каждом из отрезков $[c_i; c_{i+1}]$ в отдельности.

Упорядочив локальные экстремумы : $b_1 < b_2 < ... < b_n < ...$, где b_1 — глобальный минимум (который может равняться $-\infty$), рассмотрим функцию f на произвольном отрезке $[b_k; b_{k+1}]\, k = \overline{1, n-1}$. В силу сделанных допущений, экстремумы на отрезке $[b_k; b_{k+1}]$ отсутствуют. Это значит, что полный прообраз отрезка $[b_k; b_{k+1}]$ отображается в объединение счётного числа отрезков в области определения, которые не пересекаются. Для построения функции d_f можно разбить график $f(x)$ на кривые, которые отвечают за отрезки монотонности в области значений. Для каждого из отрезков монотонности применимо утверждение 2.1, то есть сужение функции d_f на этот отрезок является непрерывной функцией. Из аддитивности меры Лебега следует, что $\mu(c) = \sum_i^s \mu(\{x \in A_i : f(x) > c\})$, где s — количество непересекающихся отрезков из полного прообраза $[b_k; b_{k+1}]$, а A_i — часть графика $f(x)$, которая соответствует отрезку с номером i. Таким образом, функция d_f во внутренних точках $[b_k; b_{k+1}]$ — непрерывна, а её монотонность следует из монотонности меры Лебега. Поскольку

$$d_f(c)_{[b_1;b_{k+1}]} = d_f(c)_{[b_k;b_{k+1}]} + d_f(c)_{[b_1;b_k]}, \text{где } d_f(c) = C \quad \forall c \in [b_k; b_{k+1}],$$

то для определения функции d_f имеем рекуррентное правило. Таким образом, во внутренних точках отрезков $[b_k; b_{k+1}]$ свойство непрерывности доказано. В точках экстремума рассмотрим левые и правые границы d_f. Исходя из предыдущего равенства, они совпадают, так как левая граница функции для верхнего края предыдущего промежутка равна правой границе функции для нижнего края последующего промежутка. Тем самым утверждение доказано. □

Рассмотрим функцию $f : \Omega \to \mathbb{R}$, которая не имеет промежутков постоянства на ограниченном множестве Ω. Естественным является вопрос о том, всегда ли одной функции $\tilde{f}^*$ соответствует одна функция f, то есть является ли инъективным отображение $f \to \tilde{f}^*$? С этой целью рассмотрим следующий пример:

$$f(x) = \begin{cases} x; x \in (0;1] \\ 2 - x, x \in (1;2) \end{cases}, g(x) = 1 - \tfrac{x}{2}; x \in (0;2).$$

Как видно из рис. 1, разным функциям f, g соответствуют одинаковые перестановки $\tilde{f}^*$ и $\tilde{g}^*$. Таким образом, $f \to \tilde{f}^*$ — не инъективное отображение. В завершение этого раздела рассмотрим иллюстративные примеры.

