ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". № 8. 2013. Вип. 5. С. 130–142

Проблеми математичного моделювання
та теорії диференціальних рівнянь

УДК 517.9

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ НА ТРАНСПОРТНІЙ МЕРЕЖІ З ФАЗОВИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

Т. А. Божанова

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, 49050, Дніпропетровськ. E-mail: tamara-bozhanova@ukr.net

Розглядається скалярна задача оптимального керування для нелінійних гіперболічних законів збереження на транспортній мережі з фазовими обмеженнями. Керуваннями виступають функції щільності транспортного потоку на ребрах мережі та в початковий момент. У припущенні, що вихідна задача керування може не мати оптимального розв'язку, запропоновано підхід щодо регуляризації такої скалярної задачі на мережі, яка грунтується на залученні параметризованих задач векторної оптимізації. Доведено існування ефективних розв'язків таких задач.

Ключові слова: транспортний потік на мережі, гідродинамічна модель, оптимальне керування, фазові обмеження.

1. Вступ

В основі даної роботи лежить макроскопічна модель транспортного потоку на мережі, яка складається зі скінченної сукупності доріг та вузлів, що їх з'єднують. Припускається, що на кожній дорозі динаміка транспортного руху описується нелінійним гідродинамічним законом збереження, який приводить до розгляду системи нелінійних рівнянь у частинних похідних першого порядку. Дослідженню та аналізу таких задач, зокрема проблемі моделювання та побудові оптимальних законів керування, присвячена досить обширна література (див. [1–3, 6, 7, 14, 15]).

У даній статті розглядається задача оптимального керування для нелінійних законів збереження на транспортій мережі з фазовими обмеженнями. При цьому вважається, що функції керування задані на ребрах мережі і впливають на значення початкової щільності, та існує функціонал, за яким оцінюється якість керування на мережі. В силу наявності фазових обмежень, введених на щільність транспортного потоку, регулярність запропонованої задачі оптимального керування, тобто існування щонайменше однієї допустимої пари, є відкритою проблемою навіть у найпростіших випадках. У зв'язку з цим, виходячи з припущення, що вихідна задача оптимального керування може не мати оптимального розв'язку, було введено до розгляду сукупність параметризованих задач векторної оптимізації, в яких цільове відображення має конкретний вигляд та суттєво опирається на фазові обмеження (див. [12]). Для такого класу задач було доведено, що множина їх ефективних розв'язків не є порожньою.

2. Основні поняття та позначення

У цьому розділі нагадаємо деякі відомі факти щодо функцій з обмеженою повною варіацією, введемо поняття транспортної мережі та основні напрями побудови макроскопічної моделі транспортного потоку на мережі .

2.1. Простори функцій з обмеженою повною варіацією

Нехай $f : \Omega \to \mathbb{R}$ елемент з простору $L^1(\Omega)$. Означимо

$$\int_\Omega |Df| = \sup\left\{\int_\Omega f \operatorname{div}\vec{\varphi}dx:\ \vec{\varphi}\in C_0^1(\Omega)^n,\ \|\varphi(x)\|_{C(\Omega)^n}\le 1 \text{ для } x\in\Omega\right\},$$

де $\operatorname{div}\vec{\varphi} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}$. Згідно з теоремою Радона – Нікодима, якщо $\int_\Omega |Df| < +\infty$, то розподілення Df є мірою і існують векторнозначна функція $\nabla f \in L^1(\Omega)^n$ та міра $D_s f$, сингулярна відносно N-мірної міри Лебега $\mathcal{L}^N\lfloor\Omega$, звуженої на Ω, такі, що

$$Df = \nabla f \mathcal{L}^n\lfloor\Omega + D_s f.$$

Означення 2.1. [5] Будемо казати, що функція $f \in L^1(\Omega)$ має обмежену варіацію на Ω, якщо похідна Df існує у сенсі розподілення і належить класу мір Радона з обмеженою повною варіацією, тобто для якої $\int_\Omega |Df| < +\infty$. Позначимо через $\mathrm{BV}(\Omega)$ простір усіх функцій з $L^1(\Omega)$ з обмеженою варіацією.

Зауважимо, що відносно норми

$$\|f\|_{\mathrm{BV}(\Omega)} = \|f\|_{L^1(\Omega)} + \int_\Omega |Df|,$$

$\mathrm{BV}(\Omega)$ є простором Банаха. Добре відомим є наступний результат для BV-функцій.

Твердження 2.1. Рівномірно обмежені множини по BV-нормі є відносно компактними в $L^1(\Omega)$, тобто, якщо $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathrm{BV}(\Omega)$ і

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_{BV(\Omega)} < +\infty,$$

то існує підпослідовність з $\{f_k\}_{k=1}^\infty$, строго збіжна в $L^1(\Omega)$ до деякого елемента $f \in \mathrm{BV}(\Omega)$.

Означення 2.2. Будемо казати, що послідовність $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathrm{BV}(\Omega)$ слабко збігається до деякого елемента $f \in \mathrm{BV}(\Omega)$ і позначати $f_k \rightharpoonup f$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови: $f_k \to f$ строго в $L^1(\Omega)$, $Df_k \rightharpoonup Df$ $*$-слабко в $\mathcal{M}(\Omega)$.

Має місце така теорема.

Теорема 2.1. [5] *Нехай* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ *послідовність в* $BV(\Omega)$, *строго збіжна до деякого елемента* $f \in L^1(\Omega)$ *і така, що* $\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_\Omega |Df_k| < +\infty$. *Тоді*

1. $f \in BV(\Omega)$ *і* $\int_\Omega |Df| \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |Df_k|$;

2. $f_k \rightharpoonup f$ *в* $BV(\Omega)$.

