ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія "Моделювання". № 8. 2012. Вип. 4. С. 83–94

Проблеми математичного моделювання
та теорії диференціальних рівнянь

УДК 536.24

О МАТРИЧНОМ КРИТЕРИИ НАБЛЮДАЕМОСТИ

Ю. Л. Меньшиков

Механико-математический факультет Днепропетровского национального университета,
Днепропетровск, 49010, просп.Гагарина, 72
E-mail: Menshikov2003@list.ru

Рассмотрено одно из основных свойств систем управления — наблюдаемость, а также критерии наличия или отсутствия этого свойства у некоторых классов систем управления. Показано, что матричный критерий наблюдаемости имеет ряд недостатков, которые ограничивают его практическое использование. Рассмотрены вопросы устойчивости результатов наблюдаемости к малым изменениям исходных данных.

Ключевые слова: динамические системы, наблюдаемость, матричный критерий, устойчивость результатов.

1. Введение

Рассмотрим систему

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BZ(t), \tag{1.1}$$

$$Y(t) = G^{*}X(t) + DZ(t), t \in [0, T], \tag{1.2}$$

где $X(t)$ — вектор-функция переменных состояния размером n, $Z(t)$ — вектор-функция внешних воздействий размером m, $Y(t)$ — вектор-функция переменных выхода размером $r, r \leqq n$; A, B, G^{*}, D матрицы с постоянными коэффициентами соответствующей размерности ($(.)^{*}$ — знак сопряжения). Для систем типа (1.1), (1.2) был введен ряд понятий и определений, которые характеризуют внутренние свойства динамических систем. К таким свойствам можно отнести управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость, функциональную воспроизводимость, поточечную воспроизводимость и т. д. Наличие указанных свойств позволяет получать решения задач, которые выдвигает практика. В силу этого, критерии наличия указанных внутренних свойств систем управления важны для практического использования.

2. Наблюдаемость динамических систем

Впервые понятие наблюдаемости динамических систем было введено в работах Р. Калмана [1]– [3].

Определение 2.1. Некоторое состояние динамической системы наблюдаемо, если его можно определить, наблюдая поведение входного воздействия и выходной величины системы [3].

При этом в расчет не принимаются начальные условия $X(0)$ для системы.

Определение 2.2. Задача наблюдения связана с определением настоящего состояния $X(t)$ по данным о поведении выходных величин $Y(t)$ в будущем $\{Y(\sigma) : \sigma \geq \tau\}$ [3].

Задача наблюдения динамической системы аналогичным образом сформулирована в [5, 6].Тут же приведена теорема о необходимых и достаточных условиях наблюдаемости системы (1.1), (1.2) с нулевой матрицей D.

В монографии [7] рассмотрена система (1.1), (1.2) с матрицами $B = E$, $D = 0$ (E— единичная матрица) и начальным условием $X(0) = X_0$. Предполагается, что заданы входное воздействие $Z(s)$ и выходной сигнал $Y(s)$ системы (1.1), (1.2) на некотором промежутке времени $t - \alpha \leq s \leq t$. Пусть Z есть множество кусочно-непрерывных функций $[0, \infty\} \to X$, аналогично Y есть множество кусочно-непрерывных функций $[0, \infty\} \to Y$. Далее, пусть для $t \geq \alpha > 0$ определена функция

$$\omega_\alpha(t, s) = \left\{ \begin{array}{c} 1, \quad t - \alpha \leq s \leq t; \\ 0, s \neq \tau, \tau \in [t - \alpha, t]. \end{array} \right.$$

Определение 2.3. Систему (1.1), (1.2) с матрицами $B = E, D = 0$ назовем наблюдаемой, если для некоторого $\alpha > 0$ найдется функция

$$\Omega : [\alpha, \infty) \times Z \times Y \to X,$$

обладающая свойством: для любых $X(t)$ и $Y(t)$, удовлетворяющих уравнениям (1.1), (1.2) при некоторых $Z_t \in Z$ и $X_0 \in X$,

$$\Omega[t, \omega_\alpha(t, \cdot)Z(\cdot), \omega_\alpha(t, \cdot)Y(\cdot)] = X(t), t \geq \alpha.$$

В работе [8] рассмотрена система, описываемая уравнением

$$\dot{X}(t) = F[t, X(t)], \tag{2.1}$$

где $X(t)$ — переменные состояния системы.

В этом уравнении отсутствует управляющее воздействие $Z(t)$.