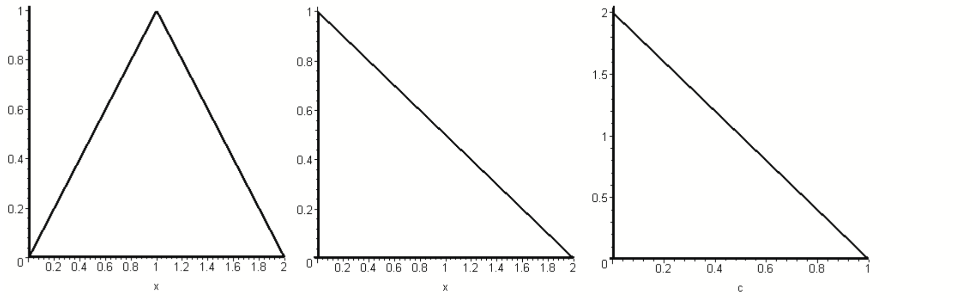

Рис. 1: Графики $f\,(x)$ и $g\,(x)$, d_f

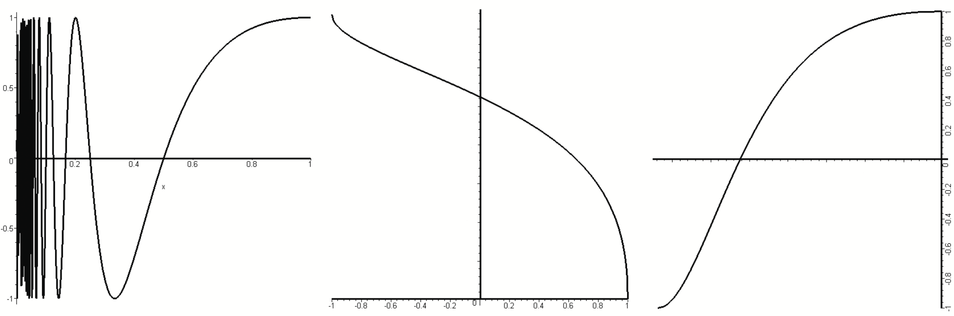

Рис. 2: $f\,(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right)$, её $d_f\,(c)$ и $\tilde{f}^*$

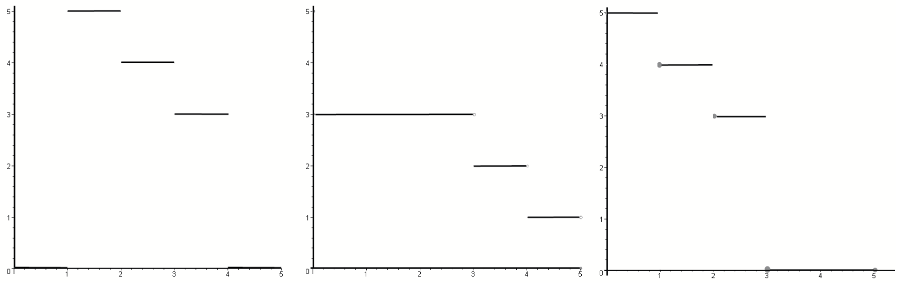

Рис. 3: Кусочно-постоянная функция, $d_f\,(c)$ и $\tilde{f}^*$

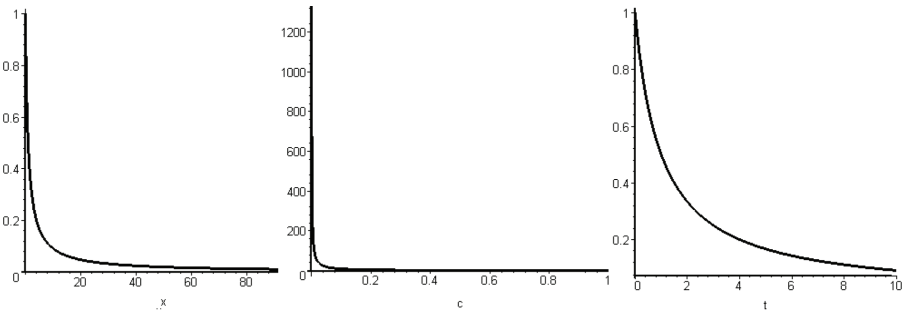

Рис. 4: $f\,(x) = \frac{1}{1+x}$, $d_f\,(c)$ и $\tilde{f}^*$

1. На рис. 2 рассматривается функция $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right); x \in (0;1)$, для которой

$$d_f(c) = \mu\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right) > c\right\}\right) \Rightarrow d_f(c) : [-1;1] \to [0;1]$$

$$d_f(c) = \frac{\pi - 2\arcsin c}{2\pi - 2\arcsin c} + \frac{2\pi - 4\arcsin c}{16\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\left(k + \frac{\arcsin c}{2\pi}\right)\left(k + \frac{1}{2} - \frac{\arcsin c}{2\pi}\right)} =$$

$$= \frac{\pi - 2\arcsin c}{\pi - \arcsin c}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8\pi}\int_0^1 \frac{x^{\frac{\arcsin c}{2\pi}} - x^{\frac{1}{2} - \frac{\arcsin c}{2\pi}}}{1 - x}dx\right).$$

Легко видеть, что функции d_f и $\tilde{f}^*$ являются монотонно убывающими и обладают свойствами, указанными в утверждении 2.2.

2. На рис. 3 рассматривается функция $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}(x)$, где χ_{A_k} — характеристические функции промежутков A_k.

