

УДК 517.9

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ И ХАОС

В. Е. Белозеров

*Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, 49050,
Днепропетровск. E-mail: belozvye@mail.ru*

Найдены новые условия существования гомоклинических орбит для некоторых типов систем дифференциальных уравнений с сингулярной линейной частью. Реализация этих условий для 3-D автономных квадратичных систем гарантирует существование хаотических аттракторов. Показано, что хаотическое поведение решений указанных систем определяется одномерным дискретным отображением $x_{n+1} = rx_n \cdot [\exp(px_n - x_n^2)] / (1 + \gamma x_n)$ при некоторых значениях параметров $r > 0$, $p \in \mathbb{R}$ и $\gamma \in (-d, \infty)$, где $d > 0$; $n = 0, 1, 2, \dots$ Приводятся примеры.

1. Введение

В настоящее время большинство известных результатов, посвященных хаотической динамике в автономных 3-D системах дифференциальных уравнений, основывается на предположении о существовании в этих системах гомоклинических или гетероклинических орбит и использовании теорем Шильникова (см. работы [1] – [6] и литературу, цитированную там же).

Заметим, что во всех указанных работах предполагалось, что матрица Якоби в особой точке, связывающей гомоклиническую орбиту (или матрицы Якоби в особых точках, связывающих гетероклиническую орбиту) — невырождена (невырождены). Первый результат, в котором последнее условие игнорировалось (матрица Якоби предполагалась сингулярной), был представлен в [4]. Однако никаких условий, гарантирующих существование гомоклинической орбиты, в [4] приведено не было (ее наличие просто постулировалось).

В настоящей работе для достаточно общих квадратичных систем с сингулярной линейной частью приведены конструктивные условия существования гомоклинических орбит. Кроме того, выявлена связь этих условий с проблемой существования одномерных дискретных отображений, генерирующих хаотическое поведение решений, в указанных системах дифференциальных уравнений.

Далее показано, что структура упомянутых выше одномерных дискретных отображений однозначно определяется структурой решения $x(t)$ классического дифференциального уравнения Бернулли

$$\dot{x}(t) + p(t)x(t) = q(t)x^\alpha(t),$$

3) исходная система (1.1) и возмущенная система $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ имеют один и тот же тип хаоса, порожденного подковами Смейла.

Устойчивое и неустойчивое многообразия $\mathbb{W}^s(\mathbf{e}_0)$ и $\mathbb{W}^u(\mathbf{e}_0)$ [7] для некоторого положения равновесия \mathbf{e}_0 системы (1.1) могут быть определены как:

$$\mathbb{W}^s(\mathbf{e}_0) := \{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{e}_0\},$$

$$\mathbb{W}^u(\mathbf{e}_0) := \{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{e}_0\}.$$

Теорема об устойчивом и неустойчивом многообразиях [7] утверждает, что локально неустойчивое многообразие $\mathbb{W}_{loc}^u(\mathbf{e}_0)$ существует в некоторой окрестности точки \mathbf{e}_0 . Кроме того, $\mathbb{W}_{loc}^u(\mathbf{e}_0)$ является гладким многообразием, касающимся неустойчивого инвариантного подпространства $\mathbb{E}^u(\mathbf{e}_0)$ матрицы $D(\mathbf{e}_0)$ в точке \mathbf{e}_0 ($D \cdot \mathbb{E}^u \subset \mathbb{E}^u$). Это означает, что мы можем определить глобальное неустойчивое многообразие следующим образом:

$$\mathbb{W}^u(\mathbf{e}_0) := \bigcup_{t>0} \phi^t(\mathbb{W}_{loc}^u(\mathbf{e}_0)),$$

где ϕ^t обозначает поток системы (1.1).

Известно [7], что $\mathbb{W}^u(\mathbf{e}_0)$ является l -мерным многообразием (l – количество собственных чисел матрицы $D(\mathbf{e}_0)$ с положительной действительной частью), определенным как глобализация $\mathbb{W}_{loc}^u(\mathbf{e}_0)$ под действием потока ϕ^t . Заметим, что локально устойчивое многообразие $\mathbb{W}_{loc}^s(\mathbf{e}_0)$ и устойчивое многообразие $\mathbb{W}^s(\mathbf{e}_0)$ определяются подобным образом после операции замены знака времени $t \rightarrow -t$, а именно:

$$\mathbb{W}^s(\mathbf{e}_0) := \bigcup_{t<0} \phi^t(\mathbb{W}_{loc}^s(\mathbf{e}_0)).$$

Будем считать, что $\mathbf{e}_0 = 0$. Обозначим через $\mathbb{T}_s, \mathbb{T}_u$ и \mathbb{T}_c инвариантные относительно оператора \mathbf{A} подпространства в \mathbb{R}^n такие, что спектр ограничения $\mathbf{A}|_{\mathbb{T}_s}$ состоит из собственных чисел с отрицательными вещественными частями, ограничения $\mathbf{A}|_{\mathbb{T}_u}$ – из собственных чисел с положительными вещественными частями и ограничения $\mathbf{A}|_{\mathbb{T}_c}$ – из нулевых и чисто мнимых собственных чисел. (Оператор \mathbf{A} для системы (1.1) задается матрицей A .)

Теорема 1.2. (Адамара – Перрона [7].) Пусть $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ есть C^r -гладкое векторное поле с гиперболической особой точкой 0 и линейной частью $A\mathbf{x}$ в нуле. Тогда система (1.1) имеет два C^r -гладких инвариантных относительно потока ϕ^t многообразия $\mathbb{W}^s(0)$ и $\mathbb{W}^u(0)$, проходящих через 0 и касающихся в нуле пространств \mathbb{T}_s и \mathbb{T}_u соответственно. Решения с начальными условиями на $\mathbb{W}_s(0)(\mathbb{W}_u(0))$ экспоненциально стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty(t \rightarrow -\infty)$.

Если же $\mathbb{T}_c \neq 0$, то существует еще третье C^{r-1} -гладкое инвариантное многообразие $\mathbb{W}^c(0)$, проходящее через 0 и касающееся в нуле подпространства \mathbb{T}_c .