Пусть имеется возможность измерять некоторую вектор-функцию $Y(t)$, связанную с фазовым вектором $X(t)$ соотношением

$$Y(t) = G[t, X(t)], \tag{2.2}$$

Предмет задачи наблюдения системы (1.2) по функции $Y(t)$ заключается в определении такой операции $\Phi[t, Y(\tau)]$, которая, будучи выполнена над вектор-функцией $Y(\tau)(t - \tau \leq \varsigma \leq t)$, определяемой соотношениями (2.2), (2.1), дает в результате функцию $X(t)$.

Если исследуемая система подвержена управляющему воздействию $Z(t)$

$$\dot{X}(t) = F_1[t, X(t), Z(t)], \tag{2.3}$$

тогда в качестве сигнала, по которому определяется функция $X(t)$, выбирается пара вектор-функций $Y(t), Z(t)$. При этом предполагается, что аргумент у функции $Y(\tau)$ меняется в пределах отрезка $t - \vartheta \leq \tau \leq t$, а у функции $Z(t)$ аргумент заключен в пределах полуинтервала $t - \vartheta \leq \tau < t$.

Определение наблюдаемости динамической системы (1.1),(1.2) с матрицами $B = E, D = 0$, G^* — матрица-строка (случай наиболее простой системы) дано в работе [9].

Определение 2.4. Задачу нахождения вектора $X(t)$, которая удовлетворяет уравнению $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$, или отдельных его компонент по известной на некотором промежутке $[t^{(0)}, t^{(1)}]$ скалярной функции $y(t)$, будем называть задачей наблюдаемости однородной системы.

3. Матричный критерий наблюдаемости

В работах [1 – 3] был получен матричный критерий наблюдаемости системы (1.1),(1.2).

Теорема 3.1. *Система* (1.1), (1.2) *наблюдаема тогда и только тогда, когда пространство состояний* $X(t)$ *натягивается на вектор-столбцы матрицы*

$$[G, A^*G, ..., A^{*(n-1)}G] = M_n.$$

Результаты сформулированной теоремы не зависят от матрицы D и начальных условий X_0, что не является естественным для системы (1.1), (1.2), так как в определениях 1, 2 необходимо должна присутствовать информация о входном воздействии $Z(t)$ и начальных условиях X_0.

Подобные условия наблюдаемости приведены и в работе [5]. Иной характер необходимых и достаточных условий наблюдаемости системы (1.1), (1.2) с нулевой матрицей D представлен в работах [5, 6].

Для неоднородной системы (1.1), (1.2) в работе [6] получены следующие условия наблюдаемости.

Теорема 3.2. *Пара матриц* A, G^* *определяет наблюдаемую систему в том и только в том случае, если ранг матрицы* M_n *равен* n.

Так как в условия этой теоремы также не входит матрица D, то это означает, что информация о входных воздействиях отсутствует.

В работе [9] получены условия наблюдаемости однородной системы (1.1), (1.2) с матрицами $B = E, D = 0$, G^* — матрица-строка.

Теорема 3.3. *Для наблюдаемости однородной системы* (1.1),(1.2) *с матрицами* $B = E, D = 0$, G^* *— матрица-строка необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы*

$$M_n = (G, A^*G, A^{*2}G, .., A^{*(n-1)}G)$$

был равен n, *т. е.* $rank M_n = n$.

Доказательство. Продифференцируем $(n-1)$ раз соотношение (1.2):

$$\begin{pmatrix} Y(t) \\ \dot{Y}(t) \\ \ddot{Y}(t) \\ ... \\ Y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^* \\ G^*A \\ G^*A^2 \\ ... \\ G^*A^{(n-1)} \end{pmatrix} X(t) = M_n^* \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ ... \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad (3.1)$$

где M_n^* прямоугольная матрица размером $nr \times n$.

Для существования решения данной системы относительно вектора $X(t)$ достаточно, чтобы ранг матрицы M_n^* равнялся n. Ранг этой матрицы равен рангу сопряженной матрицы M_n. □

Однако при доказательстве этой теоремы не были учтены свойства алгебраических систем уравнений с прямоугольной матрицей. Для такого рода систем справедлива теорема Кронекера – Капелли [4].

Теорема 3.4. *Система* m *линейных алгебраических уравнений с* n *неизвестными*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i, i = \overline{1, m},$$

имеет решение в том и только в том случае, если ранг матрицы $A = \{a_{ik}\}$ *и ранг расширенной матрицы совпадают.*

Справедлива теорема.