3. На рис. 4 рассматривается функция $f(x) = \frac{1}{1+x}; x \in (0;+\infty)$, и показано, что в этом случае $d_f(c) = \frac{1-c}{c}$ и $\tilde{f}^*(t) = \frac{1}{1+t}$.

3. Общепринятый подход к построению перестановок

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}$ — открытое связное подмножество и пусть $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ — измеримые функции. Введем в рассмотрение следующее понятие:

Определение 3.1. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются равноизмеримыми [4], если

$$d_f(c) = d_g(c)\ \forall c \in [0; \mu(\Omega)].$$

Определение 3.2. Перестановкой измеримой функции f называется убывающая непрерывная справа функция f^*, которая равноизмерима с f. При этом (см. [2]):

$$f^*(s) = \inf\left(\{t \in \mathbb{R} : \mu(\{\gamma \in \mathbb{R} : f(\gamma) > t\}) \leq s\}\right).$$

В отличие от альтернативного подхода $\left(\tilde{f}^*(t) = d_f^{-1}(t)\right)$, перестановка в смысле определения 3.2 допускает значения $f^*(0) = \sup\limits_{x\in\Omega} f(x) - \inf\limits_{x\in\Omega} f(x)$ и $f^*(\mu(\Omega)) = 0$. Следовательно, f^* являются неотрицательной функцией.

Утверждение 3.1. [2, p. 46–47]. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}$ — открытое связное подмножество и пусть $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ — измеримые функции. Пусть $0 < t, t_1, t_2 < \infty$; и $k \in \mathbb{R}$ — заданные величины. Тогда [2]:

1. $(kf)^*(t) = |k|\, f^*(t)$;
2. $(f+g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$;

3. $(fg)^* (t_1 + t_2) \le f^* (t_1) g^* (t_2)$.

Проведем сравнительный анализ двух подходов к определению перестановок. Для начала покажем, что утверждение 3.1 остается в силе, если перестановку определить по правилу (2.1). Действительно, как следует из приведенных преобразований

$$\left(\widetilde{kf}\right)^* (x) = y_1; |k| \tilde{f}^* (x) = y_2 \Leftrightarrow x = d_f \left(\frac{y_2}{k}\right)$$

$$d_{kf} (y_1) = x; d_{kf} (y_2) = d_{kf} \left(|k| \tilde{f}^* (x)\right) = \mu \left(\left\{t : kf (t) > |k| \tilde{f}^* (x)\right\}\right) =$$

$$= \mu \left(\left\{t : f (t) > \frac{y_2}{k}\right\}\right) = d_f \left(\frac{y_2}{k}\right) = x \Rightarrow \left(\widetilde{kf}\right)^* (x) = |k| \tilde{f}^* (x),$$

пункт 1 утверждения 3.1 выполняется.

Выполнение пункта 2 данного утверждения становится очевидным, если заметить, что неравенство $t_1 + t_2 \le d_{f+g} \left(\tilde{f}^* (t_1) + \tilde{g}^* (t_2)\right)$ влечет справедливость также и неравенства $\left(\widetilde{f+g}\right)^* (t_1 + t_2) \le \tilde{f}^* (t_1) + \tilde{g}^* (t_2)$.

Проверим корректность пункта 3 утверждения 3.1. Действительно, пусть имеет место неравенство $t_1+t_2 \le d_{fg} \left(\tilde{f}^* (t_1) + \tilde{g}^* (t_2)\right)$. Тогда $\left(\widetilde{fg}\right)^* (t_1 + t_2) \le \tilde{f}^* (t_1) \tilde{g}^* (t_2)$, что и требовалось установить.

Заметим также, что для кусочно-постоянной функции

$$f (x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k} (x),$$

где χ_{A_k} — характеристическая функция промежутка A_k, перестановка f^* совпадает с перестановкой $\tilde{f}^*$.