2.2. Поняття транспортної мережі

Нехай Θ — це відкрита випукла підмножина простору R^2 і $\mathfrak{F}$ — плоский граф на R^2.

Означення 2.3. Будемо казати, що множина Ω є мережею доріг, якщо її можна подати у вигляді пари $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$, де

(а): $\mathcal{I}$ — це скінченна сукупність ребер, котрі відповідають дорогам мережі та є відрізками $I_i = [a_i, b_i]$ в R, $i = 1, \ldots, N$;

(б): $\mathcal{J}$ — скінченна кількість вершин, які відповідають вузлам даної мережі.

Кожна вершина J є об'єднанням двох непорожніх підмножин $Inc\,(J)$ та $Out\,(J)$ таких, що:

(i):кожна вершина $J \in \mathcal{I}$ є внутрішньою точкою Ω;

(ii): для $\forall J \neq J' \in \mathcal{J}$ та $Inc\,(J) \bigcap Inc\,(J') = \emptyset$ маємо: $Out\,(J) \bigcap Out(J') = \emptyset$;

(iii): якщо $i \notin \cup_{J\subset\mathcal{J}} Inc\,(J)$, тоді b_i відповідає деякій точці на $\partial\Omega$ (вихідна дорога з мережі), і якщо $i \notin \cup_{J\subset\mathcal{J}} Out\,(J)$, тоді a_i відповідає деякій точці на $\partial\Omega$ (вхідна в мережу дорога). Крім того, ці два випадки взаємно виключні.

2.3. Макроскопічна модель транспортного потоку на мережі

Нехай $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ — транспортна мережа, котра налічує строго N доріг. Для будь-якого $i \in \{1, \ldots, N\}$ дорога i відповідає відрізку $[a_i, b_i]$. Позначимо через $\rho_i = \rho_i(t, x)$ щільність машин на дорозі i в точці $x \in [a_i, b_i]$, $t \in [0, T]$; при цьому максимально можливу щільність на дорозі i, котра відповідає появі затору на даній ділянці мережі, позначимо як $\rho_{max,i}$. Припустимо, що дороги даної мережі відповідають ребрам графа $\mathfrak{F}$, обмеженого областю Ω, а вузли, які з'єднують дороги, — вершинам цього графа. Кількість машин, що проїжджає за одиницю часу, будемо називати транспортним потоком і позначати $f(\rho) = \rho v$, де $v(\rho)$ — швидкість машин. Слід зауважити, що $v(\rho)$ є спадною функцією щільності ρ. Відповідно до [4] припустимо, що існують функції потоку f_i такі, що для кожної дороги $i \in \{1, \ldots, N\}$ виконуються такі властивості:

$$\begin{cases} f_i \text{ є фукнціями тільки } \rho_i, \\ f_i \text{ неперервно диференційовні на } [0,\ \rho_{max,\,i}], \\ f_i = f_i(\rho_{max,\,i}) = 0, \\ f_i \text{ — строго вгнуті функції}, \\ \exists\ \sigma \in (0, \rho_{max,i}) : f_i'(\sigma_i) = 0 \text{ та } (\rho - \sigma_i) f_i'(\rho) < 0,\ \forall\ \rho \neq \sigma_i. \end{cases} \tag{2.1}$$

Як випливає з наведених вище умов, транспортний потік є додатним при значеннях щільності $0 < \rho_i < \rho_{max,\,i}$. Тут σ_i — оптимальна щільність, при якій транспортний потік досягає свого максимуму. Більше того, за цих умов напрям потоку на кожній дорозі даної мережі є заданим. Таким чином, для довільного $i \in \{1, \dots, N\}$ макроскопічна модель транспортного потоку на дорозі i може бути виражена наступним нелінійним законом збереження (див. [15]):

$$\partial_t \rho_i(t,\ x) + \partial_x f_i(\rho_i(t,x)) = 0,\ \ \forall\ x \in (a_i,\ b_i),\ \forall\ t \in (0,T], \tag{2.2}$$

$$\rho_i(0,\ x) = \bar{\rho}_i(x), \quad \forall\ x \in [a_i,\ b_i] \tag{2.3}$$

із функцією потоку

$$f_i(\rho) = \rho \upsilon_i(\rho),$$

де швидкість υ_i — непереревно-диференційовна спадна функція свого аргументу ρ.

Як відомо, така задача Коші може не мати класичного розв'язку навіть за наявності гладких початкових умов. Це приводить до розгляду слабких розв'язків, які, зазвичай, не є єдиними.