Теорема 3.5. *Система* (2.1) *совместна, когда* $X(t)$ *есть решение однородного уравнения* (1.1) *и когда матрица* G^* *является единичной.*

Доказательство. Пусть вектор-функция $X(t)$ есть решение однородного уравнения (1.1). В силу предположения, что матрица G^* неособая, первые n строк матрицы M_n^* будут линейно независимые. Тогда $(n+1)$ строку можно линейным образом выразить через первые n строк, т. е. существует нетривиальный набор постоянных $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ такой, что выполняется тождественно равенство

$$\begin{gathered} \dot{y}_1 = (\gamma_1 g_{11} + \gamma_2 g_{21} + ... + \gamma_n g_{n1})x_1 + \\ +(\gamma_1 g_{12} + \gamma_2 g_{22} + \gamma_n g_{n2})x_2 + ... + (\gamma_1 g_{1n} + \gamma_2 g_{2n} + ... + \gamma_n g_{nn})x_n. \end{gathered} \qquad (3.2)$$

Далее, из условия, что функция $X(t)$ есть решение однородного уравнения (1.1), имеем:

$$\begin{gathered}\dot{y_1} = (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n) = a_{11}(g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + ... + g_{1n}x_n) + \\ + a_{12}(g_{21}x_1 + g_{22}x_2 + ... + g_{2n}x_n) + ... + a_{1n}(g_{n1}x_1 + g_{n2}x_2 + ... + g_{nn}x_n) = \\ = (a_{11}g_{11} + a_{12}g_{21} + ... + a_{1n}g_{n1})x_1 + (a_{11}g_{12} + a_{12}g_{22} + ... + a_{1n}g_{n2})x_2 + ... \\ + (a_{11}g_{1n} + a_{12}g_{2n} + ... + a_{1n}g_{nn})x_n.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Приравнивая выражения (3.2) и (3.3), получим:

$$\begin{gathered}a_{11}g_{11} + a_{12}g_{21} + ... + a_{1n}g_{n1} = \gamma_1 g_{11} + \gamma_2 g_{21} + ... + \gamma_n g_{n1}, \\ a_{11}g_{12} + a_{12}g_{22} + ... + a_{1n}g_{n2} = \gamma_1 g_{12} + \gamma_2 g_{22} + ... + \gamma_n g_{n2}, \\ .... \\ a_{11}g_{1n} + a_{12}g_{2n} + ... + a_{1n}g_{nn} = \gamma_1 g_{1n} + \gamma_2 g_{2n} + ... + \gamma_n g_{nn}.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Соотношения (3.4) выполняются, если

$$\gamma_1 = a_{11}, \gamma_2 = a_{12}, ..., \gamma_n = a_{1n}.$$

Таким образом, если матрица $G^* = E$, тогда система алгебраических уравнений, состоящая из первых n уравнений системы (2.1) и $(n+1)$-го уравнения, совместна, так как ранг расширенной матрицы совпадает с рангом матрицы M_n^*.

При этом функция y_1 должна удовлетворять линейному дифференциальному уравнению

$$\dot{y_1} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n. \tag{3.5}$$

Далее, рассмотрим алгебраическую систему, которая образуется первыми n уравнениями системы (2.1) и $(n+2)$-м уравнением системы (3.1). Проверим совместность такой системы.

Выполним аналогичные преобразования для $(n+2)$-й строки, получим:

$$\begin{gathered}\dot{y_2} = a_{21}(g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + ... + g_{1n}x_n) + \\ + a_{22}(g_{21}x_1 + g_{22}x_2 + ... + g_{2n}x_n) + ... + a_{2n}(g_{n1}x_1 + g_{n2}x_2 + ... + g_{nn}x_n) = \\ = (a_{21}g_{11} + a_{22}g_{21} + ... + a_{2n}g_{n1})x_1 + ... + (a_{21}g_{1n} + a_{22}g_{2n} + ... + a_{2n}g_{nn})x_n.\end{gathered} \tag{3.6}$$

$$\dot{y_2} = (\hat{\gamma_1}g_{11} + ... + \hat{\gamma_n}g_{n1})x_1 + ... + (\hat{\gamma_1}g_{1n} + ... + \hat{\gamma_n}g_{nn})x_n. \tag{3.7}$$