4. Весовые пространства Лоренца

Указанные в разделах 2 и 3 утверждения будем использовать для доказательства базовых свойств весового пространства Лоренца, которое можно определить как множество функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$, для которых

$$\left(\int_0^{\mu(\Omega)} w (t) \left|\tilde{f}^* (t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} < \infty; w (x) \in L_1 ((0; \mu (\Omega))), w (x) > 0 \text{ почти всюду.}$$

Здесь интеграл рассматривается в смысле Лебега. Пусть $w (t)$ — весовая функция. Введем следующее понятие:

Определение 4.1. Пусть $0 < p, q < \infty$ — заданные числа. Особым пространством Лоренца будем называть функциональное пространство $L (p, q)$ измеримых функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$ с мерой (Лебега), для которых

$$\|f (x)\|_{L(p,q)} = \left(\int_0^{\mu(\Omega)} \frac{\left(t^{\frac{1}{p}} \left|\tilde{f}^* (t)\right|\right)^q}{t} dt\right)^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

Тогда имеет место такой результат:

Утверждение 4.1. Пространство $L(p,q)$ линейно для любых $p>0, q>0$ и тех f, g, для которых $t \le d_{f+g}\left(\tilde{f}^*\left(\frac{t}{2}\right)+\tilde{g}^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)$.

Доказательство. Поскольку

$$\left[\int_0^{\mu(\Omega)} \frac{\left(t^{\frac{1}{p}}\left|\left(\widetilde{f+g}\right)^*\right|(t)\right)^q}{t}\,dt\right]^{\frac{1}{q}} \le \left[\int_0^{\mu(\Omega)} \frac{\left(t^{\frac{1}{p}}\left|\tilde{f}^*\left(\frac{t}{2}\right)+\tilde{g}^*\left(\frac{t}{2}\right)\right|\right)^q}{t}\,dt\right]^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le \left[\int_0^{\frac{\mu(\Omega)}{2}} \frac{2^{\frac{q}{p}}\left(u^{\frac{1}{p}}\left|\tilde{f}^*(u)\right|+u^{\frac{1}{p}}\left|\tilde{g}^*(u)\right|\right)^q}{u}du\right]^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le 2^{\frac{1}{p}+1}\left(\|f(x)\|_{L(p,q)}+\|g(x)\|_{L(p,q)}\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le 2^{1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\left(\|f(x)\|_{L(p,q)}+\|g(x)\|_{L(p,q)}\right),$$

то $L(p,q)$ замкнуто относительно операции сложения. Кроме того,

$$\|(\alpha f)(x)\|_{L(p,q)} = |\alpha|\,\|f(x)\|_{L(p,q)},$$

что следует из доказанного в разделе 3 свойства $\left(\widetilde{kf}\right)^*(t) = |k|\,\tilde{f}^*(t)$. Тогда $L(p,q)$ — замкнуто относительно линейных операций, и так как $L(p,q)$ является подмножеством линейного пространства всех функций, определённых на Ω, то $L(p,q)$ — линейно. □

Определение 4.2. Линейное пространство X называется квазинормированным, если на его элементах x можно определить функцию $\|x\| \ge 0$, которая удовлетворяет условиям:

1. $x = 0 \Leftrightarrow$ существует единственный элемент $x \in X : \|x\| = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
3. $\|x+y\| \le C\left(\|x\|+\|y\|\right); \quad C \ge 1.$

Следствие 4.1. *В условиях предыдущего утверждения пространство* $L(p,q)$ *является квазинормированным для любых* $p>0, q>0$.

Утверждение 4.2. Пусть $\{f_n : \Omega \to \mathbb{R}\}_{n=1}^{+\infty}$ — равномерно сходящаяся на $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Dom}(f_i)$ последовательность измеримых монотонных функций таких, что $\tilde{f}_n^* \in L(p,q)$. Тогда последовательность функций $\left\{\tilde{f}_n{}^*\right\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится по норме на $[0;\mu(\Omega)]$ в особом пространстве Лоренца $L(p,q)$.

Доказательство. Следуя результатам работы [1, p. 201], имеем:

Если для последовательности инъективных функций $f_n \rightrightarrows f_0$ на $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Dom}\,(f_i)$, то ${f_n}^{-1} \rightrightarrows {f_0}^{-1}$ на $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Im}\,(\mathrm{Dom}\,(f_i))$.