Означення 2.4. Нехай $\rho_0 \in L^1_{loc}(R; R^n)$ і $T > 0$. Функцію $\rho : [0,T] \times R \to R^n$ будемо називати слабким розв'язком задачі Коші (2.2)–(2.3), якщо ρ є неперервною функцією з $[0,T]$ в L^1_{loc} та $\forall \psi \in {}^1$ з компактним носієм на множині $(-\infty, T) \times R$ виконується умова:

$$\int_0^T \int_R \{\rho \cdot \psi_t + f(\rho) \cdot \psi_x\}\, dxdt + \int_R \rho_0(x) \cdot \psi(0,x) dx = 0. \tag{2.4}$$

Розглянемо вузол J з n вхідними дорогами $I_1, \dots, I_n$ з кінцем b_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) у вузлі та m вихідними дорогами $I_{n+1}, \dots, I_{n+m}$ з кінцем a_i ($i \in \{n+1, \dots, n+m\}$) у вузлі. Тоді, щоб гарантувати збереження кількості машин, які проїжджають через вузол J, введемо умову:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(\rho_i(t,\ b_i)) = \sum_{i=n+1}^{n+m} f_i(\rho_i(t,\ a_i))\ \ \forall\ t \in [0,T]\ \ \forall\ J. \tag{2.5}$$

Це співвідношення ще називають умовою Rankine – Hugoniot у вузлі. Проте виконання цієї умови не є достатнім для визначення єдиного розв'язку системи (2.2)–(2.3) на мережі. Тому доцільно залучити підхід праці [3], який полягає у тому, щоб у кожному вузлі мережі розглядати так звану матрицю розподілу руху $A(J) \in R^{n+m}$ таку, що

$$A(J) = [\alpha_{ji}(J)], \ \ j \in \{n+1, \dots, n+m\}\,, \ \ i \in \{1, \dots, n\}\,, \tag{2.6}$$

$$\begin{cases} \alpha_{ji}(J) \neq \alpha_{ji'}(J), \ \ \forall\, i \neq i', \ 0 < \alpha_{ji}(J) < 1, \\ \sum\limits_{j=n+1}^{n+m} \alpha_{ji}(J) = 1 \text{ для кожного } i \in \{1, \dots, n\}\,. \end{cases} \tag{2.7}$$

Разом з тим, для відокремлення коректного з фізичної точки зору розв'язку, функції щільності ρ_i мають задовольняти ентропійну умову Кружкова [9]:

Означення 2.5. Будемо казати, що слабкий розв'язок $\rho = \rho(t,x)$ задачі Коші (2.2)–(2.3) задовольняє ентропійну допустиму умову Кружкова, якщо

$$\int_0^T \int_R \{|\rho - k|\varphi_t + sgn(\rho - k)(f(\rho) - f(k))\varphi_x\}\, dxdt \geq 0 \tag{2.8}$$

для кожного $k \in R$ та кожної неперервно диференційовної додатної функції φ з компактним носієм на множині $[0,T) \times R$.

3. Постановка задачі

Нехай $\Omega = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_N, b_N)$ — мережа. Розглянемо наступну задачу оптимального керування на транспортній мережі Ω:

$$\begin{cases} J(u,\rho) \to \max, \\ \text{якщо } \ u \in \mathcal{U}_{ad}, \ \ \rho \in \mathcal{R}_{ad}, \end{cases} \tag{3.1}$$

де

- J — цільовий функціонал;
- $u = (u^0, u^1)$ — функції керування;
- $\mathcal{U}_{ad} = \{u = (u^0, u^1) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega_T)^m : \|u^0\|_{BV(\Omega)} + \|u^1\|_{BV(\Omega_T)} \leq \gamma\}$ — множина допустимих керувань;
- $\mathcal{R}_{ad} = \{\rho \in C([0,T]; L^1_{loc}(\Omega)) : l(\rho(t,x)) \leq 0$ м. с. на $\Omega_T\}$ — множина допустимих значень, тут $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервний оператор;
- $\Omega_T := \Omega_{1,T} \times \ldots \times \Omega_{N,T}$;
- $\rho = \rho(u)$ задовольняє умови:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \int_{a_i}^{b_i} (\rho_i \partial_t \phi + f_i(\rho_i) \partial_x \phi) dxdt = \\ \displaystyle = \int_0^T \int_{a_i}^{b_i} g_i(t, x, \rho_i, u_i^1)\, dxdt, \\ \forall \phi \in C_0^\infty((0,T) \times (a_i, b_i)), \forall I_i \in \mathcal{I}, \forall i = \overline{1, N}; \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} \int_0^T \int_{a_i}^{b_i} \Big(|\rho_i - c|\partial_t \tilde{\phi} + \operatorname{sgn}(\rho_i - c)(f_i(\rho_i) - f_i(c))\partial_x \tilde{\phi}\Big)\, dxdt \le \\ \le \int_0^T \int_{a_i}^{b_i} \operatorname{sgn}(\rho_i - c) g_i(t, x, \rho_i, u_i^1)\, dxdt, \\ \forall c \in \mathbb{R}, \forall \tilde{\phi} \in C_0^\infty((0,T) \times (a_i, b_i)), \forall \tilde{\phi} \ge 0, \forall i = \overline{1, N}; \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\rho_i(0, x) = u_i^0(x),\ x \in (a_i, b_i)\ \ \forall i = \overline{1, N}; \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} f_j(\rho_j(\cdot, a_j^+)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} f_i(\rho_i(\cdot, b_i^-)), \\ \forall J \in \mathcal{J}, \forall j = n+1, \dots, n+m; \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} L(J, u^k, \rho) := \sum_{i=1}^{n} f_i(\rho_i(\cdot, b_i^-)) \text{ досягає максимального} \\ \text{значення на парі } (u^k, \rho) \text{ при обмеженнях (3.2)–(3.5).} \end{cases} \tag{3.6}$$

Припустимо, що

$$f = (f_1, \dots, f_N) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N \text{ є локально ліпшицевою} \tag{3.7}$$

та $g \in L^\infty(\Omega_T; C^{0,1}_{loc}(\mathbb{R} \times \Omega))$, і для всіх $M_u > 0$ існують константи $C_1, C_2 > 0$ такі, що

$$g(t, x, \rho, u^1)(\rho) \le C_1 + C_2|\rho|,\ \forall (t, x, \rho, u^1) \in \Omega_T \times \mathbb{R} \times [-M_u, M_u]^m. \tag{3.8}$$

При цьому під ентропійним допустимим розв'язком задачі (3.2)–(3.4) будемо розуміти таке (див. [4, 9, 13]).