Рассмотрим однородную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \mathbf{x}^T(t)B_1\mathbf{x}(t), \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = \mathbf{x}^T(t)B_n\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

с вектором начальных данных $\mathbf{x}^T(0)$.

Введем в систему (1.2) переменную $\mathbf{y}(t)$ по формуле $\mathbf{x}(t) = S\mathbf{y}(t)$, где $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – обратимая матрица. Тогда получим:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} (S\mathbf{y}(t))^T B_1(S\mathbf{y}(t)) \\ \vdots \\ (S\mathbf{y}(t))^T B_n(S\mathbf{y}(t)) \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Таким образом, вектор начальных данных принимает вид: $\mathbf{y}(0) = S^{-1}\mathbf{x}(0)$.

Пусть $n = 3$. Предположим, что найдется обратимая матрица S такая, что в переменных y_1, \dots, y_n система (1.3) принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = a_{11}y_1^2 + 2a_{12}y_1y_2 + a_{22}y_2^2 + 2a_{13}y_1y_3 + 2a_{23}y_2y_3 + a_{33}y_3^2, \\ \dot{y}_2(t) = 2b_{12}y_1y_2 + b_{22}y_2^2 + 2b_{13}y_1y_3 + 2b_{23}y_2y_3 + b_{33}y_3^2, \\ \dot{y}_3(t) = 2c_{13}y_1y_3 + 2c_{23}y_2y_3 + c_{33}y_3^2. \end{cases} \quad (1.4)$$

В дальнейшем такой вид системы (1.3) будет называться треугольным [1]; система же (1.1), у которой квадратичная часть имеет вид (1.4), будет называться системой с треугольной квадратичной частью.

2. Условия существования инвариантных множеств в системе (1.1) с треугольной квадратичной частью

Пусть $n = 3$. Положим для простоты, что $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$. Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = D \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 \\ 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + b_{33}z^2 \\ 2c_{13}xz + 2c_{23}yz + c_{33}z^2 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где $\lambda_1 = \mu, \lambda_{2,3} = \rho \pm i\omega, i = \sqrt{-1}$ – собственные числа матрицы D и $\rho \cdot \omega \neq 0, \mu \cdot \rho \leq 0$ (мы полагаем для определенности $\mu \leq 0$ и $\rho > 0$).

Введем квадратичные формы:

$$f(x, y) = b_{12}(a_{11} - 2b_{12})x^2 + b_{12}(2a_{12} - b_{22})xy + b_{12}a_{22}y^2$$

и

$$g(x, y, z) = c_{13}(a_{11} - 2c_{13})x^2 + 2(c_{13}a_{12} + c_{23}b_{12} - 2c_{13}c_{23})xy$$

$$\begin{aligned}
& +(c_{13}a_{22} + c_{23}b_{22} - 2c_{23}^2)y^2 + (2c_{13}a_{13} + 2c_{23}b_{13} - c_{13}c_{33})xz \\
& +(2c_{13}a_{23} + 2c_{23}b_{23} - c_{23}c_{33})yz + (c_{13}a_{33} + c_{23}b_{33})z^2 \equiv \\
& g_1x^2 + 2g_2xy + 2g_3xz + g_4y^2 + 2g_5yz + g_6z^2.
\end{aligned}$$

Теорема 2.1. *Предположим, что для системы (2.1) выполнены следующие условия:*

(a1) *квадратичные формы $f(x, y)$ и $g(x, y, z)$ отрицательно определены;*

(a2) $a_{11}(a_{11} - 2b_{12}) < 0$;

(a3) *вектор $(\alpha, 0, 0)^T, \alpha \neq 0$, не является собственным вектором матрицы D .*

Тогда в (2.1) существует либо предельный цикл, либо предельный тор, либо имеет место сложная нерегулярная (хаотическая) динамика.

Доказательство. Заметим, что условия (a1) – (a3) теоремы 2.1, гарантирующие ограниченность решений системы (2.1), есть не что иное как условия теоремы 3 [1], приспособленные для случая $n = 3$. Из условий (a1), (a2) теоремы 2.1 вытекает также, что в системе (2.1) при $D = 0$ существует единственный глобальный аттрактор — точка 0. К этой точке притягиваются все решения системы, если их начальные условия не принадлежат вектору $(\alpha, 0, 0)^T$.

1. С помощью подходящих невырожденных линейных преобразований приведем систему (2.1) к форме

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где для простоты мы оставили старые обозначения новых переменных x, y, z ; $f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)$ — квадратичные формы.

2. Вычислим в соответствии с известной формулой [7] показатель Ляпунова Λ для действительной функции $f(t)$:

$$\Lambda[f] = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{f(t)}{f(t_0)} \right|. \quad (2.3)$$

Тогда в силу ограниченности решений $x(t), y(t), z(t)$ системы (2.2) для любых x_0, y_0 и z_0 , будем иметь $\Lambda[x(t)] \leq 0$, $\Lambda[y(t)] \leq 0$ и $\Lambda[z(t)] \leq 0$.

Воспользуемся следующими свойствами показателей Ляпунова:

(c1) если функция $f_1(t)$ имеет строгий показатель Ляпунова $\Lambda[f_1(t)]$, то $\Lambda[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \Lambda[f_1(t)] + \Lambda[f_2(t)]$;

(c2) если $m \geq 0$, то $\Lambda[t^m] = 0$;

(c3) если $\Lambda[f(t)] < 0$, то $\Lambda[\int_t^\infty f(\tau) d\tau] \leq \Lambda[f(t)]$;

(c4) $\Lambda[f_1(t) + f_2(t)] \leq \max(\Lambda[f_1(t)], \Lambda[f_2(t)])$;

(c5) $\Lambda[d \cdot f(t)] = \Lambda[f(t)] (d \neq 0)$.

Перепишем последнее уравнение системы (2.2) в интегральной форме:

$$z(t) = z_0 \exp(\mu t) + \int_0^t \exp(\mu(t-\tau)) \cdot f_3(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) d\tau \equiv \\ \equiv z_1(t) + z_2(t), (t > \tau), \quad (2.4)$$

где $z_1(t) = z_0 \exp(\mu t)$, $z_2(t) = z(t) - z_1(t)$. Тогда из свойств (с1) – (с5) и ограниченности решений $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ следует, что если $\mu = 0$, то $\Lambda[z(t)] = 0$.