Это значит, что ${f_n}^{-1} \rightrightarrows {f_0}^{-1}$. Следовательно, последовательность функций $\{d_{f_n}\}_{n=1}^{+\infty}$, элементы которой определяются по правилу

$$d_f\,(y) = \sup_{t\in\Omega} t - f^{-1}\,(y), \text{ либо } d_f\,(y) = f^{-1}\,(y) - \inf_{t\in\Omega} t,$$

также сходится равномерно на $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Im}\,(\mathrm{Dom}\,(f_i))$. Поэтому $\tilde{f}_n^* \rightrightarrows \tilde{f}_0^*$ (см. [1, p. 201]). Покажем, что последовательность $\left\{\tilde{f}_n{}^*\right\}_{n=1}^{+\infty}$ сходится по норме в $L\,(p,q)$. Действительно,

$$\left\|\tilde{f}_n^*\,(t) - \tilde{f}_0^*\,(t)\right\|_{L(p,q)} = \left(\int_0^{\mu(\Omega)} \left(\gamma^{\frac{1}{p}} \left|\tilde{f}_n^*\,(\gamma) - \tilde{f}_0^*\,(\gamma)\right|\right)^q \frac{d\gamma}{\gamma}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Так как $\tilde{f}_n^* \rightrightarrows \tilde{f}_0^*$, то

$$\left(\int_0^{\mu(\Omega)} \left(\gamma^{\frac{1}{p}} \left|\tilde{f}_n^*\,(\gamma) - \tilde{f}_0^*\,(\gamma)\right|\right)^q \frac{d\gamma}{\gamma}\right)^{\frac{1}{q}} < \left(\int_0^{\mu(\Omega)} \left(\gamma^{\frac{1}{p}} \cdot \varepsilon\right)^q \frac{d\gamma}{\gamma}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \varepsilon\left(\int_0^{\mu(\Omega)} \frac{d\gamma}{\gamma^{1-\frac{q}{p}}}\right)^{\frac{1}{q}} = \varepsilon\frac{p\mu(\Omega)^{\frac{q}{p}}}{q} = \varepsilon M.$$

Отсюда следует искомое утверждение. □

Указанные свойства справедливы и для традиционных пространств Лоренца, доказательства которых приведены в [2,3].

Определение 4.3. Весовым пространством Лоренца $\Lambda_w^q\,(\Omega)$ называется пространство с мерой измеримых функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\left(\int_0^{\mu(\Omega)} w\,(t) \left|\tilde{f}^*\,(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

где $q > 0$, $w\,(t) \in L_1\,((0;\mu\,(\Omega)))$ и $w\,(t) > 0$ почти всюду на $(0;\mu\,(\Omega))$.

Особое пространство Лоренца является частным случаем весового пространства Лоренца в случае $w\,(t) = t^{\frac{q}{p}-1}$. Установим ряд свойств весовых пространств Лоренца.

Утверждение 4.3. *Для $q > 1$ имеем $\Lambda_w^q\,(\Omega) \supset \Lambda_w^1\,(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $p, q > 1$ такие, что $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Тогда, в силу неравенства Гёльдера, имеем:

$$\int_0^{\mu(\Omega)} w(t)\left|\tilde{f}^*(t)\right|dt = \int_0^{\mu(\Omega)} w^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}(t)\left|\tilde{f}^*(t)\right|dt \leq$$
$$\leq \left(\int_0^{\mu(\Omega)} w(t)\left|\tilde{f}^*(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \|w(t)\|^{\frac{1}{p}}_{L_1((0;\mu(\Omega)))}.$$

Тем самым включение $\Lambda_w^q(\Omega) \supset \Lambda_w^1(\Omega)$ установлено. □

Утверждение 4.4. Пусть $w(t)$ такая, что $w(2t) \leq w(t)$, $t \in \left[0; \frac{\mu(\Omega)}{2}\right]$ и для любых f, g имеем $t \leq d_{f+g}\left(\tilde{f}^*\left(\frac{t}{2}\right)+\tilde{g}^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)$. Тогда $\Lambda_w^q(\Omega)$ — линейное пространство.