Означення 3.1. Для заданих $u = (u^0, u^1) \in \mathcal{U}_{ad}$ функція $\rho \in L^\infty(\Omega_T)$ називається ентропійним розв'язком задачі (3.1)–(3.4), якщо для будь-яких $c \in \mathbb{R}$ та

$$\eta(\lambda) := |\lambda - c|,\ \ q_i(\lambda) := \operatorname{sgn}(\lambda - c)(f_i(\lambda) - f_i(c)),\ \forall i = 1, \dots, N \tag{3.9}$$

виконується ентропійна нерівність

$$(\eta(\rho))_t + (q(\rho))_x \le \operatorname{sgn}(\rho - c) g(t, x, \rho, u^1) \text{ на } \Omega_T \tag{3.10}$$

та

$$\lim_{t \to 0+} \frac{1}{t} \int_0^t \|\rho(\tau, \cdot) - u^0\|_{L^1(\Omega)} d\tau = 0. \tag{3.11}$$

Дослідження існування та єдиності ентропійних розв'язків задачі Коші (3.2)–(3.4) можна знайти у працях Кружкова [9,10] та Улбріха [16]. Наступний результат розкриває властивості відображення $u \mapsto \rho(u)$.

Теорема 3.1. [16] *Нехай виконуються умови (3.7)–(3.8) та задані функції керування* $u = (u^0, u^1) \in \mathcal{U}_{ad}$. *Тоді для кожного* $u \in \mathcal{U}_{ad}$ *існує щонайбільше один ентропійний розв'язок*

$$\rho = \rho(u) \in C([0,T]; L^1(\Omega)) \times L^\infty(\Omega_T),$$

який задовольняє умови (3.10)-(3.11). Крім того, відображення

$$\mathcal{U}_{ad} \ni u \mapsto \rho(u) \in C([0,T]; L^1(\Omega)) \tag{3.12}$$

є неперервним за Ліпшицем, при цьому, якщо функція g *має компактний носій* $supp_x(g) \subset\subset \Omega$, *то* $\rho \in L^\infty([0,T]; BV(\Omega))$.

Означення 3.2. Будемо казати, що пара

$$(u, \rho) \in [L^1(\Omega) \times L^1(\Omega_T)] \times [C([0,T]; L^1(\Omega)) \times L^\infty(\Omega_T) \times L^\infty([0,T]; BV(\Omega))]$$

є допустимим розв'язком задачі оптимального керування (3.1), якщо $u = (u^0, u^1) \in \mathcal{U}_{ad}$, $\rho \in \mathcal{R}_{ad}$, $J(u, \rho) < +\infty$ та $\rho = \rho(u)$ відповідний ентропійний розв'язок задачі (3.2)-(3.5) у сенсі означення 3.1 та задовольняє умови (3.6)-(3.7).

Позначимо через Ξ множину всіх допустимих пар задачі (3.1). Будемо казати, що пара (u^0, ρ^0) є оптимальною для задачі (3.1), якщо

$$(u^0, \rho^0) \in \Xi \ \text{ та } \ J(u^0, \rho^0) = \sup_{(u,\rho) \in \Xi} J(u, \rho).$$

Надалі будемо припускати таке:

- (B1) Задача оптимального керування (3.1) є регулярною, якщо існує щонайменше одна пара (u, ρ) така, що $(u, \rho) \in \Xi$.

У подальшому будемо використовувати такі позначення:

$$\mathbb{U} = L^1(\Omega) \times L^1(\Omega_T), \quad \mathbb{Y} = C([0,T]; L^1(\Omega)).$$

Теорема 3.2. *Нехай виконуються початкові припущення (3.7)–(3.8) і задано цільовий функціонал* $J : \mathbb{U} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$, *секвенційний напівнеперервний зверху відносно норми топології на* $\mathbb{U} \times \mathbb{Y}$. *Задача оптимального керування (3.1) має оптимальний розв'язок* $(u^0, \rho^0) \in \Xi$ *тоді і тільки тоді, коли вона є регулярною.*

Доведення. Для початку покажемо, що цільовий функціонал $J : \mathbb{U} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ є обмеженим зверху на множині Ξ. Припустимо протилежне. Нехай існує послідовність $\{(u_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \in \Xi$ така, що $J(u_k, y_k) > k$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. За початковими припущеннями, послідовність $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{U}_{ad}$, тому послідовність $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ є обмеженою в

$$[BV(\Omega) \times BV(\Omega_T)] \cap [L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega_T)].$$