Отсюда следует, что рассматриваемая система совместна, если

$$\hat{\gamma_1} = a_{21}, ..., \hat{\gamma_n} = a_{2n}.$$

При этом функция y_2 должна удовлетворять линейному дифференциальному уравнению

$$\dot{y_2} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n. \tag{3.8}$$

Повторяя аналогичные рассуждения для алгебраических систем, состоящих из первых n строк матрицы M_n^* и любой строки с номером большим

$(n+2)$, получаем аналогичный результат. При этом функция y_i должна удовлетворять линейному дифференциальному уравнению

$$y_i^{(k)} = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + ... + \alpha_{1n}y_n, 1 \leq k \leq (n-1), 1 \leq i \leq n. \tag{3.9}$$

□

Таким образом, только если матрица $G^* = E$ и функция $X(t)$ удовлетворяет однородному уравнению (1.1), тогда система алгебраических уравнений (3.1) совместна. Если выполнены условия теоремы 2, тогда для нахождения функции $X(t)$ можно выбирать любые n уравнений системы (3.1) с n линейно независимыми строками матрицы M_n^* при условии, что измеряемые переменные $y_i^{(k)}$ при $t > 0$ удовлетворяют $n(n-1)$ линейным дифференциальным уравнениям типа (3.9).

Аналогичные выводы получаются и для случая произвольной невырожденной матрицы G^*.

Полученные результаты не представляют интереса с практической точки зрения, так как первые n уравнений системы (3.1) дают единственное решение задачи наблюдения.

Рассмотрим случай, когда матрица G^* является прямоугольной размера $(r \times n), r < n$ и имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & ... & 1 & ... & 0. \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Справедлива теорема.

Теорема 3.6. *Система* (2.1) *совместна, когда* $Y(t)$ *есть решение специального дифференциального однородного уравнения и когда матрица* G^* *имеет вид* (3.10).

Доказательство. Система (3.1) в этом случае имеет вид при $2r > n, r+l = n$:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} y_1(t) & = & x_1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & ...+ & & 0, \\ y_2(t) & = & 0 & + & x_2 & + & 0 & + & 0 & ... & & + & 0, \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & , \\ y_r(t) & = & 0 & + & ... & + & x_r & + & 0 & ... & & + & 0, \\ \dot{y}_1(t) & = & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & . & . & . & . & . & + & a_{1n}x_n, \\ \dot{y}_2(t) & = & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & . & . & . & . & . & + & a_{2n}x_n, \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & , \\ \dot{y}_l(t) & = & a_{l1}x_1 & + & a_{l2}x_2 & + & . & . & . & . & . & + & a_{ln}x_n, \\ \dot{y}_{l+1}(t) & = & a_{(l+1)1}x_1 & + & a_{(l+1)2}x_2 & + & . & . & . & . & . & + & a_{(l+1)n}x_n, \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & , \\ \dot{y}_r(t) & = & a_{(2r)1}x_1 & + & a_{(2r)2}x_2 & + & . & . & . & . & . & + & a_{(2r)n}x_n, \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & , \\ y_r^{(n-1)}(t) & = & \hat{a}_{r1}x_1 & + & \hat{a}_{r2}x_2 & + & . & . & . & . & . & + & \hat{a}_{rn}x_n. \end{array}$$

где $\{\hat{a}_{ik}\}$ - коэффициенты матрицы $G^* A^{(n-1)}$.

Рассмотрим случай, когда первые n строк в матрице M_n^* являются линейно независимыми. Тогда $(l+1)$ строку можно линейным образом выразить через первые n строк:

$$\begin{gathered}a_{(l+1)1}x_1 + a_{(1+1)2}x_2 + ... + a_{(1+1)n}x_n = \\ = (\gamma_1 \cdot 1 + 0 \cdot \gamma_1 + ... + 0 \cdot \gamma_1 + a_{11} \cdot \gamma_{r+1} + a_{21} \cdot \gamma_{r+2} + ... + a_{l1} \cdot \gamma_n)x_1 + \\ ... + (0 \cdot \gamma_1 + ... + 0 \cdot \gamma_r + a_{1n} \cdot \gamma_{r+1} + a_{2n} \cdot \gamma_{r+2} + ... + a_{ln} \cdot \gamma_n)x_n.\end{gathered} \tag{3.11}$$