Пусть $\mu < 0$. Тогда из (с5) следует, что $\Lambda[z_1(t)] = \mu$. Из (с1) и (с3) имеем $\Lambda[\exp(\mu(t-\tau)) \cdot f_3(x(\tau), y(\tau), z(\tau))] = \Lambda[\exp \mu t] + \Lambda[f_3(x(\tau), y(\tau), z(\tau))] = \mu + 0 = \mu$ и, потому, $\Lambda[z_2(t)] \leq \mu + \delta$, где $\delta \leq 0$. Таким образом, из (с4) получаем $\Lambda[z(t)] = \Lambda[z_1(t) + z_2(t)] = \max(\mu, \mu + \delta) = \mu < 0$.

В условиях теоремы (2.1) для любых собственных чисел матрицы Якоби и при любых положениях равновесия показатели Ляпунова системы (2.1) определяются (с точностью до перестановок) четырьмя следующими возможностями: $(0, 0, 0)$; $(-, 0, 0)$; $(-, -, 0)$; $(-, -, -)$.

Орбиты, для которых показатели Ляпунова $(\Lambda[x(t)], \Lambda[y(t)], \Lambda[z(t)])$ принимают один из наборов $(-, -, 0)$, $(-, 0, -)$ от $(0, -, -)$, будут предельными циклами. Траектории, для которых показатели $(\Lambda[x(t)], \Lambda[y(t)], \Lambda[z(t)])$ принимают один из наборов $(-, 0, 0)$, $(0, -, 0)$ или $(0, 0, -)$, являются предельными торами. Если $(\Lambda[x(t)], \Lambda[y(t)], \Lambda[z(t)]) = (0, 0, 0)$, то в системе (2.1) может возникнуть сложная нерегулярная (хаотическая) динамика. \square

Теорема 2.2. *Предположим, что для системы (2.1) все условия теоремы 2.1 выполнены. Мы также будем предполагать, что все ненулевые положения равновесия этой системы являются или седло-узлами или седло-фокусами (включая и сингулярные положения равновесия). Тогда в системе (2.1) существуют или предельные циклы, или гомоклинические или гетероклинические орбиты.*

Доказательство. 1. Пусть $\mathbb{W}_u(0)$ будет 2-мерным неустойчивым, а $\mathbb{W}_c(0)$ – 1-мерным центральным многообразием точки $O(0, 0, 0)$ (если $\mu \neq 0$, то многообразие $\mathbb{W}_c(0)$ должно быть заменено 1-мерным устойчивым многообразием $\mathbb{W}_s(0)$). Тогда, в силу ограниченности решений системы (2.1), часть траекторий $\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{W}_u(0)$ ($\mathbb{W}_u(0) - \mathbb{S}_1 = \mathbb{S}_2 \neq \emptyset$) может быть притянута некоторыми положениями равновесия системы (2.1) либо устойчивым предельным циклом; среди этих положений равновесия может оказаться и точка $(0, 0, 0)$. Это означает существование гомоклинических или гетероклинических орбит (либо в системе имеется предельный цикл).

2. Предположим, что любая траектория множества $\mathbb{S}_2 \subset \mathbb{W}_u(0)$ такая, что $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2 = \emptyset$, не притягивается любым ненулевым положением равновесия. Тогда, в силу ограниченности решений системы (2.1), траектории множества $\mathbb{S}_2 \subset \mathbb{W}_u(0)$ должны притягиваться некоторым устойчивым предельным циклом или тором L .

3. Пусть $\mu = 0$. Известно, что в достаточно малой окрестности начала координат решения системы (2.1) имеют вид: $x(t) = \exp(\rho t)(x_0 \cos(\omega t) - y_0 \sin(\omega t))$, $y(t) = \exp(\rho t)(x_0 \sin(\omega t) + y_0 \cos(\omega t))$, $z(t) = z_0/(1 - c_{33}z_0 t)$. Предположим, что $c_{33}z_0 < 0$. Тогда центральное многообразие $\mathbb{W}_c(0)$ вблизи точки O топологически эквивалентно устойчивому многообразию. Теперь изменим знак времени на противоположный. Тогда аттрактор L становится неустойчивым, однако траектория $\mathbb{W}_c(0)$ должна быть притянута этим аттрактором. Получаем противоречие. Следовательно, $\mathbb{W}_u(0) \cap \mathbb{W}_c(0) \neq \emptyset$ и траектория $\mathbb{W}_c(0)$ притягивается точкой O . Таким образом, в системе (2.1) существует гомоклиническая орбита, связанная точкой O .

4. Пусть $\mu \neq 0$. Тогда решение $z(t) = z_0/(1 - c_{33}z_0 t)$ должно быть заменено решением $z(t) = z_0 \exp(\mu t)$. Теперь необходимо повторить все рассуждения пункта 3. \square

3. Существование хаотической динамики в системе (2.1)

Предположим, что в системе (2.1) матрица D имеет форму:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Обозначим через $\rho \mp i\omega$, d_{33} спектр матрицы D . Мы будем считать, что $\rho > 0, \omega > 0, d_{33} \leq 0$. Пусть x_0, y_0 и z_0 – начальные условия для системы (2.1). Кроме того, предположим, что $x_0 = y_0 = 0$ и $z_0 \neq 0$. Преобразуем выражение $c_{13}x(t) + c_{23}y(t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} c_{13}x(t) + c_{23}y(t) &= z(t) \left[c_{13} \frac{x(t)}{z(t)} + c_{23} \frac{y(t)}{z(t)} \right] = z(t) \int_{t_0}^t \left[c_{13} \left(\frac{\dot{x}(\tau)}{z(\tau)} \right) + c_{23} \left(\frac{\dot{y}(\tau)}{z(\tau)} \right) \right] d\tau \\ &= z(t) \int_{t_0}^t \left[\frac{h(x(\tau), y(\tau), z(\tau))}{z^2(\tau)} \right] d\tau + z(t) \int_{t_0}^t z(\tau) \left[\frac{g(x(\tau), y(\tau), z(\tau))}{z^2(\tau)} \right] d\tau, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} h(x, y, z) &= 2[(d_{11} - d_{33})c_{13} + d_{21}c_{23}]xz + 2[d_{12}c_{13} + (d_{22} - d_{33})c_{23}]yz \\ &\quad + 2[d_{13}c_{13} + d_{23}c_{23}]z^2 \equiv 2h_1xz + 2h_2xy + h_3z^2 \end{aligned}$$

и $g(x, y, z)$ введенная выше отрицательно определенная квадратичная форма переменных x, y, z .