Таким чином, ми можемо припустити (див. твердження 2.1), що $u_k \to u$ в $\mathbb{U}$, і тому $u \in \mathcal{U}_{ad}$. Оскільки відображення (3.12) є неперервним за Ліпшицем, то за теоремою Асколі – Арцела отримуємо, що $\{\rho_k = \rho(u_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}_{ad}$ є обмеженою послідовністю в $\mathbb{Y}$ і існує елемент $\rho \in \mathbb{Y}$ такий, що $\rho_k \to \rho$ в $\mathbb{Y}$. Тоді, використовуючи напівнеперервність зверху функціонала J, прийдемо до співвідношення:

$$J(u,\rho) \geq \limsup_{k\to\infty} J(u_k,\rho_k) > \infty.$$

Таким чином, цільовий функціонал $J : \mathbb{U} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ є обмеженим зверху на множині Ξ. Нехай $\{(u_k,\rho_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Xi$ є максимізаційною послідовністю для вихідної задачі, тобто

$$\lim_{k\to\infty} J(u_k,\rho_k) = \sup_{(u,\rho)\in\Xi} J(u,\rho) < \infty.$$

Виходячи з попередніх аргументів, можемо припустити, що існує пара (u_0,ρ_0) така, що

$$u_k \to u_0 \text{ в } L^1(\Omega) \times L^1(\Omega_T) \text{ та } \rho_k \to \rho_0 \text{ в } C([0,T]; L^1(\Omega)). \tag{3.13}$$

Беручи цей факт до уваги, перейдемо до границі у співвідношеннях (3.10)–(3.11) при $k \to \infty$. Звідки отримуємо, що $\rho = \rho(u_0)$ є ентропійним розв'язком задачі Коші (3.2)–(3.3) при $u = u_0$. Для того, щоб довести включення $(u_0,\rho_0) \in \Xi$, зауважимо, що властивість (3.13) означає збіжність $\rho_k(t,x) \to \rho_0(t,x)$ майже скрізь на Ω_T. Таким чином, за властивістю неперервності оператора $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ отримуємо, що $\rho_0 \in \mathcal{R}_{ad}$. Для завершення доведення залишилось застосувати властивість напівнеперервності зверху функціонала J:

$$\infty > J(u_0,\rho_0) \geq \lim_{k\to\infty} J(u_k,\rho_k) = \sup_{(u,\rho)\in\Xi} J(u,\rho).$$

Таким чином, пара (u_0,ρ_0) є оптимальною для задачі (3.1). $\square$

4. Векторнозначна регуляризація задачі оптимального керування

Надалі будемо виходити з припущення, що вихідна задача оптимального керування (3.1) може не мати точного розв'язку $(u^{opt},\rho^{opt}) \in \Xi$.

Пов'яжемо з мережею $\Omega_T = \Omega_{1,T} \times \ldots \times \Omega_{N,T}$ цільовий простір $L^1(\Omega_T)$, і нехай τ — слабка топологія в $L^1(\Omega_T)$. Для підмножини $S \subset L^1(\Omega_T)$ позначимо через $int_\tau S$ та $cl_\tau S$ відповідно її внутрішність та замикання відносно слабкої топології простору $L^1(\Omega_T)$. Також припустимо, що $L^1(\Omega_T)$ є частково впорядкованим конусом додатних елементів Λ, який визначено таким чином:

$$\Lambda = \left\{ f \in L^1(\Omega_T);\ \ f(x) \geq 0 \quad \text{майже скрізь на } \Omega \right\}. \tag{4.1}$$

Означення 4.1. [8] Елемент $y^* \in S \subset L^1(\Omega_T)$ будемо називати максимальним елементом множини S, якщо не існує $y \in S$ такого, що $y \geq_\Lambda y^*,\ y \neq y^*$, тобто
$$S \cup (y^* + \Lambda) = y^*.$$

Позначимо через $Max_\Lambda(S)$ сукупність усіх максимальних елементів множини S. Уведемо два додаткові елементи $-\infty_\Lambda$ і $+\infty_\Lambda$ у $L^1(\Omega_T)$. Припустимо, що ці елементи задовольняють такі умови:

$$1)\ -\infty_\Lambda \leq y \leq\ +\infty_\Lambda,\ \forall\ y \in L^1(\Omega_T); \quad 2)\ +\infty_\Lambda + (-\infty_\Lambda) = 0.$$

Позначимо через Y^* частково розширений простір Банаха: $Y^* = L^1(\Omega_T) \cup \{-\infty_\Lambda\}$, припускаючи, що

$$\| -\infty_\Lambda \|_{L^1(\Omega_T)} = +\infty \ \text{ і }\ y + \lambda(-\infty_\Lambda) = -\infty,\ \forall\ y \in L^1(\Omega_T),\ \forall\ \lambda \in R_+.$$

Означення 4.2. Будемо казати, що множина E є ефективним супремумом множини $S \subset L^1(\Omega_T)$ відносно слабкої τ-топології простору $L^1(\Omega_T)$ за конусом Λ (або скорочено (Λ, τ)-супремумом), якщо E є сукупністю усіх максимальних елементів множини $cl_\tau S$ у випадку, коли ця множина непорожня, і E дорівнює $+\infty_\Lambda$ у противному випадку.

Надалі, $(\Lambda,\ \tau)$-супремум для множини E будемо позначати як $Sup^{\Lambda,\,\tau} S$. Таким чином, з огляду на попереднє означення, маємо:

$$Sup^{\Lambda,\,\tau} S := \begin{cases} Max_\Lambda(cl_\tau S), & Max_\Lambda(cl_\tau S) \neq \emptyset, \\ +\infty_\Lambda, & Max_\Lambda(cl_\tau S) = \emptyset. \end{cases}$$

Нехай X_∂ непорожня підмножина банахового простору X та задано деяке відображення $I : X_\partial \to L^1(\Omega_T)$. Зауважимо, що відображення $I : X_\partial \to L^1(\Omega_T)$ можна пов'язати з його розширенням $\hat{I} : X \to Y^*$ на весь простір X, де
$$\hat{I} = \begin{cases} I(x), & x \in X_\partial \\ -\infty_\Lambda, & x \notin X_\partial. \end{cases} \tag{4.2}$$

Будемо казати, що відображення $I : X_\partial \to Y^*$ є обмеженим зверху, якщо існує елемент $z \in L^1(\Omega_T)$ такий, що $z \geq_\Lambda I(x)$ для всіх $x \in X_\partial$.