Отсюда следует, что должны выполняться равенства:

$$\begin{aligned}&\gamma_1 = a_{(l+1)1}, \gamma_2 = a_{(l+1)2}, .., \gamma_r = a_{(l+1)r},\\ &\gamma_{r+1}a_{1(r+1)} + \gamma_{r+2}a_{2(r+1)} + ... + \gamma_n a_{l(r+1)} = a_{(l+1)(r+1)},\\ &\gamma_{r+1}a_{1(r+2)} + \gamma_{r+2}a_{2(r+2)} + ... + \gamma_n a_{l(r+2)} = a_{(l+1)(r+2)},\\ &\cdots\cdots\cdots,\\ &\gamma_{r+1}a_{1(n)} + \gamma_{r+2}a_{2(n)} + ... + \gamma_n a_{l(n)} = a_{(l+1)(n)}.\end{aligned}$$

Эта система имеет единственное решение, так как ранг всей системы больше l.

Таким образом, если функция $y_{l+1}(t)$ должна удовлетворять линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами,

$$\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + ... + \gamma_r y_r + \gamma_{r+1} y_{r+1} + ... \gamma_n y_l = \dot{y}_{l+1}. \tag{3.12}$$

Система алгебраических уравнений, состоящая из первых n уравнений системы (3.1) и $(n+1)$-го уравнения, образует совместную систему, так как в этом случае ранг расширенной матрицы совпадает с рангом матрицы M_n.

Проводя аналогичные рассуждения для любой из следующих строк с номерами $(r+l+2), (r+l+3), ..., 2r$, получаем аналогичный вывод: система, состоящая из n первых строк системы (3.1), плюс любая строка с номером от $(r+l+2)$ до $2r$, будет совместна только при условии выполнения равенства типа (3.12), но с иными коэффициентами.

Рассмотрим более общий случай, когда произвольно расположенные строки матрицы M_n являются линейно независимыми. Пусть матрица, составленная из этих строк, будет M_n^1.

Рассмотрим совместность системы (3.1) в этом случае. Выпишем те уравнения системы (3.1), у которой правые части совпадают с матрицей M_n^1:

$$\begin{array}{ccccccccccc} y_{a_1}(t) & = & 0 & + & ... + 0 & +x_{a_1} & ... & +0 & + & ... & +0,\\ y_{a_2}(t) & = & 0 & +... & 0 & ... & +x_{a_2} & + & ...+ & 0, & \\ \dot{y}_{b_1}(t) & = & a_{b_1 1}x_1 & + & a_{b_1 2}x_2 + . & . & . & . & .+ & a_{b_1 n}x_n, & \\ . & . & . & . & . & . & . & . & & , & \\ y_{c_1}^{(n-1)}(t) & = & a_{c_1 1}x_1 & + & a_{c_1 2}x_2 + . & . & . & . & .+ & a_{c_1 n}x_n, & \end{array} \tag{3.13}$$

где $\{a_{b_i k}\}$ — коэффициенты матрицы $G^* A$, $\{a_{c_i k}\}$ — коэффициенты матрицы $G^* A^{(n-1)}$.

Так как правые части системы (3.13) являются линейно независимыми, то любая правая часть другого уравнения системы (3.1) выражается линейным образом через правые части системы (3.13). Отсюда следует, что система, образованная из системы (3.13) и любого иного уравнения системы (3.1),

$$y_{d_1}^{\alpha}(t) = \gamma_1 y_1(t) + ... + \gamma_n y_{c_1}^{(n-1)}(t),$$

будет совместной, если функция $y(t)_{d_1}$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами типа (3.9)

$$y_i^{(j)} = \mu_1 y_1 + ... + \mu_n y_c^{(n-1)}. \tag{3.14}$$

При этом изменится лишь порядок уравнения типа (3.9). Этот порядок не будет превышать $(n-1)$. Отсюда следует утверждение теоремы. □

Для произвольной матрицы G^* ранга r дифференциальные уравнения, которым должна удовлетворять каждая функция, не входящая в левую часть строк, образующих систему из n линейно независимых, будут типа (3.14). Однако получить эти уравнения заранее представляет значительные трудности.

Таким образом, для решения задачи наблюдения требуется определить ранг матрицы M_n. И если ранг этой матрицы равен n, тогда исходные данные $y_1(t_1), \dot{y}_1(t_1), ...$ необходимо выбрать таким образом, чтобы удовлетворялись все дифференциальные уравнения типа (3.14). А если учесть, что исходные данные получают из эксперимента с некоторой погрешностью, то проверка этих условий представляет значительные трудности.