Так как $\forall t > 0$, имеем $z(t) \neq 0$, то можно ввести обозначения

$$\delta(t) = \int_{t_0}^t \left[\frac{h(x(\tau), y(\tau), z(\tau))}{z^2(\tau)} \right] d\tau, \quad \nu(t) = \int_{t_0}^t \left[\frac{g(x(\tau), y(\tau), z(\tau))}{z^2(\tau)} \right] d\tau.$$

Симметрические матрицы H и $z \cdot G$ форм $h(x, y, z)$ и $zg(x, y, z)$ имеют вид:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & h_1 \\ 0 & 0 & h_2 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix}, \quad z \cdot G = z \cdot \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ g_2 & g_4 & g_5 \\ g_3 & g_5 & g_6 \end{pmatrix}.$$

Пусть $z > 0$. Запишем условия отрицательной определенности матрицы $H + z \cdot G$ [8]. Легко проверить, что, в силу структуры матрицы H , первые два условия ($g_1 < 0$, $g_1g_4 - g_2^2 > 0$) совпадают с первыми двумя условиями отрицательной определенности матрицы G . Третье условие имеет форму:

$$\begin{aligned} \det(H + z \cdot G) &= z[(\det G)z^2 + v_1z + v_2] \equiv z[(\det G)z^2 \\ &+ (g_1g_4h_3 - 2g_1g_5h_2 + 2g_2g_5h_1 - g_2^2h_3 + 2g_2g_3h_2 - 2g_3g_4h_1)z \\ &+ (-g_4h_1^2 + 2g_2h_1h_2 - g_1h_2^2)] < 0. \end{aligned}$$

Из отрицательной определенности матрицы G получаем $\det G < 0$. Поэтому для того, чтобы условие $\det(H + z \cdot G) < 0$ было выполнено, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант $Disc \equiv v_1^2 - 4v_2 \det G$ квадратичного полинома $(\det G)z^2 + v_1z + v_2$ был отрицательным.

Функция $c_{13}x(t) + c_{23}y(t)$ не зависит явно от $z(t)$. Поэтому если $z \leq 0$, то условие $Disc < 0$ снова является необходимым и достаточным для того, чтобы $(\det G)z^2 + v_1z + v_2 < 0$.

Теорема 2.2 не дает ответа на вопрос о том, какие конкретно орбиты (гомоклинические или гетероклинические) присутствуют в пространстве решений системы (2.1)? Следующая теорема закрывает этот вопрос.

Теорема 3.1. *Предположим, что для системы (2.1) все условия теоремы 2.2 выполнены. Также предположим, что матрица D имеет форму (3.1). Символами (x_i^*, y_i^*, z_i^*) обозначим все положения равновесия системы (2.1), для которых $z_i^* = 0$; $i = 1, \dots, m$. Пусть собственные числа матрицы Якоби системы (2.1) в точке $(x_i^*, y_i^*, 0)$ равны $a_i \pm b_i\sqrt{-1}$, c_i , где $a_i \neq 0$, $a_i c_i \leq 0$. Тогда если $g_1 < 0$, $g_1g_4 - g_2^2 > 0$, $\det G < 0$, $Disc < 0$, то при подходящем $d_{33} \forall i \in \{1, \dots, m\}$ существует гомоклиническая орбита, связанная точкой $(x_i^*, y_i^*, 0)$ и целиком расположенная или в верхней $z \geq 0$ или в нижней $z \leq 0$ полуплоскости.*

Доказательство. Найдем решение $z(t)$ третьего уравнения системы (2.1) с матрицей D (3.1) (это уравнение является уравнением Бернулли):

$$\dot{z}(t) = c_{33}z^2(t) + [c_{13}x(t) + c_{23}y(t) + d_{33}]z(t). \quad (3.3)$$

Упомянутое решение имеет форму

$$z(t) = \frac{z_0 \exp(q(t))}{1 - c_{33}z_0 \int_{t_0}^t \exp(q(\tau)) d\tau}, \quad (3.4)$$

где $q(t) = \int_{t_0}^t [c_{13}x(\tau) + c_{23}y(\tau) + d_{33}]d\tau$ и $\forall t > 0 \int_{t_0}^t \exp(q(\tau))d\tau > 0$.

Из (3.4) следует, что существование гомоклинической орбиты может быть гарантировано условием $\lim_{t \rightarrow \infty} c_{13}x(t) + c_{23}y(t) \leq 0$. Для того чтобы это условие было реализовано, достаточно, чтобы $\det(H + z \cdot G) < 0$. Последнее неравенство может быть сведено к очевидному равенству:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \det(H + z \cdot G) = \lim_{z \rightarrow \infty} z[(\det G)z^2 + v_1z + v_2] = -\infty.$$

Так как $d_{33} \leq 0$, то из (3.2) и (3.4) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\int_{t_0}^t [c_{13}x(\tau) + c_{23}y(\tau)d\tau] + d_{33}(t - t_0) \right] = -\infty$$

и потому для $d_{33} < 0$ имеем $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$.

Пусть $\mathbb{W}^s(x_i^*, y_i^*, 0)$ ($\mathbb{W}^u(x_i^*, y_i^*, 0)$) будет устойчивым (неустойчивым) многообразием точки $(x_i^*, y_i^*, 0)$; $i = 1, \dots, m$. Предположим, что начальные значения $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{W}^u(x_i^*, y_i^*, 0)$.

Выше был получен следующий результат: $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t), z(t)) = (x_i^*, y_i^*, 0)$.

Теперь выполним замену $t \rightarrow -t$. В этом случае имеем:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} q(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\int_{t_0}^t [c_{13}x(\tau) + c_{23}y(\tau)d\tau] + d_{33}(-t + t_0) \right],$$

где $-d_{33}t > 0$. Так как выражение под знаком интеграла неположительно, то выбором d_{33} всегда можно добиться того, что $\lim_{t \rightarrow -\infty} q(t) < 0$.