Означення 4.3. Підмножину $A \in L^1(\Omega_T)$ будемо називати ефективним супремумом відображення
$$I : X_\partial \to L^1(\Omega_T)$$
відносно слабкої топології простору $L^1(\Omega_T)$ і позначати $Sup^{\Lambda,\,\tau}_{x \in X_\partial}\, I(x)$, якщо A є (Λ, τ)-супремумом образу $I(X_\partial)$ із X_∂ на $L^1(\Omega_T)$, тобто

$$Sup^{\Lambda,\,\tau}_{x \in X_\partial}\, I(x) = Sup^{\Lambda,\,\tau} \{I(x) :\ \forall\ x \in X_\partial\}.$$

Зауваження 4.1. Тепер зрозуміло, що якщо $a \in Sup_{x\in X_\partial}^{\Lambda,\,\tau}\ I(x)$, то

$$cl_\tau\,\{I(x): \forall\ x \in X_\partial\} \cap (a+\Lambda) = \{a\}$$

за умови, що $Max_\Lambda[cl_\tau\,\{I(x): \forall\ x \in X_\partial\}] \neq \emptyset$.

Нехай $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ послідовність у просторі $L^1(\Omega_T)$. Позначимо через $L^\tau\,\{y_k\}$ множину всіх точок замикання відносно слабкої топології простору $L^1(\Omega_T)$, тобто $y \in L^\tau\,\{y_k\}$, якщо існує підпослідовність $\{y_{k_i}\}_{i=1}^\infty \subset \{y_k\}_{k=1}^\infty$ така, що $y_{k_i} \rightharpoonup y$ у $L^1(\Omega_T)$ при $i \to \infty$. Якщо ця множина необмежена зверху, тобто $Sup^{\,\Lambda,\,\tau} L^\tau\,\{y_k\} = +\infty_\Lambda$, то припускаємо, що $\{+\infty_\Lambda\} \in L^\tau\,\{y_k\}$. Зафіксуємо елемент $x_0 \in X_\partial$. Тоді для довільного відображення $I: X_\partial \to L^1(\Omega_T)$ введемо до розгляду множини:

$$L^{\sigma\times\tau}\,(I,x_0) := \bigcup_{\{x_k\}_{k=1}^\infty \in\ \mathfrak{M}_\sigma(x_0)} L^\tau\left\{\hat{I}(x_k)\right\}, \tag{4.3}$$

$$L^{\sigma\times\tau}_{max}\,(I,x_0) := L^{\sigma\times\tau}\,(I,x_0) \cap Sup^{\Lambda,\,\tau}_{x\in X_\partial} I(x), \tag{4.4}$$

де $\mathfrak{M}_\sigma(x_0)$ — це множина всіх послідовностей $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ таких, що $x_k \to x_0$ відносно σ-топології простору X.

Означення 4.4. Будемо казати, шо множина $A \subset L^1(\Omega_T) \cup \{\pm\infty_\Lambda\}$ є Λ-нижньою секвенційною границею відображення $I: X_\partial \to L^1(\Omega_T)$ у точці $x_0 \in X_\partial$ відносно топології добутку $\sigma \times \tau$ простору $X \times L^1(\Omega_T)$ і використовувати позначення $A = \limsup^{\Lambda,\,\tau}_{x \xrightarrow{\sigma} x_0} I(x)$, якщо

$$\limsup^{\Lambda,\,\tau}_{x \xrightarrow{\sigma} x_0} I(x) := \begin{cases} L^{\sigma\times\tau}_{max}\,(I,\ x_0)\,, & L^{\sigma\times\tau}_{max}\,(I,x_0) \neq \emptyset, \\ Sup^{\,\Lambda,\,\tau} L^{\sigma\times\tau}(I,x_0), & L^{\sigma\times\tau}_{max}\,(I,x_0) = \emptyset. \end{cases} \tag{4.5}$$

Означення 4.5. Будемо казати, що відображення $f: X_\partial \to Y$ є $(\Lambda, \sigma\times\tau)$-напівнеперервним зверху ($(\Lambda,\sigma\times\tau)$-нн. зв.) у точці $x_0 \in X_\partial$, якщо

$$f(x_0) \in \limsup^{\Lambda,\,\tau}_{x \xrightarrow{\sigma} x_0} \hat{f}(x).$$

Відображення f є $(\Lambda,\sigma\times\tau)$-нн. зв., якщо f є $(\Lambda,\sigma\times\tau)$-нн. зв. у кожній точці множини X_∂.

Повертаючись до задачі оптимального керування, введемо наступну умову:

(B2) Нехай функціонал $J: \mathbb{U}\times\mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{R}$ у задачі (3.1) має вигляд

$$J(u,\rho) = \int_0^T \int_\Omega F(u,\rho)\,dxdt, \tag{4.6}$$

де відображення $F: \mathbb{U}\times\mathbb{Y} \longrightarrow L^1(\Omega_T)$ є $(\Lambda,\sigma\times\tau)$-нн. зв. на $\mathbb{U}\times\mathbb{Y}$ у сенсі означення 4.5. У подальшому, через σ будемо позначати сильну топологію на $L^1(\Omega)\times L^1(\Omega_T)$.