Рассмотрим случай, когда матрица G^* является строкой с одним ненулевым элементом:

$$G^* = (0, 0, ..., \beta, 0, ...0).$$

В этом случае функция $y(t)$ имеет вид:

$$y(t) = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + \beta \cdot x_k + ... + 0 \cdot x_n. \tag{3.15}$$

Справедлива теорема.

Теорема 3.7. *Система* (3.1) *имеет единственное решение, когда ранг матрицы M_n равен n и матрица G^* — строка с одним ненулевым элементом. Если $y(t)$ есть решение неоднородного уравнения* (1.1) *и ранг матрицы M_n равен n, то решение системы* (3.1) *ошибочное.*

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда в матрице G^* только один ненулевой элемент и он равен 1. Матрица M_n в этом случае будет иметь вид:

$$\begin{array}{llllllll}
y(t) & = G^*x(t) & = 0\cdot x_1 & +0\cdot x_2 & +... & +1\cdot x_k & +... & +0\cdot x_n, \\
\dot{y}(t) & = G^*Ax(t) & = a_{r1}x_1 & +a_{r2}x_2 & +. & . & . & +a_{rn}x_n, \\
\ddot{y}(t) & = G^*A^2x(t) & = \hat{a}_{r1}x_1 & +\hat{a}_{r2}x_2 & +. & . & . & +\hat{a}_{rn}x_n, \\
. & . & . & . & . & . & . & . \\
y^{(n-1)}(t) & = G^*A^{(n-1)}x(t) & = \tilde{a}_{r1}x_1 & +\tilde{a}_{r2}x_2 & +. & . & . & +\tilde{a}_{rn}x_n.
\end{array} \tag{3.16}$$

Если ранг матрицы M_n равен n, то при любых функциях $y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t)$, $..., y^{(n-1)}(t)$ система (3.1) имеет единственное решение.

Пусть неоднородная система (1.1) имеет стационарное решение $x_1 = C_1$, $x_2 = C_2, ..., x_n = C_n$ при стационарном воздействии $Z^0 = (z_1, z_2, ..., z_n)^T$.

Это стационарное решение удовлетворяет неоднородному уравнению (1.1):

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & = & a_{11}C_1 & + & .... & + & a_{1n}C_n & + & z_1, \\ 0 & = & a_{21}C_1 & + & .... & + & a_{2n}C_n & + & z_2, \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & = & a_{n1}C_1 & + & .... & + & a_{nn}C_n & + & z_n. \end{array} \tag{3.17}$$

Система (3.1) в данном случае будет иметь вид:

$$\begin{array}{cccccccccc} C_k & = & 0 \cdot C_1 & + & ... & +1 \cdot C_k & + & ... & + & 0 \cdot C_n, \\ 0 & = & a_{r1}C_1 & + & a_{r2}C_2 & +. & . & . & . & +a_{rn}C_n, \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & = & \tilde{a}_{r1}C_1 & + & \tilde{a}_{r2}C_2 & + & . & . & + & \tilde{a}_{rn}C_n, \end{array} \tag{3.18}$$

Очевидно, что вторая строка в последней системе не совпадает с k-м уравнением системы (3.17). Кроме этого, решение задачи наблюдения в этом случае может не совпадать с точным решением на произвольную величину.

Выводы остаются в силе и для произвольной матрицы-строки G^* с одним ненулевым элементом. $\square$

Проведенные исследования указывают на то, что матричный критерий наблюдаемости имеет ряд недостатков даже в простейшем случае системы (1.1).

Рассмотрим в качестве примера дифференциальное уравнение движения главной линии листового прокатного стана [10]:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ ... \\ \dot{x}_6(t) \end{pmatrix} = \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & 0 & a_{23} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & -a_{43} & 0 & -a_{41} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{61} & 0 & -a_{63} & 0 & -a_{65} & 0 \end{pmatrix} X(t), \tag{3.19}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ ... \\ x_6(t) \end{pmatrix} = G^* \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ ... \\ x_6(t) \end{pmatrix}, \tag{3.20}$$

где коэффициенты a_{ik} — положительные постоянные.