В соответствии с теоремой 2.1 все решения системы (2.1) останутся ограниченными. В таком случае имеем предельное равенство:

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \exp(q(\tau))d\tau = \infty.$$

Тогда из (3.4) следует, что $\lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t), y(t), z(t)) = (x_i^*, y_i^*, 0)$. Поэтому существует точка $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{W}^s(x_i^*, y_i^*, 0)$. Это означает существование гомоклинической орбиты, связанной точкой $(x_i^*, y_i^*, 0)$; $i = 1, \dots, m$.

Пусть $d_{33} = 0$. Тогда для доказательства существования гомоклинической орбиты можно применить пункт 3 теоремы 2.2. В этом случае вблизи положения равновесия $(x_i^*, y_i^*, 0)$ многообразие $\mathbb{W}^s(x_i^*, y_i^*, 0)$ (или $\mathbb{W}^u(x_i^*, y_i^*, 0)$) должно быть заменено центральным многообразием $\mathbb{W}^c(x_i^*, y_i^*, 0)$, $i \in \{1, \dots, m\}$.

Локализация гомоклинической орбиты определяется формой уравнения (3.3) и леммой 1 [1]. \square

Теорема 1.1 обеспечивает существование хаотической динамики в системе (1.1) при $n = 3$. Тогда теорема 3.1 совместно с теоремой 1.1 позволяет сконструировать дискретное отображение, порождающее хаотическую динамику в системе (2.1).

В условиях теоремы 3.1 система (2.1) должна иметь гомоклиническую орбиту.

Введем сечение Пуанкаре P , заданное уравнением $c_{13}x + c_{23}y = 0$. Обозначим через t_0 начальный момент времени такой, что $c_{13}x(t_0) + c_{23}y(t_0) = 0$ ($(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \in P$). Пусть $t_1 = t_0 + T_0$ будет следующим моментом прохождения траектории $(x(t), y(t), z(t))$ через плоскость P . Тогда из (3.4) следует, что

$$z(t_0 + T_0) = \frac{z(t_0) \exp(q(t_0 + T_0))}{1 - c_{33}z(t_0) \int_{t_0}^{t_0+T_0} \exp(q(\tau)) d\tau}. \quad (3.5)$$

В [1] показано, что функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ и $x(t)/z(t)$, $y(t)/z(t)$ ограничены. Поэтому, в силу того, что $\forall t > 0 z(t) \neq 0$, мы можем определить константы

$$\delta_0 = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \left[\frac{h(x(\tau), y(\tau), z(\tau))}{z^2(\tau)} \right] d\tau, \quad \nu_0 = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \left[\frac{g(x(\tau), y(\tau), z(\tau))}{z^2(\tau)} \right] d\tau < 0.$$

Тогда, принимая во внимание известную теорему о среднем значении определенного интеграла, из (3.2) получаем:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T_0} (c_{13}x(\tau) + c_{23}y(\tau)) d\tau &= \int_{t_0}^{t_0+T_0} (\delta(\tau)z(\tau) + \nu(\tau)z(\tau)z(\xi)) \cdot d\tau = \\ &= ((\delta(\omega)z(\omega) + \nu(\omega)z(\omega)z(\xi)) \cdot T_0, \end{aligned}$$

где $\xi \in (t_0, t_0 + T_0)$, $\omega \in (t_0, t_0 + T_0)$.

Будем предполагать, что в теореме 3.1 $b_i \neq 0$; $i = 1, \dots, m$. Тогда функции $x(t)$ и $y(t)$ будут осциллирующими в окрестности любого положения равновесия $(x_i^*, y_i^*, 0)$; $i = 1, \dots, m$. Поэтому функция $c_{13}x(t) + c_{23}y(t)$ (и, значит, и функция $z(t)$) будет также осциллирующей. Следовательно, можно ввести обозначения: $t_1 = t_0 + T_0, \dots, t_k = t_{k-1} + T_{k-1}$ (t_k – последовательные моменты прохождения траекторией сечения Пуанкаре P) и

$$\begin{aligned} \delta_k &= \int_{t_k}^{t_k+T_k} \left[\frac{h(x(\tau), y(\tau), z(\tau))}{z^2(\tau)} \right] d\tau, \\ \nu_k &= \int_{t_k}^{t_k+T_k} \left[\frac{g(x(\tau), y(\tau), z(\tau))}{z^2(\tau)} \right] d\tau < 0, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Заметим, что при достаточно большом k $z_k = z(t_k) \approx z(\xi_k)$, где $\xi_k \in (t_k, t_k + T_k)$. Тогда существует окрестность положения равновесия $(x^*, y^*, 0)$, в которой выражение (3.5) может быть представлено в форме:

$$z_{k+1} = \frac{z_k \exp(d_{33}T_k + \delta_k z_k T_k + \nu_k z_k^2 T_k)}{1 - c_{33}z_k \int_0^{T_k} \exp(q(\xi)) d\xi}, \quad \nu_k < 0.$$

(Здесь знаменатель является положительной ограниченной величиной.)

Применяя вторую теорему о среднем значении определенного интеграла к знаменателю последней формулы (функция $\exp(q(\xi))$ – убывающая и положительная), получим окончательно:

$$z_{k+1} = \frac{z_k \exp(d_{33}T_k + \delta_k z_k T_k + \nu_k z_k^2 T_k)}{1 - c_{33} z_k \omega_k}, \nu_k < 0, 0 < \omega_k < T_k.$$

Положим $\sqrt{-\nu_k T_k} z_k = w_k, p_k = \delta_k T_k / \sqrt{-\nu_k T_k}$ и

$$\gamma_k = -\frac{c_{33} \omega_k}{\sqrt{-\nu_k T_k}}, r_k = \exp \frac{d_{33} T_k}{\sqrt{-\nu_k T_k}}, k = 0, 1, \dots$$

В некоторой окрестности гомоклинической орбиты мы можем считать, что $T_k \approx T > 0$, $r_k \approx r > 0$, $\gamma_k \approx \gamma$, и $p_k \approx p$. Тогда получаем новую дискретную модель:

$$w_{k+1} = \alpha(w_k) \equiv \frac{r w_k \exp(p w_k - w_k^2)}{1 + \gamma w_k}, k = 0, 1, \dots, \quad (3.6)$$

которая описывает хаотическое поведение решений системы (2.1) при определенных значениях $r > 0$, $\gamma \in (-d, \infty)$, и $p \in \mathbb{R}$. Число $d > 0$ должно быть выбрано так, чтобы для любого целого неотрицательного k $1 + \gamma w_k > 0$. (Легко проверить, что наличие множителя $\exp(-w_k^2)$ в формуле (3.6) гарантирует то, что положительная последовательность w_0, w_1, w_2, \dots будет ограничена.)