Доказательство. Так как

$$\left(\int_0^{\mu(\Omega)} w(t)\left|\left(\widetilde{\lambda f}\right)^*(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} = |\lambda| \left(\int_0^{\mu(\Omega)} w(t)\left|\tilde{f}^*(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

то $\Lambda_w^q(\Omega)$ замкнуто относительно операции умножения на элементы поля $\lambda \in \mathbb{R}$. Учитывая, что

$$\left(\int_0^{\mu(\Omega)} w(t)\left|\left(\widetilde{f+g}\right)^*(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_0^{\mu(\Omega)} w(t)\left|\tilde{f}^*\left(\frac{t}{2}\right)+\tilde{g}^*\left(\frac{t}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \leq$$
$$\leq 2\left(\int_0^{\mu(\Omega)} w(t)\left|\tilde{f}^*\left(\frac{t}{2}\right)\right|^q dt + \int_0^{\mu(\Omega)} w(t)\left|\tilde{g}^*\left(\frac{t}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \leq$$
$$\leq 2^{2+\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\mu(\Omega)} w(v)\left|\tilde{g}^*(v)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} + 2^{2+\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\mu(\Omega)} w(v)\left|\tilde{f}^*(v)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

имеем: $\Lambda_w^q(\Omega)$ замкнуто относительно операции сложения элементов. Так как $\Lambda_w^q(\Omega)$ — подмножество линейного пространства, то $\Lambda_w^q(\Omega)$ — линейное пространство. □

Утверждение 4.5. Пусть функция $w(t)$ такая, что $w(2t) \leq w(t), t \in \left[0; \frac{\mu(\Omega)}{2}\right]$ и $t \leq d_{f+g}\left(\tilde{f}^*\left(\frac{t}{2}\right)+\tilde{g}^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)$. Тогда функционал

$$\|f(x)\|_{\Lambda_w^q(\Omega)} = \left(\int_0^{\mu(\Omega)} w(t)\left|\tilde{f}^*(t)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

является квазинормой.

Доказательство. Оценка

$$\|f(x)+g(x)\|_{\Lambda_w^q(\Omega)} \le 2^{1+\frac{1}{q}}\left(\|f(x)\|_{\Lambda_w^q(\Omega)}+\|g(x)\|_{\Lambda_w^q(\Omega)}\right)$$

и равенство $\|\lambda f(x)\|_{\Lambda_w^q(\Omega)} = |\lambda|\,\|f(x)\|_{\Lambda_w^q(\Omega)}$ непосредственно следуют из предыдущего утверждения. Покажем, что $\|f(x)\|_{\Lambda_w^q(\Omega)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. Действительно, для этого достаточно заметить, что

$$\|f(x)\|_{\Lambda_w^q(\Omega)} = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\mu(\Omega)} w(t)\left|\tilde{f}^*(t)\right|^q dt = 0;$$

$$\int_0^{\mu(\Omega)} w(t)\left|\tilde{f}^*(t)\right|^q dt = 0 \Rightarrow w(t)\left|\tilde{f}^*(t)\right|^q = 0 \Rightarrow \tilde{f}^*(t) = 0 \text{ почти всюду.}$$

□

Утверждение 4.6. Пусть $\{w_n(t)\}_{n=1}^{+\infty}$ — сходящаяся по мере к функции $w_0(t)$ последовательность. Пусть $\{w_n(t)\}_{n=1}^{+\infty}$ — ограничена интегрируемой по Лебегу мажорантой. Тогда последовательность функционалов

$$\left\{\|f(x)\|_{\Lambda_{w_n}^q(\Omega)}\right\}_{n=1}^{+\infty}$$

поточечно сходится к функционалу $\|f(x)\|_{\Lambda_{w_0}^q(\Omega)}$ при условии, что функция f принадлежит каждому из весовых пространств Лоренца $\Lambda_{w_n}^q(\Omega)$, $n \in \{0\}\cup\mathbb{N}$, а также пространству Лоренца с весовой функцией, равной мажоранте.

Доказательство. Согласно определению сходимости по мере последовательности $\{w_n(t)\}_{n=1}^{+\infty}$ имеем:

$$\forall\sigma>0\,\forall\delta>0\,\exists N:\forall n>N \Rightarrow \mu(\{t\in\Omega: |w_n(t)-w_0(t)|\ge\sigma\})<\delta.$$