Определим матрицу $\tilde{M}_6$ в данном случае

$$\tilde{M}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_{41} & a_{61} & 0 & 0 & -\gamma_{11} & -\gamma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{41} & a_{61} & 0 & 0 & -\gamma_{11} & -\gamma_{12} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -a_{43} & -a_{63} & 0 & 0 & \gamma_{31} & \gamma_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -a_{43} & -a_{63} & 0 & 0 & \gamma_{31} & \gamma_{32} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a_{41} & -a_{65} & 0 & 0 & \gamma_{51} & \gamma_{52} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a_{41} & -a_{65} & 0 & 0 & \gamma_{51} & \gamma_{52} \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

где коэффициенты γ_{ik} — положительные постоянные.

Очевидно, что матрица $\tilde{S}_6$ имеет ранг 6. Теперь, используя шесть линейно независимых столбцов этой матрицы и функции $y_1(t), y_2(t)$, получим значения функций $x_1(t), x_2(t), ..., x_6(t)$ в некоторый момент времени t. Выбирая шесть линейно независимых столбцов (2-й, 3-й, . . . , 7-й), из системы (3.1) получаем:

$$\tilde{x_1} = \frac{a_{63}(\ddot{y}_1 + a_{41}y_2) - a_{43}(\ddot{y}_2 + a_{65}y_2)}{(a_{41}a_{63} - a_{43}a_{61})}, \tilde{x_2} = \frac{\dddot{y}_1 + a_{43}\dot{y}_1 + a_{41}\dot{y}_2}{a_{41}},$$

$$\tilde{x_3} = \frac{a_{61}(\ddot{y}_1 + a_{41}y_2) - a_{41}(\ddot{y}_2 + a_{65}y_2)}{(a_{41}a_{63} - a_{43}a_{61})}, \tilde{x_4} = \dot{y}_1, \tilde{x_5} = y_2, \tilde{x_6} = \dot{y}_2.$$

Выбирая другие шесть линейно независимых столбцов (1-й, 2-й, 3-й, 4-й, 5-й, 7-й), из системы (3.1) получаем:

$$\tilde{x_1} = \frac{(\ddot{y}_1 + a_{43}y_1 + a_{41}y_2)}{a_{41}}, \tilde{x_2} = \frac{(\dddot{y}_1 + a_{43}\dot{y}_1 + a_{41}\dot{y}_2)}{a_{41}},$$

$$\tilde{x_3} = y_1, \tilde{x_4} = \dot{y}_1, \tilde{x_5} = y_2, \tilde{x_6} = \dot{y}_2.$$

Разница в результатах наблюдения объясняется тем, что они получены без учета выполнения уравнений типа (3.14). После учета таких соотношений результаты наблюдений будут совпадать.

Следовательно, можно утверждать, что система (1.1) наблюдаема, если матрица $\tilde{M}_n$ квадратная размером $n \times n$ и если ранг ее равен n без проверки выполнения соотношений типа (3.14). Такой случай возможен только, когда матрица G^* имеет размер $(1 \times n)$ с одним ненулевым элементом.

Если отказаться от матричного критерия наблюдаемости, тогда система (1.1) будет наблюдаема, если матрица G^* квадратная размером $n \times n$ и не особенная.

Заметим, что способ получения значений неизвестной вектор-функции $X(t)$ через вектор-функцию $Y(t)$ и ее производные до $(n-1)$-го порядка (из системы (3.1)) является затруднительным, так как вектор-функция $Y(t)$ получена в результате измерений, т. е. с погрешностью.

4. Устойчивость результатов наблюдений

Рассмотрим вопрос об устойчивости результатов наблюдений к малым изменениям исходных данных, т. е. к малым изменениям вектор-функции $y(t)$ и ее производных.

Пусть матрица G^* является квадратной.

Теорема 4.1. *Если матрица G^* невырожденная, тогда результаты наблюдений являются устойчивыми к малым изменениям исходных данных, если вместо произвольных n уравнений системы* (3.1), *для которой ранг матрицы M_n равен n, использовать только первые n уравнений. Если матрица G^* вырожденная и ранг матрицы M_n равен n или если ранг матрицы M_n меньше n, то результаты наблюдений в общем случае являются неустойчивыми к малым изменениям исходных данных.*

Доказательство. Доказательство первой части теоремы очевидно и является следствием основных теорем алгебры. □

Далее, из теоремы 3.5 следует, что если матрица G^* вырожденная и ранг матрицы M_n равен n, то система (3.1) в общем случае не является совместной. Поэтому результат измерения будет зависеть от того, какие уравнения из системы (3.1) взяты для расчетов. Разные наборы из n линейно независимых уравнений будут давать различные результаты. Аналогичный вывод можно сделать и для случая, когда ранг матрицы M_n меньше n.