Теорема 3.2. *Если $p \geq \gamma \geq 0$, то существует число $r > 0$ такое, что дискретное отображение (3.6) является хаотическим.*

Доказательство. Рассмотрим одномерное действительное отображение

$$\alpha(v) = \frac{r v \exp(p v - v^2)}{1 + \gamma v}, v \in \mathbb{V} = [0, \infty).$$

Пусть $r > 0, p > 0$ и $\gamma > 0$. Тогда корни уравнения $\alpha'(v) = 0$ определяются корнями уравнения $2\gamma v^3 + (2-p\gamma)v^2 - pv - 1 = 0$. Известная теорема Декарта о числе положительных корней полинома утверждает, что существует только один положительный корень v^* для этого уравнения. Так как $\alpha(v) \geq 0$ на интервале $[0, \infty)$ и $\alpha'(v^* - \delta) > 0$, и $\alpha'(v^* + \delta) < 0$ для достаточно малого $\delta > 0$, то корень v^* является единственным максимумом функции $\alpha(v)$ на этом интервале. Таким образом, функция $\alpha(v)$ будет немонотонной и унимодальной на интервале $[0, \infty)$: интервал $[0, v^*)$ является интервалом возрастания, а интервал (v^*, ∞) – интервалом убывания.

Положим $\mathbb{W} = [0, 1]$. Символом $d(a, b) = |a - b|, \forall a, b \in \mathbb{W}$ определим метрику на пространстве \mathbb{W} . Ясно, что \mathbb{W} – полное метрическое пространство. Пусть $\mathbf{T} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ будет непрерывным отображением, заданным формулой

$w = (2/\pi) \cdot \operatorname{arctg} v$. Так как $\lim_{v \rightarrow \infty} (2/\pi) \cdot \operatorname{arctg} v = 1$, то мы можем считать, что \mathbf{T} – гомеоморфизм и $\mathbf{T}(\mathbb{V}) = \mathbb{W}$, $\mathbf{T}^{-1}(\mathbb{W}) = \mathbb{V}$.

Определим формулой

$$\phi(w) = \mathbf{T}^{-1}(\alpha(\mathbf{T}(w))) \equiv \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi w}{2} \cdot \frac{r}{1 + \gamma \operatorname{tg} \frac{\pi w}{2}} \cdot \exp \left(p \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi w}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi w}{2} \right) \right) \quad (3.7)$$

непрерывное, сопряженное отображению α , отображение $\phi : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}$ [9].

Пусть $f : X \rightarrow X$ – отображение полного метрического пространства в себя. Напомним [9], что отображение f называется хаотическим, если f транзитивно (то есть в X существует плотная орбита) и периодические точки функции f плотны в X .

а) *Плотность периодических точек.* Очевидно, что обратное отображение $\phi^{-1}(w)$ имеет две ветви: $\phi_1^{-1}(w)$ и $\phi_2^{-1}(w)$, где каждое из отображений $\phi_1^{-1}(w)$ и $\phi_2^{-1}(w)$ обратимо.

Определим функцию $\Phi : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{W}$ следующим правилом:

$$\Phi(w) = \phi_{i_1}^{-1}(\phi_{i_2}^{-1}(\dots(\phi_{i_k}^{-1}(w))))), \quad k = 2, 3, \dots$$

где или $i_k = 1$ или $i_k = 2$. Ясно, что отображение $\Phi(w)$ является монотонным.

Отображение $\Phi(w)$ имеет по крайней мере одну неподвижную точку w^* . Известно, что неподвижной точке w^* отображения $\Phi(w)$ соответствует неподвижная точка w^{**} отображения $\phi^{(k)}(w) = \phi(\phi(\dots\phi(w)))$. Точке w^{**} отображения $\phi^{(k)}(w)$ соответствует или неподвижная точка или m -цикл отображения $\phi(w)$. Если w^{**} является неподвижной точкой $\phi(w)$, то это возможно только при $i_1 = i_2$. Так как можно взять любое положительное k и произвольно выбрать числа i_1, i_2 от 1 до 2, то из условия $\phi_1^{-1}(\phi_2^{-1}(w)) \neq \phi_2^{-1}(\phi_1^{-1}(w))$ следует, что немонотонная функция $\phi(w)$ может иметь любое счетное множество циклов различной кратности и несчетное множество непериодических траекторий.

В соответствии с теоремой Шарковского [9], наличие в одномерной дискретной системе циклов периода 3 влечет за собой существование циклов любых периодов. Таким образом, в системе $w_{i+1} = \phi(w_i)$ существуют все циклы с периодами $2^i, i = 0, 1, 2, \dots$. В соответствии с теоремой Зингера [9], в дискретной системе $w_{i+1} = \phi(w_i), i = 0, 1, 2, \dots$, при любом n и некоторых значениях параметров $r = r_n, p = p_n, \gamma = \gamma_n$ существуют все неустойчивые циклы периодов $2^i, i = 0, \dots, n - 1$ и один устойчивый цикл периода 2^n . Если $r = r_\infty, p = p_\infty$, и $\gamma = \gamma_\infty$, где r_∞, p_∞ , и γ_∞ – параметры, при которых в процессе (3.6) присутствуют 3-циклы, то отображение $\phi(w)$ имеет полуустойчивую траекторию \mathbb{S} в любой окрестности любой точки которой лежат точки счетного множества неустойчивых циклов всех периодов $2^i, i = 0, 1, 2, \dots$. Поэтому множество всех периодических точек плотно в \mathbb{W} . (Любая точка \mathbb{S} с заданной точностью может быть аппроксимирована некоторой периодической точкой.)