Крім того, зауважимо, що твердження

$$|l(y)| + l(y) = 0 \text{ майже скрізь на } \Omega_T \text{ та } \rho \in \mathcal{R}_{ad}$$

є повністю еквівалентними на множині $\rho \in C([0,T]; L^1(\Omega))$. У той же час, у загальному випадку, $|l(y)| + l(y) \geq 0$ майже скрізь на $\Omega_T = \Omega_{1,T} \times \ldots \times \Omega_{N,T}$. Це означає, що

$$|l(y)| + l(y) \in \Lambda = \left\{ f \in L^1(\Omega_T) : f(x) \geq 0 \text{ майже скрізь на } \Omega \right\}.$$

Беручи це до уваги, введемо до розгляду таку сукупність задач векторної оптимізації:

$$\begin{aligned} &\text{Реалізувати } Sup^{\Lambda,\tau}_{(u,\rho)\in\overline{\Xi}} \ \mathcal{F}_\varepsilon(u,\rho) = \\ &= Sup^{\Lambda,\tau}_{(u,\rho)\in\overline{\Xi}} \left[F(u,\rho) + \varepsilon^{-1} \left(|l(y)| + l(y) \right) \right], \end{aligned} \tag{4.7}$$

де множина допустимих розв'язків $\overline{\Xi}$ означена так: $(u,\rho) \in \overline{\Xi}$ тоді і тільки тоді, якщо

$$\begin{cases} u = (u^0, u^1) \in \mathcal{U}_{ad}, \\ \rho \in C([0,T]; L^1(\Omega)) \times L^\infty(\Omega_T) \times L^\infty([0,T]; BV(\Omega)), \end{cases} \tag{4.8}$$

$$\begin{cases} \rho = \rho(u) \text{ є ентропійним розв'язком задачі (3.2)–(3.5)} \\ \text{у сенсі означення (3.1) і задовольняє умови (3.6)–(3.7).} \end{cases} \tag{4.9}$$

Зауваження 4.2. *Очевидно, що $\Xi \subset \overline{\Xi}$ для будь-якого $\varepsilon > 0$ та $\overline{\Xi} \neq \emptyset$ за теоремою 3.1. Більше того, виходячи з аргументів доведення теореми 3.2, отримуємо таку відмінну властивість множини $\overline{\Xi}$: ця множина є секвенційно компактною відносно ω-збіжності, де під ω-збіжністю розуміємо таке: послідовність пар $\{(u_k, \rho_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \overline{\Xi}$ є ω-збіжною до пари*

$$(u,\rho) \in [L^1(\Omega) \times L^1(\Omega_T)] \times C([0,T]; L^1(\Omega)),$$

якщо $u_k^0 \to u^0$ в $L^1(\Omega)$, $u_k^1 \to u^1$ в $L^1(\Omega_T)$ та $\rho_k \to \rho$ в $C([0,T]; L^1(\Omega))$.

Означення 4.6. Будемо казати, що пара $(u_\varepsilon^{eff}, \rho_\varepsilon^{eff}) \in \overline{\Xi}$ є (Λ,τ)-ефективним розв'язком задачі векторної оптимізації (4.7), якщо $(u_\varepsilon^{eff}, \rho_\varepsilon^{eff})$ реалізує (Λ,τ)-супремум відображення $\mathcal{F}_\varepsilon : \overline{\Xi} \to L^1(\Omega_T)$, тобто

$$\mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon^{eff}, \rho_\varepsilon^{eff}) \in Sup^{\Lambda,\tau}_{(u,\rho)\in\overline{\Xi}} \mathcal{F}_\varepsilon(u,\rho) = Sup^{\Lambda,\tau} \left\{ \mathcal{F}_\varepsilon(u,\rho) : \forall (u,\rho) \in \overline{\Xi} \right\}.$$

Позначимо через

$$Eff(\overline{\Xi}; \mathcal{F}_\varepsilon; \tau; \Lambda) = \left\{ (u_\varepsilon^{eff}, \rho_\varepsilon^{eff}) \in \overline{\Xi} : \mathcal{F}_\varepsilon(u_\varepsilon^{eff}, \rho_\varepsilon^{eff}) \in Sup^{\Lambda,\tau}_{(u,\rho)\in\overline{\Xi}} \mathcal{F}_\varepsilon(u,\rho) \right\} \tag{4.10}$$

множину всіх (Λ,τ)-ефективних розв'язків задачі (4.7).

Беручи до уваги той факт, що множина $\overline{\Xi} \subset \mathcal{U}_{ad} \times \mathbb{Y}$ є секвенційно ω-компактною і тому обмеженою, будемо припускати таке:

(B3) Існує пара функцій $\varphi, \psi \in L^1(\Omega_T)$ така, що для всіх $(u, \rho) \in \overline{\Xi}$, для довільної множини $Q \subseteq \Omega$ справджується нерівність

$$\int_Q |\psi| dz \leq \|F(u(\cdot,\cdot), y(\cdot,\cdot))\|_{L^1(Q)} \leq \int_\Omega |\varphi| dz. \tag{4.11}$$

Тоді має місце теорема.

Теорема 4.1. *Припустимо, що гіпотези (B1)-(B3) виконуються та* $F : \overline{\Xi} \to L^1(\Omega_T)$ *є* $(\Lambda, \omega \times \tau)$*-напівнеперервним зверху відображенням. Тоді задача векторної оптимізації (4.7)-(4.9) має непорожню підмножину* (Λ, τ)*-ефективних розв'язків для кожного* $\varepsilon > 0$.