Тогда

$$\left|\|f(x)\|^q_{\Lambda_{w_n}^q(\Omega)} - \|f(x)\|^q_{\Lambda_{w_n}^q(\Omega)}\right| =$$

$$= \left|\int\limits_{\{t\in[0;\mu(\Omega)]:|w_n(t)-w_0(t)|\ge\sigma\}} (w_n(t)-w_0(t))\left|\tilde{f}^*(t)\right|^q dt + \int\limits_{\{t\in[0;\mu(\Omega)]:|w_n(t)-w_0(t)|<\sigma\}} (w_n(t)-w_0(t))\left|\tilde{f}^*(t)\right|^q dt\right| \le$$

$$\le \int\limits_{\{t\in[0;\mu(\Omega)]:|w_n(t)-w_0(t)|\ge\sigma\}} |w_n(t)-w_0(t)|\left|\tilde{f}^*(t)\right|^q dt + \int\limits_{\{t\in[0;\mu(\Omega)]:|w_n(t)-w_0(t)|<\sigma\}} |w_n(t)-w_0(t)|\left|\tilde{f}^*(t)\right|^q dt <$$

$$< \int\limits_{\{t\in[0;\mu(\Omega)]:|w_n(t)-w_0(t)|\ge\sigma\}} |w_n(t)-w_0(t)|\left|\tilde{f}^*(t)\right|^q dt + \int\limits_{\{t\in[0;\mu(\Omega)]:|w_n(t)-w_0(t)|<\sigma\}} \sigma\left|\tilde{f}^*(t)\right|^q dt \quad .$$

Следовательно, в силу того, что $w_n(t) \in L_1((0;\mu(\Omega)))$ и существует интегрируемая по Лебегу мажоранта $F(t)$, имеем:

$$\int\limits_{\{t\in[0;\mu(\Omega)]:|w_n(t)-w_0(t)|\geq\sigma\}} |w_n(t)-w_0(t)| \left|\tilde{f}^*(t)\right|^q dt + \int\limits_{\{t\in[0;\mu(\Omega)]:|w_n(t)-w_0(t)|<\sigma\}} \sigma\left|\tilde{f}^*(t)\right|^q dt \leq$$

$$\leq \int\limits_{\{t\in[0;\mu(\Omega)]:|w_n(t)-w_0(t)|\geq\sigma\}} 2F(t)\left|\tilde{f}^*(t)\right|^q dt + \sigma\left\|\left|\tilde{f}^*(t)\right|^q\right\|_{L_1((0;\mu(\Omega)))}.$$

Так как $\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0 : \forall B\,(\mu(B) < \delta) \Rightarrow \int_B |\varphi(t)|\, d\mu < \varepsilon$, то из сходимости по мере следует, что выражение

$$\mu(\{t \in [0;\mu(\Omega)] : |w_n(t) - w_0(t)| \geq \sigma\})$$

можно сделать меньше δ. Тогда $\int\limits_{\{t\in[0;\mu(\Omega)]:|w_n(t)-w_0(t)|\geq\sigma\}} 2F(t)\left|\tilde{f}^*(t)\right|^q dt < \frac{\varepsilon}{2}$, а число σ можно подобрать так, что $\sigma\left\|\left|\tilde{f}^*(t)\right|^q\right\|_{L_1((0;\mu(\Omega)))} < \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует: $\|f(x)\|^q_{\Lambda^q_{w_n}(\Omega)} \to \|f(x)\|^q_{\Lambda^q_{w_0}(\Omega)}$. Но поскольку функция $y = x^\alpha, \alpha > 0, x \geq 0$ непрерывна, то $\|f(x)\|_{\Lambda^q_{w_n}(\Omega)} \to \|f(x)\|_{\Lambda^q_{w_0}(\Omega)}$. □

Таким образом, приведенные утверждения показывают, что с помощью альтернативного подхода к определению подстановки можно построить пространства, свойства которых во многом совпадают со свойствами традиционных пространств Лоренца.

Библиографические ссылки

1. *Barvinek E.* Convergence of sequences of inverse functions. /Barvinek E., Daler I., Francu J. // Archivum Mathematicum. — 1991. — Vol. 27(1991), No. 3–4. — P. 201–204.
2. *Grafakos L.* Classical Fourier Analisys /Grafakos L. — New York: Springer Science, LLC, 2008. — 493 p.
3. *Kristiansson E.* Decreasing rearrangements and Lorenz $L(p,q)$ spaces. — Master Thesis. — Lulea University of Technology, 2002.— P. 1–72.
4. *Крейн С. Г.* Интерполяция линейных операторов. /С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семёнов — М. :Наука, 1978.— 400 с.

Надійшла до редколегії 01.12.2012