б) *Транзитивность.* В работах [2, 3] показано, что одномерное отображение $\alpha_0(v) = rv \exp(-v), v \in [0, \infty)$, является хаотическим. Введем гомеоморфизм $\mathbf{H} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ по формуле $\mathbf{H}(v) = 2v^2$.

Определим функцию $q : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ согласно формуле:

$$q(v) = \mathbf{H}^{-1}(\alpha_0(\mathbf{H}(v))) = \sqrt{rv} \cdot \exp(-v^2).$$

Ясно, что функции $\alpha_0(v)$ и $q(v)$ непрерывно сопряжены относительно отображения \mathbf{H} . Таким образом, если функция $\alpha_0(v)$ хаотична, то функция $q(v)$ также хаотична.

Очевидно, что $\forall v \in \mathbb{V}$ имеем:

$$\alpha(v) = rv \exp(-v^2) \cdot \frac{\exp(pv)}{1 + \gamma v} \equiv rv \exp(-v^2) \cdot \lambda(v),$$

где $\lambda > 1$ при $p \geq \gamma > 0$ и $\forall v > 0$. Кроме того, функция $rv \exp(-v^2)$ хаотична для некоторого $r > 0$. Отсюда следует, что эта же функция является транзитивной.

Представим функцию (3.7) в форме:

$$\phi(w) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(r \tan \frac{\pi w}{2} \cdot \mu(w) \cdot \exp\left(-\tan^2 \frac{\pi w}{2}\right)\right),$$

где

$$\mu(w) = \frac{\exp\left(p \cdot \tan \frac{\pi w}{2}\right)}{1 + \gamma \tan \frac{\pi w}{2}} > 1$$

при $p \geq \gamma > 0$ и $\forall w \in \mathbb{W}$.

Рассмотрим функцию

$$\phi_0(w) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(r \tan \frac{\pi w}{2} \cdot \exp\left(-\tan^2 \frac{\pi w}{2}\right)\right) \equiv \frac{2}{\pi} \arctan(r \cdot \eta(w)).$$

(Она совпадает с функцией $\phi(w)$ при $p = 0$ и $\gamma = 0$.)

В силу транзитивности функции $rv \exp(-v^2)$ функция $\phi_0(w)$ также будет транзитивной. Это означает, что для любых открытых множеств $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2 \subset \mathbb{W}$ существует натуральное число n такое, что $\phi_0^{(n)}(\mathbb{U}_1) \cap \mathbb{U}_2 \neq \emptyset$ [9].

Можно показать, что транзитивность $\phi_0(w)$ эквивалентна условию: для любого открытого множества $\mathbb{U} \subset \mathbb{W}$ $\bigcup_{n=0}^{\infty} \phi_0^{(n)}(\mathbb{U}) = \mathbb{W}$, где $\bar{\mathbb{A}}$ – замыкание множества \mathbb{A} . Так как $\forall w \in \mathbb{W}$, мы имеем $\phi_0(w) \leq \phi(w)$, тогда отсюда при $\mu > 1$ следует, что $\forall w_i, w_j \in \mathbb{W}$:

$$\begin{aligned} d(\phi_0(w_i), \phi_0(w_j)) &= \\ &= \frac{2}{\pi} \left| \arctan(r \cdot \eta(w_i)) - \arctan(r \cdot \eta(w_j)) \right| = \frac{2}{\pi} \left| \arctan \frac{r(\eta(w_i) - \eta(w_j))}{1 + \eta(w_i)\eta(w_j)} \right| < \\ &< \frac{2}{\pi} \left| \arctan \frac{r \cdot (\mu(w_i)\eta(w_i) - \mu(w_j)\eta(w_j))}{1 + \mu(w_i)\mu(w_j)\eta(w_i)\eta(w_j)} \right| = d(\phi(w_i), \phi(w_j)). \end{aligned}$$

Поэтому $\forall w_i, w_j \in \mathbb{U}$, и для любого целого $n \geq 0$ имеем:

$$\sum_{i=0}^n d(\phi_0^{(i)}(w_i), \phi_0^{(i)}(w_j)) < \sum_{i=0}^n d(\phi^{(i)}(w_i), \phi^{(i)}(w_j)).$$

Следовательно, $\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \phi^{(n)}(\mathbb{U})} = \mathbb{W}$ и функция $\phi(w)$ (это значит, что и функция $\alpha(v)$) транзитивна. Окончательно, из а) и б) следует, что для некоторых r, p и γ функция $\alpha(v)$ является хаотичной [9]. \square

4. Примеры

Рассмотрим следующие системы:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2x - 9y + 12z - 3x^2 - xy + xz + y^2 - z^2, \\ \dot{y}(t) = 9x + 2y - 13z - 7xy + yz + 2.5y^2 - 2.5z^2, \\ \dot{z}(t) = z^2 - 7xz + 3yz; \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 2x - 20z + 3x^2 - 2y^2 - 2xz - 2yz - z^2, \\ \dot{y}(t) = -x + 8xy + 4yz + 4xz + 4y^2 + z^2, \\ \dot{z}(t) = 20x + 2z + z^2 + 4xz + 2yz. \end{cases} \quad (4.2)$$

Для систем (4.1) и (4.2) все условия теоремы 3.1 выполнены и потому любая из этих систем содержит гомоклиническую орбиту.