Доведення. Для початку зауважимо, що з гіпотези (B3) випливає обмеженість послідовності $\{F(u_k, \rho_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ в $L^1(\Omega_T)$ та її екві - інтегрованість для будь-якої послідовності прообразів $\{(u_k, \rho_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \overline{\Xi}$. Тому послідовність $\{F(u_k, \rho_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ є відносно слабко компактною у просторі $L^1(\Omega_T)$. Для того, щоб застосувати теорему 3.5 з [11], потрібно показати, що відображення $\mathcal{F}_\varepsilon : \overline{\Xi} \to L^1(\Omega_T)$ є $(\Lambda, \omega \times \tau)$-напівнеперервним зверху. Для цього зауважимо, що відображення $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ є неперервним. Тому для будь-якої ω-збіжної послідовності $(u_k, \rho_k) \xrightarrow{\omega} (u, \rho)$ в $\mathbb{U} \times \mathbb{Y}$ маємо:

$$\begin{aligned} \||l(\rho_k)| + l(\rho_k) - |l(\rho)| - l(\rho)\|_{L^1(\Omega_T)} &\leq \\ \leq \||l(\rho_k)| - |l(\rho)|\|_{L^1(\Omega_T)} &+ \|l(\rho_k) - l(\rho)\|_{L^1(\Omega_T)} \\ \leq 2\|l(\rho_k) - l(\rho)\|_{L^1(\Omega_T)} &= \int_0^T \int_\Omega |l(\rho_k) - l(\rho)| dx dt \\ &\leq \|l(\rho_k) - l(\rho)\|_{C([0,T];L^1(\Omega))} T \to 0 \text{ при } k \to \infty. \end{aligned}$$

Таким чином, $|l| + l : \mathbb{U} \times \mathbb{Y} \to L^1(\Omega_T)$ є неперервним як відображення з $\mathbb{U} \times \mathbb{Y}$ з топологією, породженою ω-збіжністю, у простір Банаха $L^1(\Omega_T)$, наділений сильною топологією. Оскільки

$$\mathcal{F}_\varepsilon(u, \rho) = F(u, \rho) + \varepsilon^{-1} \left(|l(\rho)| + l(\rho) \right), \quad \forall (u, \rho) \in \overline{\Xi}$$

та $F : \overline{\Xi} \to L^1(\Omega_T)$ є $(\Lambda, \omega \times \tau)$-напівнеперервним зверху відображенням, то отримуємо потрібну властивість. □

Бібліографічні посилання

1. *Bardos C.* First-order quasilinear equations with boundary conditions / C. Bardos, A. Y. Leroux, J. C. Nedeles //Communications in Partial Differential Equations. — 4(1979). — P.1017–1034.
2. *Coclite G. M.* Traffic Flows on a Road Network / G. M. Coclite, B. Piccoli // SISSA, Preprint. — 2002. — 26 p.
3. *Coclite G. M.* Traffic Flow on Networks / G. M. Coclite, M. Garavello, B. Piccoli // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 2005. — № 36. — P. 1862–1886.

4. *Garavello M.* Traffic Flow on Networks / M. Garavello, B. Piccoli // AIMS Series on Appl. Math. — 2006. — Vol. 1. — P. 243.
5. *Giusti E.* Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation / E. Giusti. — Boston: Birkhäuser, 1984.
6. *Gugat M.* Optimal Control for Traffic Flow Networks / M. Gugat, M. Herty, A. Klar, G. Leugering // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2005. — № 126. — P. 589–616.
7. *Holden H.* A mathematical model of traffic flow on a network of undirectional roads / H. Holden, N. H. Riserbo // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 1995. — № 26. — P. 999–1017.
8. *Jahn J.* Vector Optimization. Theory, Applications and Extensions // J. Jahn. — Berlin: Springer, 2004. — 470 p.
9. *Кружков С. Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными / С. Н. Кружков // Математический сборник. — 1970. — Т. 81(123), № 2. — С. 228–255.
10. *Кружков С. Н.* Асимптотическое поведение решений задачи Коши для нелинейных уравнений первого порядка / С. Н. Кружков, Н. С. Петросян // УМН. — 1987. — 42:5(257). — С. 3–40.
11. *Kogut P. I.* Topological aspects of scalarization in vector optimization problems / P. I. Kogut, R. Manzo, I. V. Nechay // Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2010. — № 7. — P. 25–49.
12. *Kogut P. I.* On vector-valued approximation of state constrained optimal control problems for nonlinear hyperbolic conservation laws / P. I. Kogut, R. Manzo, I. V. Nechay // *Journal of Dynamical and Control Systems*, (2012), (to appear).
13. *Lax P. D.* Hyperbolic System of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves/ P. D. Lax // Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Applied Mathematics, No. 11. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA. — 1973. — P. 1–48.
14. *Lebecque J.* First-order macroscopic traffic models for network in the context of dynamic assignment/ J. Lebecque, M. Khoshyaran //In Transportation Planning-State of the Art, M. Patriksson and K.A.P. Labbe, eds. — 2002.
15. *Lighthill M. L.* On kinetic waves/ M. L. Lighthill, J. B. Whitham // Proceedings of Royal Society of Edinburg. — 1983. — № 229(A). — P. 217–243.
16. *Ulbrich S.* Optimal Control of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws with Source Terms / S. Ulbrich // Fakultet für Mathematik. Technische Universität München. — 2001. — 271 p.

Надійшла до редколегії 07.04.2013