Рассмотрим случай, когда система (3.1) при специальном выборе вектор-функции $y(t)$ совместна. Обозначим ее решение как $y_0(t)$.

Пусть вместо вектор-функции $y_0(t)$ в качестве исходных данных используется иная вектор-функция $\tilde{y}_0(t)$

$$\tilde{y}_0(t) = y_0(t) + \varepsilon\alpha(t),$$

где α — некоторая ограниченная вектор-функция, обладающая достаточной гладкостью, ε — малая постоянная, $\|\alpha(t)\|_{C_r[a,b]} \le N$. Очевидно, что

$$\|y_0(t) - \tilde{y}_0(t)\|_{C_r[a,b]} \le \varepsilon N. \tag{4.1}$$

При исходных данных $\tilde{y}_0(t)$ система не является совместной в общем случае и каждый набор линейно независимых строк в системе (3.1) будет давать свое решение, отличное от других. При этом различия могут быть значительными. Например, если $y_0(t) \equiv 0$, то система (3.1) будет однородной с тривиальным решением для вектор-функции $x(t)$. Если вместо вектор-функции $y_0(t)$ использовать вектор-функцию $\tilde{y}_0(t) = \varepsilon\alpha(t)$, то в правой части неоднородной системы (2.1) могут быть значительные величины, даже при малых ε, если функция $\alpha(t)$ является быстро осциллирующей вектор-функцией.

Кроме этого, заметим, что использование в расчетах производных от функций, заданных приближенно, является некорректной задачей [11].

Пусть теперь матрица G^* является прямоугольной и ранг матрицы $M_n = n$.

Теорема 4.2. *Результаты наблюдения являются неустойчивыми к малым изменениям исходных данных (вектор-функции $y(t)$ и ее производных).*

Доказательство. По теореме 3.5 система (3.1) в этом случае является несовместной, за исключением весьма специфических случаев. Следовательно, малые изменения исходных данных приводят к нарушению этих специфических условий и система (3.1) становится не совместной в общем случае. Выбор определенного набора из n линейно независимых строк в матрицы M_n будет приводить к определенному решению задачи наблюдения, которое отличается от решений, полученных при ином наборе n линейно независимых строк в матрице M_n. Такое отличие может быть значительным.

Если матрица G^* является строкой, то замена исходной функции $y_c(t)$, которая является стационарным решением неоднородной системы (3.1), на близкую к ней функцию в равномерной метрике, приводит к ошибочным результатам (см. теорему 4). □

5. Заключение

Приведенные исследования показали, что однозначные и устойчивые результаты наблюдения можно получить только в случае, когда матрица G^* квадратная и не вырожденная. Применение матричного критерия может давать ошибочные или неустойчивые результаты наблюдения.

Библиографические ссылки

1. *Kalman R.* On the general theory of control systems / R. Kalman. Proc. First. Int. Federation Automat. Control. Butterworths , London, 1961.—353 p.
2. *Kalman R.* Controllability of linear dynamical systems / R. Kalman, Y. C. Ho, K. S. Narendra. Contrib. Diff. Eq., Volume 1, Number 2, 1963, p. 213–226.
3. *Калман Р.* Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб.—М. : Мир, 1970. — 400 с.
4. *Гантмахер С.М.* Теория матриц / С. М. Гантмахер. —М. : Наука, 1978. —324 с.
5. *Воронов А.А.* Устойчивость, управляемость, наблюдаемость / А. А. Воронов.—М. : Наука, 1970. —336 с.
6. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами / Ю. Н. Андреев. —М. : Наука, 1976. —424 с.
7. *Уонэм М.* Линейные многомерные системы управления. Геометрический подход / М. Уонэм. —М. : Наука, 1980. —376 с.
8. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением / Н. Н. Красовский. —М. : Наука, 1968. —476 с.
9. *Бублик В. Н.* Основы теории управления / В. Н. Бублик, Н. Ф. Кириченко.—К. : Вища школа, 1975. — 328 с.
10. *Меньшиков Ю. Л.* Идентификация моделей внешних воздействий / Ю. Л. Меньшиков, Н. В. Поляков. — Д. : Наука та Освіта, 2009. — 188 с.
11. *Тихонов А. Н.* Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. —М. : Наука, 1979. —256 с.

Надійшла до редколегії 06.02.2012