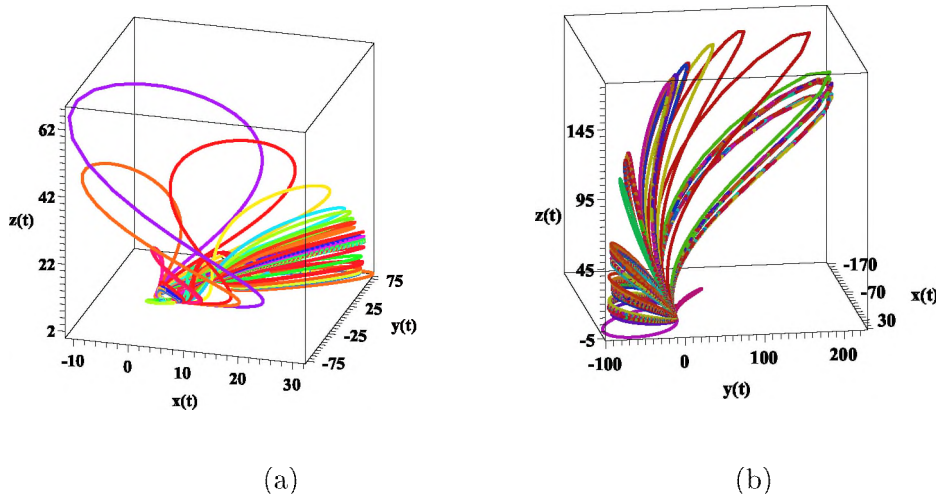


Рис. 1. Фазовые портреты системы (4.1) с начальными данными $(0, 0, 0.01)$ (а) и системы (4.2) с начальными данными $(0, -1, 0)$ (б). Существует гомоклиническая орбита, связанная точкой $(0; 0; 0)$, и хаотические аттракторы гомоклинического типа.

Бифуркационные диаграммы отображения (3.6) при различных значениях параметров $r > 0$, $\gamma > 0$ и p представлены ниже на рис. 2 и 3. Эти диаграммы показывают хаотическое поведение отображения (3.6) и систем (4.1) – (4.2).

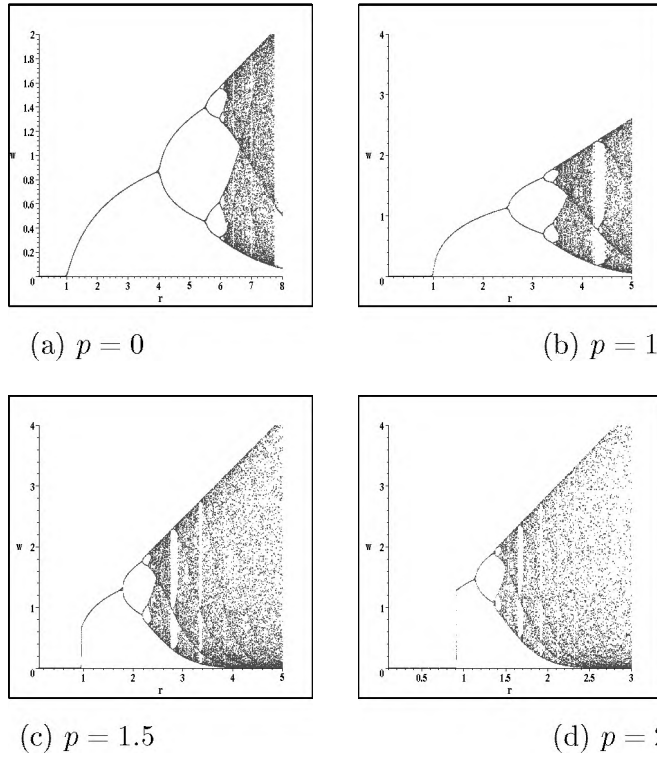


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма отображения (3.6) при $\gamma = 1$ и различных значениях p

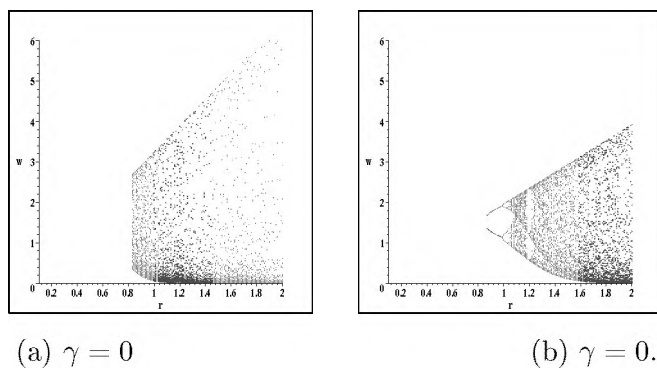


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма отображения (3.6) при $p = 2$ и различных значениях γ

5. Выводы

1. Доказаны теоремы 2.1 и 2.2, гарантирующие существование в системе (2.1) различных типов инвариантных множеств. Также доказана теорема 3.1, показывающая существование нескольких гомоклинических орбит для одной и той же системы (2.1).

2. Построено новое экспоненциальное дискретное одномерное отображение (3.6), генерирующее хаотическое поведение решений в системе (2.1).

3. Доказана теорема 3.2, утверждающая, что отображение (3.6) будет хаотичным для некоторых значений параметров, входящих в это отображение.

Библиографические ссылки

1. *Belozyorov V.Ye.* On existence of homoclinic orbits for some types of autonomous quadratic systems differential equations // Applied Mathematics and Computation, 2011. – Vol. 217. – P. 4582 – 4595.
2. *Belozyorov V.Ye.* New types of 3-D systems of quadratic differential equations with chaotic dynamics based on Ricker discrete population model // Applied Mathematics and Computation, 2011. – Vol. 218. – P. 4546 – 4566.
3. *Belozyorov V. Ye.* Implicit one-dimensional discrete maps and their connection with existence problem of chaotic dynamics in 3-D systems of differential equations // Applied Mathematics and Computation, 2012. – Vol. 218. – P. 8869 – 8886.
4. *Chen B., Zhou T., Chen G.* An extended Shilnikov homoclinic theorem and its applications // Int. J. Bifurcation and Chaos, 2009. – Vol. 19. – P. 1679 – 1693.
5. *Shang D., Han M.* The existence of homoclinic orbits to saddle-focus // Applied Mathematics and Computation, 2005. – Vol. 163. – P. 621 – 631.
6. *Zhou T., Chen G.* Classification of chaos in 3-D autonomous quadratic systems - 1. Basic framework and methods // Int. J. Bifurcation and Chaos, 2006. – Vol. 16. – P. 2459 – 2479.
7. *Kuznetsov Y.A.* Elements of Applied Bifurcation Theory. — 2nd edition, Springer-Verlag, New-York, 1998.
8. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц.— М. : Наука, 1976.
9. *Crownover R.M.* Introduction to Fractals and Chaos, Jones and Bartlett Publishers, Boston, London, 1995.

Надійшла до редколегії 16.03.2013